
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 531.38

КАЧЕНИЕ МОНОКОЛЕСА ПО ДЕФОРМИРУЕМОМУ БРУСУ

© 2023 г. Ю. Ф. Голубев^{a,*}, В. В. Корянов^{a,**}

^aИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*e-mail: golubev@keldysh.ru

**e-mail: korianov@keldysh.ru

Поступила в редакцию 27.02.2023 г.

После доработки 13.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Представлен метод расчета колебаний упруговязкого бруса, лежащего на двух разновысоких упругих опорах, при движении по нему моноколеса с постоянной продольной скоростью. Получены уравнения движения моноколеса, соответствующие главной моде колебаний системы. Предложен метод вычисления частоты колебаний моноколеса на брус. Найдено приближенное усредненное решение, позволяющее аналитически оценить влияние параметров системы на ее динамику. Приведены результаты численных экспериментов по оценке точности приближенного решения.

DOI: 10.31857/S0002338823040066, EDN: OCLSTR

Введение. Рассматривается вопрос о преодолении широкой и протяженной расщелины с использованием бруса в качестве опоры. Исследуется влияние помех на движение, возникающих из-за основной моды малых упруговязких колебаний бруса. Для простоты изучается вариант, когда робот имеет только одну точку контакта. Естественным материальным объектом, для которого это, очевидно, выполнено, является недеформируемое моноколесо. Моноколесо как транспортное средство было создано в 2009 г. [1] и с той поры стало популярным, особенно в городах. В работе предполагается, что управление системой состоит в том, чтобы поддерживать постоянной продольную скорость движения моноколеса, направленную вдоль первоначально недеформированного бруса, и отслеживать осевую линию бруса. Вопросы путевой устойчивости робота не исследуются. Аналогичная задача о движении материальной точки по упругому рельсу анализировалась ранее в связи с необходимостью изучения движения поездов по железнодорожным мостам [2], при создании аттракционов с учетом воздействия подвижных нагрузок [3], при анализе движения реактивных снарядов по направляющим [4]. Поэтому задача представляет интерес не только с теоретической, но также и с практической точки зрения. В аккратной постановке изучаемая механическая система относится к разряду гибридных, описываемых совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Решение подобных задач требует сравнительно больших вычислительных ресурсов и мало пригодно для проведения массовых расчетов. Авторами преследуется цель создать достаточно удобную и малозатратную приближенную модель динамики системы, пригодную для предварительной оценки работоспособности алгоритмов преодоления препятствий. Переправа моноколеса по деформируемому брус рассматривалась ранее авторами в работе [5]. Ниже представлен вариант с некоторыми уточнениями, добавлениями и исправленными опечатками. Статья содержит вывод упрощенной динамической модели движения моноколеса по упруговязкому брус, лежащему на разновысоких упругих опорах, и аналитическое исследование некоторых свойств решений полученных уравнений движения. В конечном виде найдено приближенное решение и выполнена оценка его точности. Результаты свидетельствуют о том, что построенная модель пригодна для предварительной оценки робастности алгоритмов управления.

1. Уравнения движения колеса по упруговязкому брус. Пусть прямой однородный брус длины l висит между двумя упругими разновысокими шарнирно-подвижными опорами: A – левая опора и B – правая опора. Ось недеформированного бруса составляет с горизонтальной плоскостью угол ϑ : $\sin \vartheta = (H_B - H_A)/l$, где H_A – высота точки A и H_B – высота точки B над опорной горизонтальной плоскостью. В каждой точке опоры может возникать реакция, действующая со

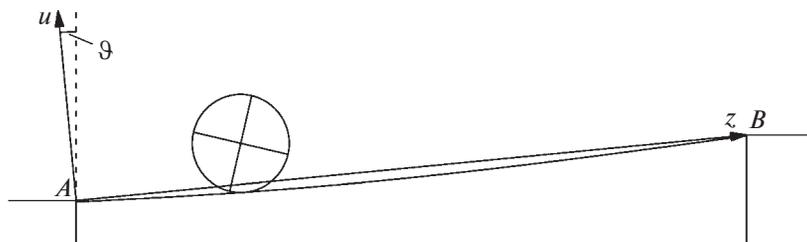


Рис. 1. Общий вид механической системы.

стороны опоры на брус, пропорциональная смещению точки опоры. Брус имеет вес $P_r = \gamma l$ и обладает свойством упругого сопротивления изгибу с жесткостью EJ поперечного сечения при изгибе, где E – модуль Юнга: $[E] = L^{-1}MT^{-2}$, J – момент инерции поперечного сечения бруса относительно горизонтальной оси сечения, перпендикулярной к плоскости изгиба. Например, для деревянного бруса модуль Юнга можно принять равным $E = 10^{10}$ Па. Если сечение бруса прямоугольное со сторонами a и b , то $J = ab^3/12$ при горизонтальной стороне a , расположенной перпендикулярно плоскости изгиба. На брус на расстоянии x от его левого конца находится колесо массы m и радиуса r . Центр масс колеса совпадает с центром колеса. Момент инерции относительно оси колеса равен I . Колесо катится по брусу без проскальзывания (рис. 1). Проекция точки опоры колеса на ось недеформированного бруса движется вдоль бруса от точки A к точке B с постоянной скоростью v . Требуется оценить влияние упругих свойств бруса на движение колеса.

Возьмем вертикальную плоскость, содержащую точки A и B . В этой плоскости пустим ось Az из точки A вдоль оси недеформированного бруса по направлению к точке B . Ось Au направим вверх перпендикулярно к оси недеформированного бруса. Брус взаимодействует с колесом в единственной точке, расположенной на оси бруса на расстоянии x от точки A . Колесо действует на брус силой \mathbf{F} , а брус действует на колесо силой $-\mathbf{F}$ соответственно. Силовой момент в точке контакта отсутствует. Пусть функция $u(t, z)$ описывает отклонение оси деформированного бруса от оси Az . Будем считать относительную деформацию бруса вместе с ее частной производной по z малыми первого порядка. Тогда с точностью до малых второго порядка единичный вектор $\boldsymbol{\tau} \approx (1, u'_z)$ направлен по касательной к брусу в фиксированный момент времени, а единичный вектор нормали к оси бруса можно представить в виде $\mathbf{v} \approx (-u'_z, 1)$. С учетом того, что точка опоры колеса о брус имеет координаты $(x, u(t, x))$, радиус-вектор \mathbf{r}_c центра масс колеса можно записать как $\mathbf{r}_c = (x - ru'_z(t, x), u(t, x) + r)$. Найдем проекцию центра масс на ось, параллельную касательному вектору $\boldsymbol{\tau}$ и проходящую через точку A :

$$\mathbf{r}_c \cdot \boldsymbol{\tau} = x + u(t, x)u'_z(t, x) \approx x$$

с точностью до малых второго порядка. Таким образом, можно считать, что точка касания колеса с деформированным брусом отстоит от точки A на расстояние x и, следовательно, колесо имеет постоянную угловую скорость качения $\omega = \dot{x}/r = v/r$. Пусть M – управляющий момент относительно оси моноколеса. Из уравнения баланса силовых моментов относительно точки касания моноколеса с брусом получим

$$M + mgr[\sin \vartheta + u'_z(t, x)\cos \vartheta] + M_{\text{тр}} = 0.$$

Отсюда видно, что управляющий момент должен преодолевать момент силы тяжести, возникающий из-за наклона деформированного бруса, и момент трения качения $M_{\text{тр}}$. Предположим, что следящая по угловой скорости система справляется с этой задачей и обратимся к анализу составляющей движения вдоль оси Au .

Будем считать, что моноколесо совершает безотрывное движение вдоль бруса и касается его в единственной точке, определяемой координатой x на оси недеформированного бруса.

Тогда колесо в направлении оси Au воздействует на брус сосредоточенной силой $\mathbf{F} = (0, F)$. Деформация бруса описывается уравнением [2]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\gamma \cos \vartheta - \frac{m}{l} \left(g \cos \vartheta + \frac{d^2 u_d}{dt^2} \right) \delta(z-x), \quad (1.1)$$

где u – отклонение оси бруса от оси Az , ρ – погонная плотность бруса, g – ускорение силы тяжести, $\delta(z-x)$ – сингулярная δ -функция:

$$\delta(z-x) = \begin{cases} 0, & z \neq x, \\ +\infty, & z = x, \end{cases} \quad \int_0^z \delta(z-x) dz = \sigma(z-x) = \begin{cases} 0, & z < x, \\ 1, & z \geq x, \end{cases}$$

$\sigma(z-x)$ – сингулярная функция Хевисайда. Полная производная от вертикальной координаты u_d , движущейся по брусу точки приложения силы вычисляется как

$$\frac{d^2 u_d}{dt^2} = \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u_d}{\partial t \partial z} + v^2 \frac{\partial^2 u_d}{\partial z^2},$$

когда горизонтальная скорость v перемещения точки x по брусу постоянна. В общем случае решение уравнения (1.1) получается численным методом [2] и затруднено из-за наличия δ -функции с переменным положением порога.

Уравнение движения предстанет в еще более сложном виде, чем уравнение (1.1), если учесть внутреннюю диссипацию бруса. Вместе с тем наличие диссипации успокаивает собственные высокочастотные колебания бруса, приводя в конечном итоге его осевую линию к равновесной форме. Предположим, что процесс успокоения собственных колебаний бруса происходит так быстро, что можно ограничиться случаем квазистатического подсчета сил, влияющих со стороны бруса на колесо. В этом предположении брус при любом расположении колеса на нем будет отслеживать форму равновесия, мгновенно соответствующую положению колеса и силам инерции, которые действуют на брус со стороны колеса. По постановке задачи колесо может совершать движение лишь в связанной с брусом вертикальной плоскости.

Точечное взаимодействие колеса с брусом описывается контактной силой \mathbf{F} воздействия колеса на брус, направленной по оси Au . Тогда сила \mathbf{F}_p воздействия бруса на колесо будет равна $\mathbf{F}_p = -\mathbf{F}$. Брус оказывает сопротивление движению колеса в отрицательном направлении оси Au и не препятствует уходу колеса с бруса в положительном направлении этой оси. Найдем соотношение между силой \mathbf{F} и осевой линией равновесия бруса.

Пусть в некоторой точке x к брусу приложена сила \mathbf{F} , перпендикулярная к оси недеформированного бруса. Составляющие реакций опор \mathbf{N}_A и \mathbf{N}_B , направленные вдоль оси Au , выражаются формулами

$$N_A = \frac{P}{2} - (1 - \kappa)F, \quad N_B = \frac{P}{2} - \kappa F,$$

где $P = P_r \cos \vartheta$, $\kappa = x/l$, а величина F учитывается со знаком. Если сила \mathbf{F} сонаправлена с осью Au , то $F > 0$, а если нет, то $F < 0$. Пусть функция $u(z)$ задает форму оси бруса. Считая деформации и угол ϑ малыми, представим функцию $u(z)$ в виде суммы: $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$, где $u_1(z)$ – статическое смещение точек оси бруса при условии, что опоры не деформируются, а $u_2(z)$ – смещение точек оси бруса из-за деформации опор. Тогда производная $u_1'(z) = du_1/dz$ выражается формулой [2]

$$EJu_1'(z) = EJ u_1'(0) + \left[\frac{P}{2} - (1 - \kappa)F \right] \frac{z^2}{2} + \frac{(z-x)^2}{2} F \sigma(z-x) - \frac{\gamma \cos \vartheta z^3}{6}. \quad (1.2)$$

Зависимость $u_1(z)$ имеет вид

$$EJu_1(z) = EJ u_1'(0)z + \left[\frac{P}{2} - (1 - \kappa)F \right] \frac{z^3}{6} + F \frac{(z-x)^3}{6} \sigma(z-x) - \frac{\gamma \cos \vartheta z^4}{24}. \quad (1.3)$$

При $z = l$ прогиб бруса должен равняться нулю: $u_1(l) = 0$. Поэтому

$$EJu_1'(0) = \frac{Fl^2}{6} \kappa(1 - \kappa)(2 - \kappa) - \frac{Pl^2}{24}. \quad (1.4)$$

Компонента $u_1(x)$ прогиба бруса в точке x дается соотношением

$$EJu_1(x) = \frac{Fl^3}{3} \kappa^2 (1 - \kappa)^2 - \frac{Pl^3}{24} \kappa (1 - \kappa) (1 + \kappa - \kappa^2). \quad (1.5)$$

Компоненту $u_2(z)$ прогиба бруса в точке z можно выразить формулой

$$u_2(z) = - \left[\frac{N_A}{k_A} \left(1 - \frac{z}{l} \right) + \frac{N_B z}{k_B l} \right], \quad (1.6)$$

где k_A, k_B – коэффициенты упругости опоры в точках A и B соответственно. Подставив сюда найденные ранее значения N_A и N_B , найдем

$$u_2(x) = F \left[\frac{(1 - \kappa)^2}{k_A} + \frac{\kappa^2}{k_B} \right] - \frac{P}{2} \left(\frac{1 - \kappa}{k_A} + \frac{\kappa}{k_B} \right). \quad (1.7)$$

Суммарное смещение бруса в точке x принимает вид

$$u(x) = F\delta_F - P\delta_P, \quad (1.8)$$

где коэффициенты влияния δ_F и δ_P даются выражениями

$$\delta_F = \left(\mu \kappa^2 + \frac{1}{k_A} \right) (1 - \kappa)^2 + \frac{\kappa^2}{k_B}, \quad \delta_P = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\mu \kappa (1 + \kappa - \kappa^2)}{4} + \frac{1}{k_A} \right) (1 - \kappa) + \frac{\kappa}{k_B} \right], \quad (1.9)$$

причем $\mu = l^3 / (3EJ)$. Эти формулы можно представить в более симметричном виде, применив замену $\kappa = 1/2 + \xi$:

$$\begin{aligned} \delta_F &= \mu \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right)^2 + \frac{1}{k_A} \left(\frac{1}{2} - \xi \right)^2 + \frac{1}{k_B} \left(\frac{1}{2} + \xi \right)^2, \\ \delta_P &= \frac{\mu}{8} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \left(\frac{5}{4} - \xi^2 \right) + \frac{1}{2k_A} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) + \frac{1}{2k_B} \left(\frac{1}{2} + \xi \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнение движения центра масс колеса в проекции на ось Au принимает вид

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + fm\dot{u} = -m\hat{g} - F,$$

где $\hat{g} = g \cos \vartheta$, F – сила, с которой колесо действует на брус, $fm > 0$ – коэффициент демпфирования, возникающий из-за внутренней диссипации энергии бруса. Приняв, что сила $(-F)$ вызывается упругостью бруса, с помощью соотношения (1.8) получим замкнутое уравнение движения центра масс колеса в проекции на ось Au :

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + fm\dot{u} + \frac{1}{\delta_F} u = -m\hat{g} - P \frac{\delta_P}{\delta_F}, \quad (1.11)$$

причем $\kappa = vt/l$, $\xi = -1/2 + vt/l$. Уравнение (1.11) представляет собой аналог уравнения Виллиса–Стокса, полученного ими ранее для движения груза с постоянной скоростью по невесомой упругой балке с закрепленными концами [6]. При этом уравнение (1.11), в отличие от уравнения Виллиса–Стокса, не содержит особенностей, что делает его более физически правдоподобным. Поскольку брус представляет собой освобождающую связь, имеем ограничение $u < 0$. Если оно нарушено, то колесо может с бруса упасть. Кроме того, должно быть выполнено условие, что колесо касается бруса только в одной точке. Поэтому радиус кривизны ρ_r осевой линии бруса должен быть больше, чем радиус колеса r . Следовательно, должно быть выполнено

$$\frac{1}{\rho_r} = \frac{|u''(x)|}{\sqrt{1 + [u'(x)]^2}} < \frac{1}{r}, \quad (1.12)$$

где штрих, как и прежде, обозначает дифференцирование по z . В соответствии с формулами (1.2), (1.3) и (1.6) получим

$$\begin{aligned} u''(x) &= \frac{3\mu}{l^2} \kappa(1-\kappa) \left[\frac{P}{2} - F \right] = \frac{3\mu}{l^2} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \left[\frac{P}{2} - F \right], \\ u'(x) &= \frac{\mu}{l} (1-2\kappa) \left[F \kappa(1-\kappa) - \frac{P}{8} (1+2\kappa-2\kappa^2) \right] + u'_2(x), \\ u'_2(x) &= F \left(\frac{\kappa}{k_B} - \frac{1-\kappa}{k_A} \right) + \frac{P}{2} \left(\frac{1}{k_A} - \frac{1}{k_B} \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u''(x) &= \frac{3\mu}{l^2} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \left[\frac{P}{2} - F \right], \\ u'(x) &= -\frac{2\mu}{l} \xi \left[F \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) - \frac{P}{8} \left(\frac{3}{2} - 2\xi^2 \right) \right] + u'_2(x), \\ u'_2(x) &= F \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_B} - \frac{1}{k_A} \right) + \left(\frac{1}{k_B} + \frac{1}{k_A} \right) \xi \right] + \frac{P}{2} \left(\frac{1}{k_A} - \frac{1}{k_B} \right). \end{aligned}$$

Уравнение (1.11) следует интегрировать при начальных условиях

$$u(0) = -\frac{m\hat{g} + P/2}{k_A}, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (1.13)$$

и постоянном значении v .

2. Исследование качения колеса по брусу. Если в уравнении (1.11) принять $v = 0$, то оно превращается в обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Как видно из первой формулы (1.9), коэффициент δ_F оказывается строго положительным. Тогда при значениях параметра $f < 2/\sqrt{m\delta_F}$ уравнение (1.11) описывает затухающие колебания с постоянной частотой

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m\delta_F} - \frac{f^2}{4}}$$

относительно равновесного значения

$$u_s(\kappa) = -m\hat{g}\delta_F - P\delta_p. \quad (2.1)$$

На рис. 2 показана функция $u_s(\kappa)$ при массе колеса $m = 16$ кг для деревянного бруса, имеющего размеры $l = 2.5$ м, $a = 25$ см, $b = 2$ см. Коэффициенты жесткости при взаимодействии бруса с грунтом приняты равными $k_A = k_B = 30000$ Н/м. Функция $u_s(\kappa)$ симметрична относительно значения $\kappa = 1/2$. В начальной ($\kappa = 0$) и конечной ($\kappa = 1$) точках она выпукла вверх. Видно, что в точках A и B брус вместе с колесом продавливает грунт меньше, чем на 1 см. Минимальное значение прогиба бруса относительно прямой, соединяющей ее концы, достигается, когда колесо находится в середине бруса, и составляет ~ -5 см.

При $v \neq 0$ и

$$\frac{v}{l} \ll \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m\delta_F} - \frac{f^2}{4}}$$

величина $u_s(x)$ представляет собой медленно меняющуюся функцию в зависимости от времени. Смысл ограничения на величину v состоит в том, что в пределах времени каждого колебания значение функции $u_s(x)$ можно считать практически неизменным и равным, например, значению, соответствующему началу колебания. Тем самым получается, что при малых значениях скорости v колебания по координате u в среднем будут происходить в окрестности функции $u_s(x)$. Понятно, что приведенный анализ является интуитивным и носит в основном качественный характер.

При скорости $v = 0.4$ м/с и коэффициенте диссипации $f = 10$ с⁻¹ получается решение $u(\kappa)$ уравнения (1.11), график которого в выбранном на рис. 2 масштабе мало отличается от графика

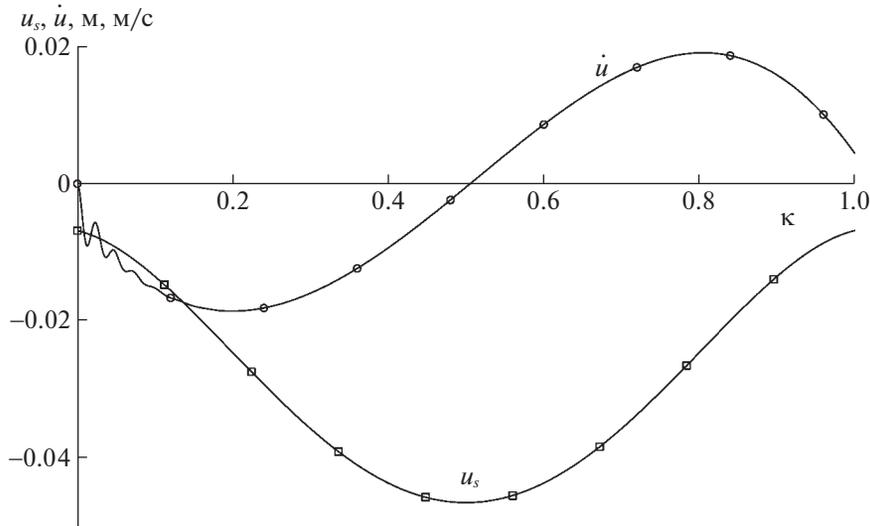


Рис. 2. Функции $u_s(\kappa)$, $\dot{u}_s(\kappa)$.

функции $u_s(\kappa)$. На этом рисунке показан лишь график производной по времени $\dot{u}_s(\kappa)$, который свидетельствует о том, что в начале движения брус вместе с грузом колеблется и колебания затухают достаточно быстро.

Для того, чтобы выявить более точную зависимость средних значений деформации бруса от скорости движения точки, представим решение уравнения (1.11) в виде

$$u = y + u_s(x) \tag{2.2}$$

и учтем, что

$$\dot{u}_s(x) = -\frac{v}{l} \left[m\hat{g} \frac{d\delta_F}{d\kappa} + P \frac{d\delta_P}{d\kappa} \right], \quad \ddot{u}_s(x) = -\frac{v^2}{l^2} \left[m\hat{g} \frac{d^2\delta_F}{d\kappa^2} + P \frac{d^2\delta_P}{d\kappa^2} \right], \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_F}{d\kappa} &= 2(1-\kappa) \left[\mu\kappa(1-2\kappa) - \frac{1}{k_A} \right] + \frac{2\kappa}{k_B}, & \frac{d\delta_P}{d\kappa} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\mu(1-2\kappa)(1+2\kappa-2\kappa^2)}{4} - \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right], \\ \frac{d^2\delta_F}{d\kappa^2} &= 2 \left[\mu(1-6\kappa+6\kappa^2) + \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right], & \frac{d^2\delta_P}{d\kappa^2} &= -\frac{3\mu\kappa(1-\kappa)}{2}. \end{aligned}$$

Или

$$\dot{u}_s(x) = -\frac{v}{l} \left[m\hat{g} \frac{d\delta_F}{d\xi} + P \frac{d\delta_P}{d\xi} \right], \quad \ddot{u}_s(x) = -\frac{v^2}{l^2} \left[m\hat{g} \frac{d^2\delta_F}{d\xi^2} + P \frac{d^2\delta_P}{d\xi^2} \right], \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_F}{d\xi} &= -4\mu \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \xi - \frac{2}{k_A} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) + \frac{2}{k_B} \left(\frac{1}{2} + \xi \right), & \frac{d\delta_P}{d\xi} &= \frac{1}{2} \left[-\mu\xi \left(\frac{3}{4} - \xi^2 \right) - \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right], \\ \frac{d^2\delta_F}{d\xi^2} &= 2 \left[-2\mu \left(\frac{1}{4} - 3\xi^2 \right) + \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right], & \frac{d^2\delta_P}{d\xi^2} &= -\frac{3}{2} \mu \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right). \end{aligned}$$

Тогда y должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\ddot{y} + f\dot{y} + \frac{1}{m\delta_F} y = f \frac{v}{l} \left[m\hat{g} \frac{d\delta_F}{d\kappa} + P \frac{d\delta_P}{d\kappa} \right] + \frac{v^2}{l^2} \left[m\hat{g} \frac{d^2\delta_F}{d\kappa^2} + P \frac{d^2\delta_P}{d\kappa^2} \right] \tag{2.5}$$

при начальных условиях

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -\dot{u}_s(0). \quad (2.6)$$

Формула (2.5) показывает, что решение уравнения (1.11) будет отклоняться от функции $u_s(x)$ не только пропорционально квадрату скорости v , но при учете диссипации оказывается пропорциональным еще и произведению скорости на коэффициент демпфирования.

Для упрощения дальнейшего анализа примем $k_A = k_B = k$. При этом формулы (1.10) записываются как

$$\delta_F = \mu \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right)^2 + \frac{2}{k} \left(\frac{1}{4} + \xi^2 \right), \quad \delta_P = \frac{\mu}{8} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \left(\frac{5}{4} - \xi^2 \right) + \frac{1}{2k} \quad (2.7)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_F}{d\xi} &= 4\xi \left[-\mu \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) + \frac{1}{k} \right], & \frac{d\delta_P}{d\xi} &= -\frac{\mu\xi}{2} \left(\frac{3}{4} - \xi^2 \right), \\ \frac{d^2\delta_F}{d\xi^2} &= 4 \left[-\mu \left(\frac{1}{4} - 3\xi^2 \right) + \frac{1}{k} \right], & \frac{d^2\delta_P}{d\xi^2} &= -\frac{3}{2}\mu \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} C(\xi) &= m\hat{g} \frac{d\delta_F}{d\xi} + P \frac{d\delta_P}{d\xi} = G\xi(\xi^2 + \alpha), \\ D(\xi) &= m\hat{g} \frac{d^2\delta_F}{d\xi^2} + P \frac{d^2\delta_P}{d\xi^2} = 3G(\xi^2 + \beta), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$G = \frac{\mu(8m\hat{g} + P)}{2}, \quad \alpha = \frac{8m\hat{g}(4 - k\mu) - 3k\mu P}{4k\mu(8m\hat{g} + P)}, \quad \beta = \frac{8m\hat{g}(4 - k\mu) - 3k\mu P}{12k\mu(8m\hat{g} + P)}, \quad (2.9)$$

так что

$$\beta = \frac{\alpha}{3}, \quad -\frac{3}{4} < \alpha < \frac{4 - k\mu}{4k\mu}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.5) можно переписать следующим образом:

$$\ddot{y} + f\dot{y} + \frac{1}{m\delta_F}y = f \frac{v}{l} C(\xi) + \frac{v^2}{l^2} D(\xi). \quad (2.11)$$

Видно, что если скорость $v = 0$, то уравнение (2.11) описывает при $t \rightarrow \infty$ асимптотическое стремление функции $y(t)$ к нулевому среднему значению $y = y_r = 0$, а функция $u(t)$ будет тогда стремиться к значению $u_s(\xi)$, соответствующему фиксированному значению ξ . Если ξ меняется, т.е. $v \neq 0$, то из-за влияния функций $C(\xi)$ и $D(\xi)$ среднее значение $y_r(\xi)$ будет отклоняться от нуля в зависимости от положения колеса на брус.

Для того чтобы качественно исследовать зависимость $y_r(\xi)$, если $v \neq 0$, рассмотрим поведение функции $\delta_F(\xi)$, представленной формулой (2.7). При $k_A = k_B = k$ ее можно записать в виде

$$\delta_F = \mu \left(\xi^4 - \frac{k\mu - 4}{2k\mu} \xi^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2k\mu} \right). \quad (2.12)$$

Функция $\delta_F(\xi^2)$ имеет минимум, когда $\xi^2 = \xi_m^2 = (k\mu - 4)/(4k\mu)$.

Если $0 < k\mu < 4$, то этот минимум в области $0 \leq \xi^2 \leq 1/4$ не существует, и тогда в указанной области функция δ_F монотонно меняется в пределах

$$\frac{\mu}{16} + \frac{1}{2k} \leq \delta_F \leq \frac{1}{k} \rightarrow k \leq \frac{1}{\delta_F} \leq \frac{16k}{k\mu + 8},$$

а локальная круговая частота $\omega(\xi) = 1/(\sqrt{m\delta_F})$ принадлежит диапазону

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \leq \omega(\xi) \leq \sqrt{\frac{16k}{m(k\mu + 8)}}, \quad k\mu < 4. \quad (2.13)$$

Пусть теперь $k\mu \geq 4$. Представим аргумент минимума в виде

$$\xi_m^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{k\mu}.$$

Следовательно, справедливо неравенство $0 \leq \xi_m^2 < 1/4$. Минимальное значение δ_F имеет вид

$$\delta_F^m = \frac{k\mu - 1}{k^2\mu}$$

Максимальные значения δ_F достигаются на границах диапазона $0 \leq \xi^2 < 1/4$:

$$\delta_F(0) = \frac{k\mu + 8}{16k}, \quad \delta_F\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{k}.$$

Таким образом, функция $\delta_F(\xi)$ изменяется в диапазоне

$$\frac{k\mu - 1}{k^2\mu} \leq \delta_F(\xi) \leq \max\left[\frac{k\mu + 8}{16k}, \frac{1}{k}\right],$$

а локальная круговая частота ограничена значениями

$$\min\left[\sqrt{\frac{16k}{m(k\mu + 8)}}, \sqrt{\frac{k}{m}}\right] \leq \omega(\xi) \leq \sqrt{\frac{k^2\mu}{m(k\mu - 1)}}. \quad (2.14)$$

Объединив формулы (2.13) и (2.14), получим

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{k}{m}} \leq \omega(\xi) \leq \sqrt{\frac{16k}{m(k\mu + 8)}}, & 0 < k\mu < 4, \\ \min\left[\sqrt{\frac{16k}{m(k\mu + 8)}}, \sqrt{\frac{k}{m}}\right] \leq \omega(\xi) \leq \sqrt{\frac{k^2\mu}{m(k\mu - 1)}}, & k\mu \geq 4. \end{cases} \quad (2.15)$$

На рис. 3 показан график зависимости $\omega(\kappa) = \sqrt{1/(m\delta_F)}$, которая соответствует указанным выше параметрам движения и характеризует тип локальных деформаций бруса при $v = 0$. График отвечает второй формуле (2.15). Точка $\kappa = 0.5$ соответствует значению $\xi = 0$ и доставляет минимум функции $\omega(\kappa)$. Максимумы, соответствующие правой части второй формулы (2.15), расположены вблизи границ $\xi = \pm 1/2$. По графику можно, например, судить, что при выбранном ранее коэффициенте демпфирования $f = 10 \text{ с}^{-1}$ это будут затухающие колебания для любой точки бруса. Видно также, что локальная круговая частота колебаний бруса меняется в значительном диапазоне и в середине бруса колебания происходят с меньшей частотой, чем на его концах.

На рис. 4 показаны графики $u(\kappa)$ для сравнительно небольших значений коэффициента вязкого трения. Как и следовало ожидать, при $f = 0$ затухание не происходит, а частота колебаний оказывается переменной. При $f = 2$ колебания затухают лишь ближе к концу бруса, а для $f = 10$ колебания практически незаметны уже для значений $\kappa > 0.2$. Значения u оказываются на два порядка меньше, чем соответствующие значения $u_s(\kappa)$, представленные на рис. 2, так что движение колеса происходит без отскоков от бруса. Кроме того, на рис. 4 видно, что асимптотические решения пересекаются приблизительно в одной точке в окрестности значения $\kappa = 0.5$.

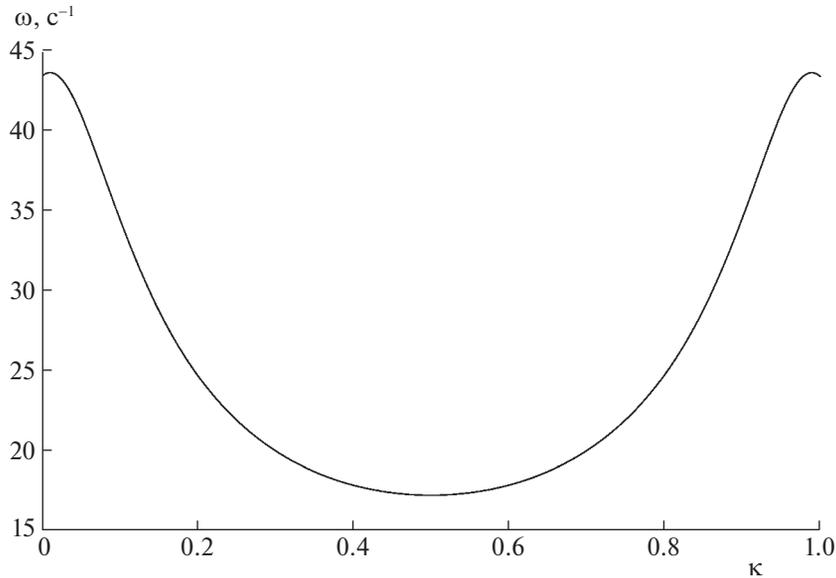


Рис. 3. Зависимость $\omega(\kappa) = \sqrt{1/(m\delta_F)}$.

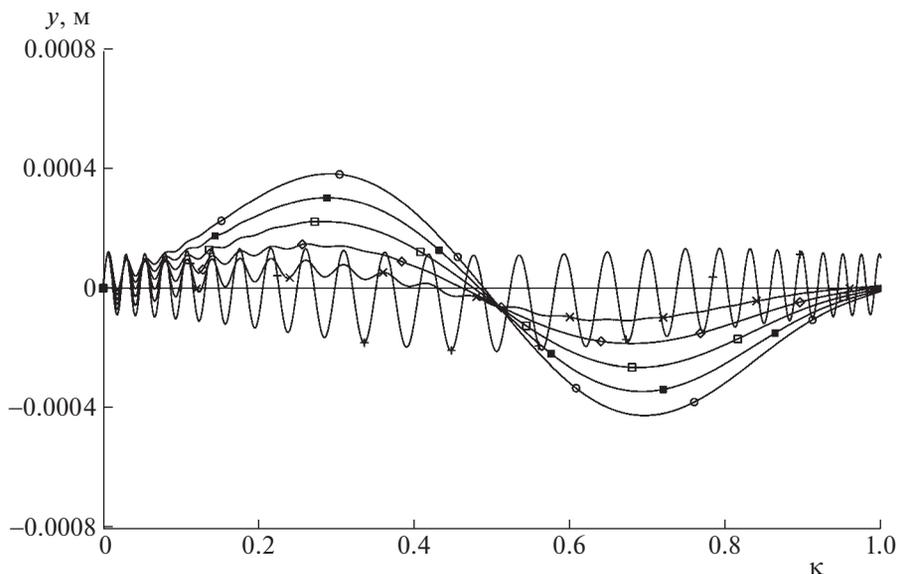


Рис. 4. Зависимости $y(\kappa)$ для малых значений коэффициента f : $f = 0$ (+), $f = 2$ (×), $f = 4$ (◇), $f = 6$ (□), $f = 8$ (■), $f = 10$ (○).

На рис. 5 представлены графики $y(\kappa)$ для значений $f > 10$. Их масштаб не позволяет разглядеть начальные колебания груза, которые, конечно, есть, а видны только асимптотические кривые. Они уже не пересекаются все в одной точке в окрестности значения $\kappa = 0.5$. Точки пересечения графиков, соответствующих соседним значениям параметра f , приближаются с ростом f к правому концу бруса. Положительные отклонения оказываются более значительными, чем отрицательные, и занимают большую часть бруса. Вместе с тем суммарные отклонения бруса от оси Az оказываются пока еще отрицательными на всем протяжении бруса, и колесо не отскакивает от бруса. Сам по себе факт разгрузки бруса на начальном участке движения колеса представ-

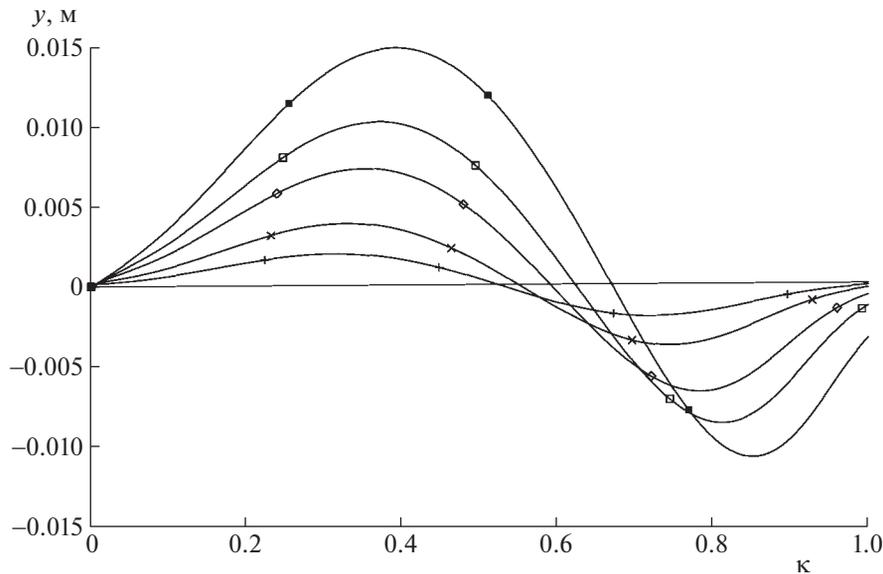


Рис. 5. Зависимости $y(\kappa)$ для больших значений коэффициента f : $f = 50$ (+), $f = 100$ (×), $f = 200$ (◇), $f = 300$ (□), $f = 500$ (■).

ляет интерес и объясняется, по-видимому, тем, что при больших коэффициентах демпфирования брус как бы не успевает дойти до своего нижнего положения, когда колесо по нему перемещается.

Уравнение (2.5) не поддается аналитическому интегрированию в основном из-за того, что частота колебаний бруса оказывается переменной по его длине. Численно полученные зависимости $y(\kappa)$ представляют свойства движения системы в ограниченной области параметров. Для понимания этих свойств “в большом” применим аналитическое приближение решений уравнения (2.5), сначала приняв, что частота колебаний постоянна.

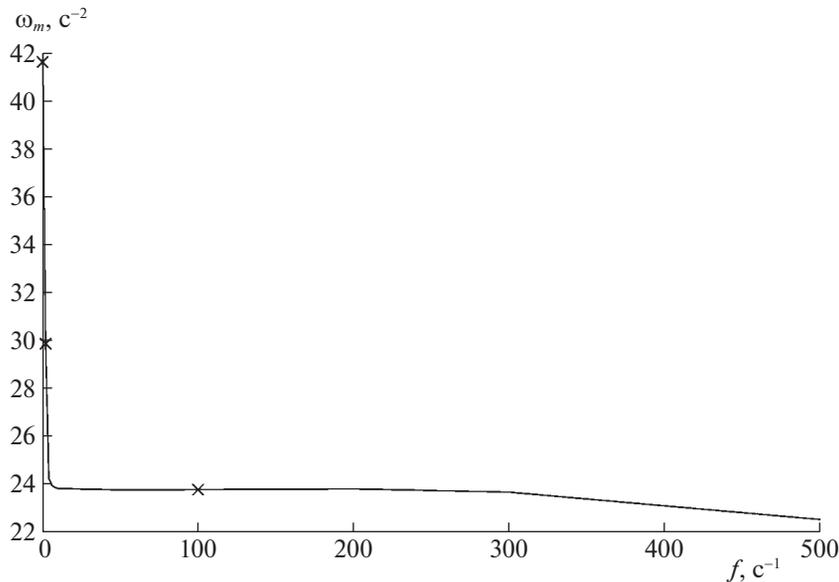
3. Приближенное решение. Рассмотрим уравнение, структурно похожее на уравнение (2.11):

$$\ddot{y}_m + f\dot{y}_m + \omega_m^2 y_m = f \frac{v}{l} C(\xi) + \frac{v^2}{l^2} D(\xi), \quad (3.1)$$

где $\xi = -1/2 + vt/l = \kappa - 1/2$, а функции $C(\xi)$, $D(\xi)$ определены формулами (2.8). Для каждого заданного значения κ подберем в указанных диапазонах (2.15) некоторое постоянное число ω_m , так чтобы решение y_m как можно меньше отличалось от соответствующего решения уравнения (2.11). В простейшем случае в качестве некоторого грубого приближения можно выбрать среднее между предельными значениями для $\omega(\xi)$ в формуле (2.15). Более точную настройку подходящего значения ω_m можно осуществить следующим образом. Возьмем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{y} + f\dot{y} + \frac{1}{m\delta_F} y = f \frac{v}{l} C(\xi) + \frac{v^2}{l^2} D(\xi), \\ \ddot{y}_m + f\dot{y}_m + \omega_m^2 y_m = f \frac{v}{l} C(\xi) + \frac{v^2}{l^2} D(\xi), \\ \dot{w} = p(t)(y - y_m)^2. \end{cases} \quad (3.2)$$

В этой системе $p(t) > 0$ – весовой коэффициент, выбираемый эмпирически в зависимости от того, для какого участка траектории приближение должно быть наилучшим. Пусть $y(0)$ и $y_m(0)$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям (2.6), а $w(0) = 0$. Интегрирование по времени заканчивается, когда $t = T = l/v$. Функция $w(t)$ является монотонно возрастающей. Значение

Рис. 6. Зависимость $\omega_m(f)$

$W(\omega_m) = w(T)$ неотрицательно и зависит от выбранной величины ω_m . Тогда наилучшим выбором для параметра ω_m можно считать

$$\omega_m^* = \arg \min_{\omega_m} W(\omega_m). \quad (3.3)$$

Следует отметить, что при использовании формулы (3.3) возникает зависимость $\omega_m^* = \omega_m^*(f)$, поскольку и первое, и второе уравнения системы (3.2) содержат параметр f . На рис. 6 показана типичная зависимость коэффициента $\omega_m(f)$, удовлетворяющая условию (3.3) при $p(t) \equiv 1$. Видно, что при $f = 0$ значения этого коэффициента довольно большие, но с ростом f они резко падают и остаются практически постоянными для значений $f > 10$. Это, возможно, связано с тем, что при наличии демпфирования колебания быстро успокаиваются и изменение частоты мало влияет на общий характер траектории.

Пусть значение ω_m так или иначе выбрано. Тогда корни характеристического уравнения для (3.1) имеют общий вид

$$\lambda_1 = \frac{-f - \sqrt{f^2 - 4\omega_m^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-f + \sqrt{f^2 - 4\omega_m^2}}{2}. \quad (3.4)$$

При $f < 2\omega_m$ они определяют асимптотически затухающий колебательный процесс около частного притягивающего решения y_r уравнения (3.1), а при $f \geq 2\omega_m$ процесс становится аperiодически приближающимся к частному решению y_r . Правая часть уравнения (3.1) есть многочлен $L(\xi)$ третьей степени по ξ :

$$L(\xi) = G \frac{V}{l} \left(f \xi^3 + 3 \frac{V}{l} \xi^2 + f \alpha \xi + \frac{V}{l} \alpha \right). \quad (3.5)$$

Частное решение $y_r(\xi)$ будем искать в виде

$$y_r(\xi) = G(a_3 \xi^3 + a_2 \xi^2 + a_1 \xi + a_0), \quad (3.6)$$

где коэффициенты $a_i, i = \overline{0,3}$, постоянны. Подставляя выражение (3.6) в уравнение (3.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим систему уравнений относительно коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 :

Таблица. Значения $\omega_m, \nu, a_0, a_1, a_2, a_3$ для различных f

f	ω_m	ν	a_0	a_1	a_2	a_3
0	4.158e + 01	1.480e - 05	-4.080e - 06	-0.000e + 00	4.441e - 05	0.000e + 00
1	4.064e + 01	1.550e - 05	-4.269e - 06	-2.671e - 05	4.647e - 05	9.688e - 05
2	2.985e + 01	2.873e - 05	-7.884e - 06	-9.905e - 05	8.580e - 05	3.591e - 04
3	2.443e + 01	4.288e - 05	-1.164e - 05	-2.219e - 04	1.267e - 04	8.040e - 04
4	2.425e + 01	4.353e - 05	-1.168e - 05	-3.003e - 04	1.270e - 04	1.088e - 03
5	2.406e + 01	4.422e - 05	-1.167e - 05	-3.814e - 04	1.269e - 04	1.382e - 03
6	2.396e + 01	4.461e - 05	-1.153e - 05	-4.617e - 04	1.254e - 04	1.673e - 03
7	2.390e + 01	4.483e - 05	-1.130e - 05	-5.413e - 04	1.229e - 04	1.961e - 03
8	2.386e + 01	4.496e - 05	-1.100e - 05	-6.205e - 04	1.197e - 04	2.248e - 03
9	2.384e + 01	4.505e - 05	-1.065e - 05	-6.994e - 04	1.159e - 04	2.534e - 03
10	2.382e + 01	4.511e - 05	-1.024e - 05	-7.781e - 04	1.115e - 04	2.819e - 03
50	2.376e + 01	4.534e - 05	4.272e - 05	-3.894e - 03	-4.662e - 04	1.417e - 02
100	2.377e + 01	4.529e - 05	2.051e - 04	-7.678e - 03	-2.268e - 03	2.831e - 02
200	2.381e + 01	4.516e - 05	8.072e - 04	-1.450e - 02	-9.426e - 03	5.646e - 02
300	2.367e + 01	4.569e - 05	1.692e - 03	-1.987e - 02	-2.188e - 02	8.567e - 02
500	2.253e + 01	5.044e - 05	3.149e - 03	-2.002e - 02	-7.437e - 02	1.576e - 01

$$\begin{cases} 2\frac{\nu}{l}a_2 + fa_1 + \frac{l\omega_m^2}{\nu}a_0 = \frac{\nu}{l}\alpha, \\ 6\frac{\nu}{l}a_3 + 2fa_2 + \frac{l\omega_m^2}{\nu}a_1 = f\alpha, \\ 3fa_3 + \frac{l\omega_m^2}{\nu}a_2 = 3\frac{\nu}{l}, \\ \omega_m^2 a_3 = f\frac{\nu}{l}. \end{cases}$$

Из этой системы найдем

$$\begin{aligned} a_0 &= \nu(\alpha - 2a_2) - a_1a_3, & a_2 &= 3(\nu - a_3^2), \\ a_1 &= a_3(\alpha - 2a_2 - 6\nu), & a_3 &= \frac{f\nu}{\omega_m^2 l}, & \nu &= \frac{\nu^2}{\omega_m^2 l^2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Таким образом, коэффициент a_3 прямо пропорционален коэффициенту диссипации f . Выразим остальные коэффициенты частного решения явным образом через a_3 :

$$\begin{aligned} a_2 &= 3(\nu - a_3^2), & a_1 &= a_3(\alpha - 12\nu + 6a_3^2), \\ a_0 &= \nu(\alpha - 6\nu) + (18\nu - \alpha)a_3^2 - 6a_3^4. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Пусть диссипация отсутствует ($f=0$), тогда частное решение имеет вид

$$y_r(\xi) = G\nu[3\xi^2 + (\alpha - 6\nu)].$$

Оно оказывается симметричным относительно точки $\xi = 0$, и на концах бруса принимает значения

$$y_r\left(\frac{1}{2}\right) = y_r\left(-\frac{1}{2}\right) = G\nu\left[\frac{3}{4} + (\alpha - 6\nu)\right].$$

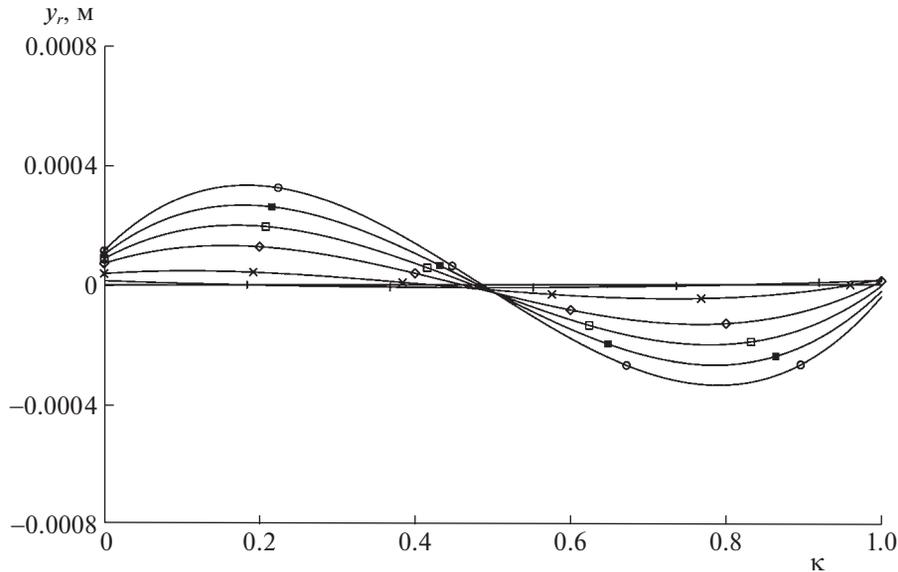


Рис. 7. Зависимости $y_r(\kappa)$ для малых значений коэффициента f : $f = 0$ (+), $f = 2$ (x), $f = 4$ (◇), $f = 6$ (□), $f = 8$ (■), $f = 10$ (○)

Если $\alpha \geq 6\nu$ (скорость качения моноколеса невелика), то $y_r \geq 0$. Другими словами, качение колеса в этом случае в среднем ослабляет квазистационарную деформацию бруса и тем меньше, чем ближе колесо находится к середине бруса. Термин “в среднем” означает, что полное решение уравнения (3.1) включает в себя не только частное решение $y_r(\xi)$, но и незатухающую при $f = 0$ колебательную составляющую.

Если $6\nu > \alpha > 6\nu - 3/4$, то в интервалах

$$-\frac{1}{2} \leq \xi < -\sqrt{\frac{6\nu - \alpha}{3}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{6\nu - \alpha}{3}} < \xi \leq \frac{1}{2}$$

качение колеса в среднем ослабляет квазистационарную составляющую деформации, а в интервале

$$-\sqrt{\frac{6\nu - \alpha}{3}} < \xi < \sqrt{\frac{6\nu - \alpha}{3}}$$

усиливает. Наконец, если $\alpha < 6\nu - 3/4$, то качение колеса усиливает квазистационарную деформацию на всем протяжении бруса.

При $f \neq 0$ частное решение усложняется. Оно представляет собой полином третьей степени вида (3.6). Причем коэффициенты полинома зависят от f не только через коэффициент a_3 , но и через параметр ν , который тоже зависит от f в силу метода получения величины ω_m . В таблице 1 представлены значения коэффициентов полинома (3.6) в зависимости от f . Видно, например, что коэффициент a_0 становится положительным при $f > 10$, а коэффициент a_1 остается отрицательным во всем диапазоне выбранных значений параметра f .

Вместе с тем многочлен третьей степени имеет по крайней мере один действительный корень. Кроме того,

$$\begin{aligned} y_r(0) &= Ga_0 = G[\nu(\alpha - 6\nu) + (18\nu - \alpha)a_3^2 - 6a_3^4], \\ y_r'(0) &= Ga_1 = G[a_3(\alpha - 12\nu + 6a_3^2)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Следовательно, учитывая общий характер поведения функции $\omega_m(f)$, можно сделать вывод, что для коэффициента трения в диапазоне $0 < f < 10$ значения функции $y_r(\kappa)$ при $\kappa = 1/2$ могут существенно различаться из-за изменения $\omega_m(f)$. Затем при увеличении f эти различия начнут практически исчезать (см. рис. 6), и на некотором интервале малых значений коэффициента f

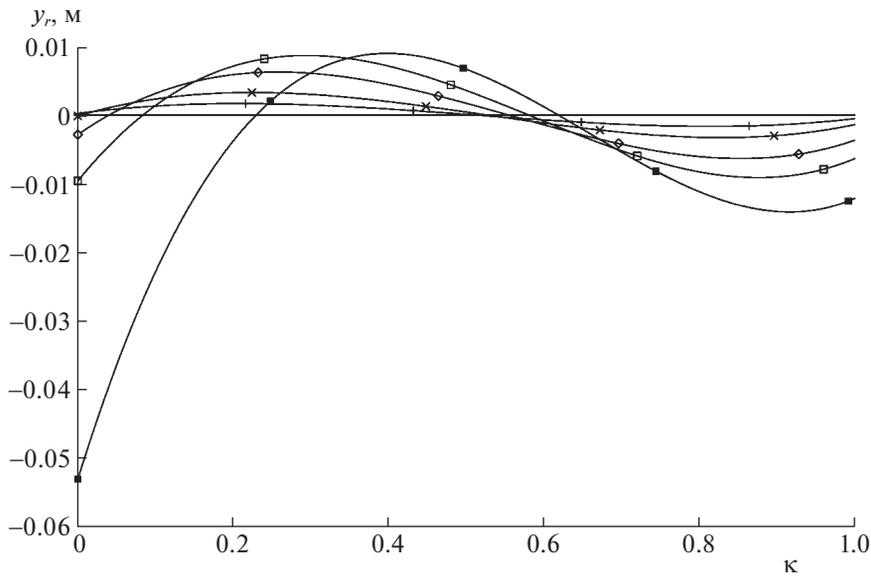


Рис. 8. Зависимости $y_r(\kappa)$ для больших значений коэффициента f : $f = 50$ (+), $f = 100$ (×), $f = 200$ (◊), $f = 300$ (□), $f = 500$ (■).

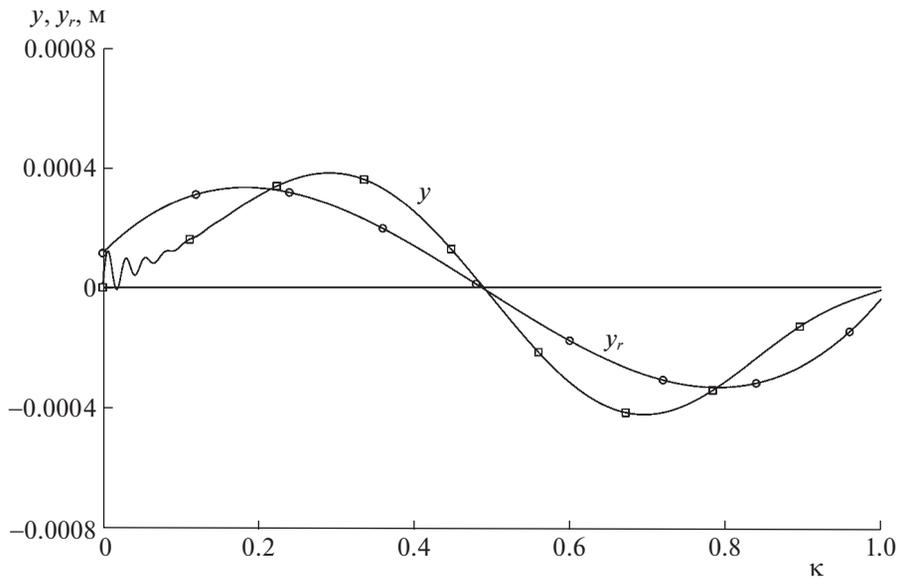


Рис. 9. Зависимости $u(\kappa)$ и $y_r(\kappa)$ для $f = 10 \text{ c}^{-1}$.

значение $y_r(1/2)$ будет оставаться почти постоянным из-за того, что в выражение для $y_r(1/2)$ коэффициент a_3 входит со степенями выше первой.

На рис. 7 показаны графики функции $y_r(\kappa)$ для малых значений коэффициента демпфирования f , подтверждающие сказанное.

При дальнейшем увеличении коэффициента f значения $y_r(1/2)$ снова начнут увеличиваться (см. рис. 8), а потом, как это следует из первой формулы (3.9), достигнув максимума, станут убывать. Аналогичные эффекты можно обнаружить на рис. 4 и 5, что говорит о том, что частное решение приближенного уравнения (3.1) верно ухватывает основные качественные особенности деформации бруса.

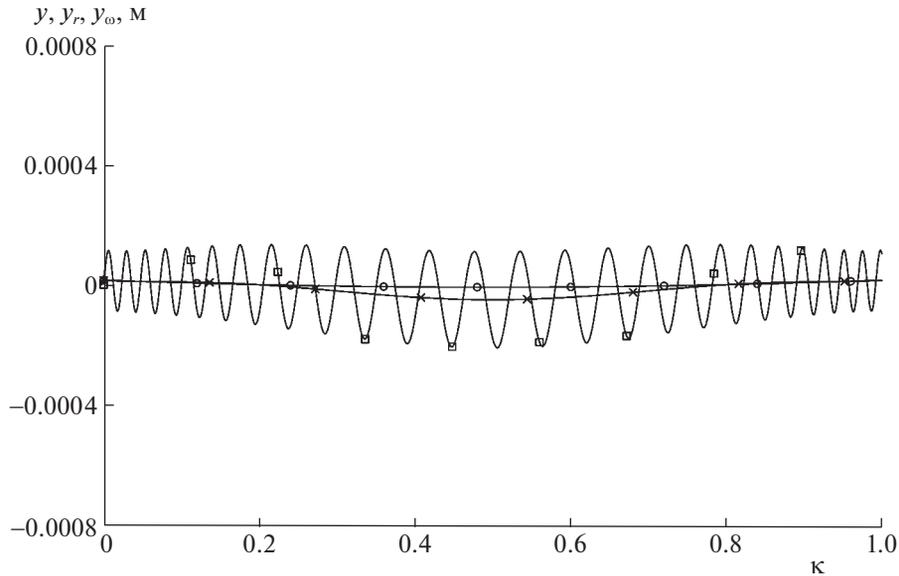


Рис. 10. Зависимости $y(k)$, $y_r(k)$ и $y_\omega(k)$ для $f = 0$: $y \leftrightarrow \square$, $y_r \leftrightarrow \circ$, $y_\omega \leftrightarrow \times$.

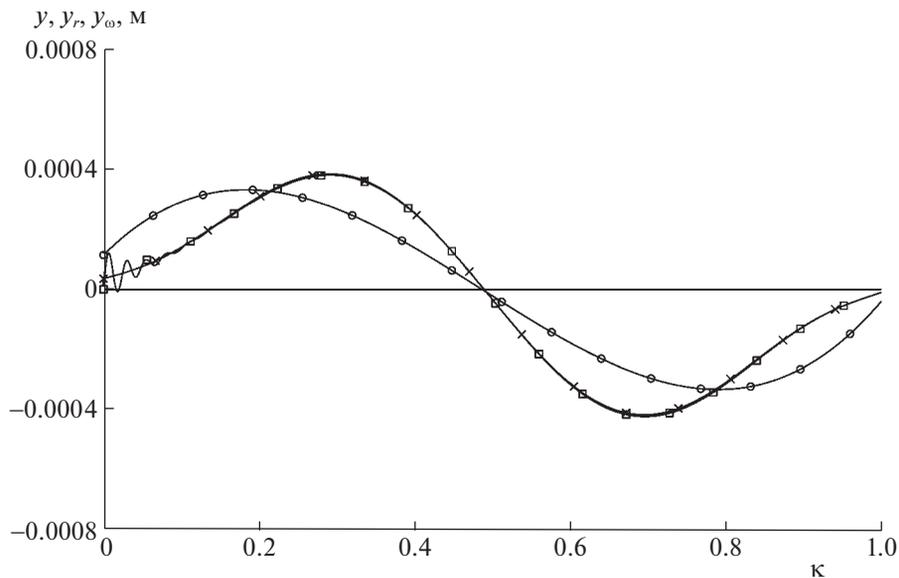


Рис. 11. Зависимости $y(k)$, $y_r(k)$ и $y_\omega(k)$ для $f = 10 \text{ с}^{-1}$: $y \leftrightarrow \square$, $y_r \leftrightarrow \circ$, $y_\omega \leftrightarrow \times$.

Из второй формулы (3.9) видно, что если $\alpha < 6\nu$, то при малых $f \neq 0$ будет выполнено $y_r(0) < 0$, а тогда и подавно будет верно $y_r' < 0$. Поскольку $y_r(\xi)$ представляет собой многочлен третьей степени с $a_3 > 0$, можно заключить, что функция $y_r(k)$ имеет два экстремума, причем максимум соответствует меньшим значениям параметра k . Этот эффект также виден на рис. 4 и 5.

Вместе с тем если сопоставить графики на рис. 4 и 7, а также на рис. 5 и 8, то для соответствующих значений f можно заметить расхождение как по величине экстремумов, так и по их расположению на оси k . Например, эти расхождения хорошо видны на рис. 9 и в значительной мере связаны с тем, что при расчете зависимости $y_r(k)$ задавалось постоянное значение ω_m в соответствии с правилом (3.3).

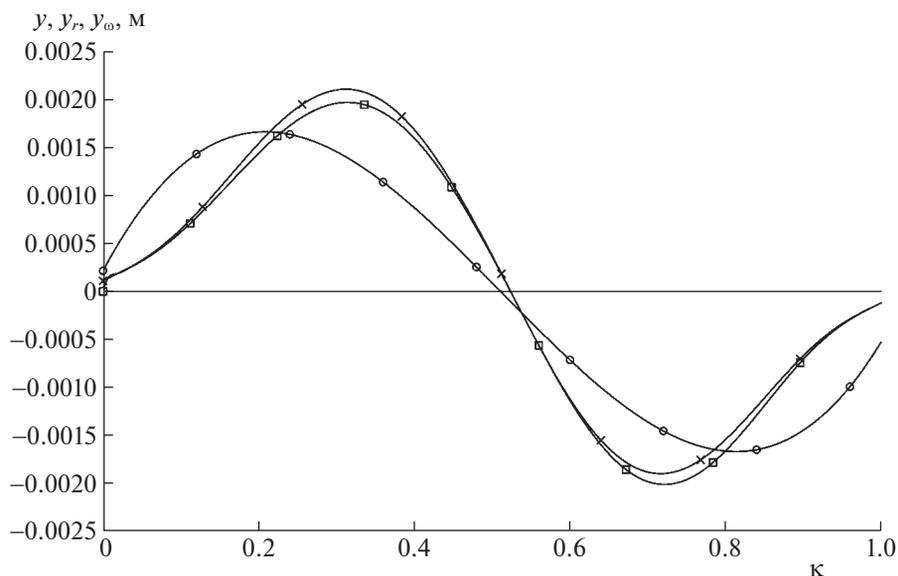


Рис. 12. Зависимости $y(\kappa)$, $y_r(\kappa)$ и $y_\omega(\kappa)$ для $f = 50 \text{ c}^{-1}$: $y \leftrightarrow \square$, $y_r \leftrightarrow \circ$, $y_\omega \leftrightarrow \times$.

Решение $y_r(\xi)$ можно существенно улучшить, если коэффициенты a_0, a_1, a_2 вычислять по формулам (3.8), а коэффициенты v и a_3 рассчитывать в соответствии с выражениями

$$a_3 = \frac{fv}{\omega^2 l}, \quad v = \frac{v^2}{\omega^2 l^2}, \tag{3.10}$$

где $\omega = \omega(\xi) = 1/(\sqrt{m\delta_f})$ – “правильное” значение круговой частоты.

Другими словами, все коэффициенты в формуле (3.6) будут теперь зависеть от ξ :

$$y_\omega = G[a_3(\xi)\xi^3 + a_2(\xi)\xi^2 + a_1(\xi)\xi + a_0(\xi)], \tag{3.11}$$

где коэффициенты $a_i(\xi)$, $i = 0, 3$, следует вычислять по формулам (3.8), (3.10). На рис. 10 видно, что функция $y_\omega(\kappa)$ при отсутствии диссипации лучше отслеживает среднюю линию колебаний бруса, чем функция $y_r(\kappa)$. Рисунок 11 свидетельствует, что при наличии диссипации функция y_ω существенно лучше приближает асимптотику точного решения $y(\kappa)$, чем функция $y_r(\kappa)$. Это свойство уверенно выполняется для всех значений $f \in [0; 10 \text{ c}^{-1}]$ и достаточно хорошо выполняется для значений $f \in (10; 50 \text{ c}^{-1}]$ (см. рис. 12). Для значений $f > 50 \text{ c}^{-1}$ ошибка аппроксимации для функции $y_\omega(\kappa)$ увеличивается, но все же остается существенно меньше, чем для функции $y_r(\kappa)$.

Заключение. Установлена зависимость коэффициента упругости бруса от положения на ней моноколеса и параметров конструкции системы. В предположениях о точечном контакте моноколеса и бруса и об отсутствии проскальзывания в точке контакта построена приближенная математическая модель движения системы с учетом основной моды колебаний бруса и вязкого сопротивления скорости деформации. Для возможности аналитического исследования закономерностей движения найдена и верифицирована приближенная конечная формула, верно отражающая основные качественные и с хорошей точностью количественные особенности поведения точки контакта колеса с брусом. Выполнено компьютерное исследование динамики системы для реалистичного набора параметров. По результатам исследования можно сделать следующие выводы.

1. Учет деформации грунта в точках опоры бруса позволяет регуляризовать задачу о движении колеса по деформируемому брусом и избежать особенностей в уравнениях движения системы.

2. Принятые предположения о точечном контакте колеса с брусом и о безотрывном качении колеса по брусу выполняются в диапазоне изменения параметров, принятом в данной работе.

3. Установлено, что при квазистатическом качении колеса по брусу средний прогиб бруса под колесом оказывается симметричным относительно середины бруса. При увеличении скорости и (или) коэффициента диссипации указанная симметрия нарушается таким образом, что вначале движения средний прогиб бруса становится меньше квазистатического, а на завершающих этапах движения – больше. Однако это не приводит к нарушению предположений, принятых в данной работе.

4. Приближенная формула для усредненного прогиба бруса под колесом в процессе его движения при наличии диссипации дает для принятых в работе значений параметров системы и коэффициента вязкого сопротивления в пределах $0 \leq f \leq 50 \text{ с}^{-1}$ относительную погрешность приближения, которая монотонно возрастает от 0 и не превосходит ~ 0.1 .

5. Полученные в работе общие формулы справедливы не только для переправы в форме бруса, но также и для однородной балки, сделанной из любого материала, и постоянного сечения любой формы вдоль ее длины. Форма поперечного сечения и материал бруса учитываются лишь при подсчете жесткости бруса *EJ*. Деревянный брус в работе был выбран для численных экспериментов в качестве примера наиболее распространенного строительного материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моноколесо. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Моноколесо> (дата обращения: 25.09.2022).
2. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. Изд. 2-е перераб. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
3. Гнездилов В.А. Проектирование и изготовление металлоконструкций для сложных механизированных аттракционов // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2000. № 6.
4. Русских С.В. Колебания упругой направляющей балки с движущимся по ней реактивным снарядом // Изв. вузов. Авиационная техника. 2014. № 1. С. 80.
5. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. О качении моноколеса по деформируемому брусу, лежащему на двух опорах // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023. № 1. 25 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-1>
6. Stokes G.G. Discussion of a Differential Equation Relating to the Breaking of Railway Bridges // Mathematical and Physical Papers. 1883. V. II. P. 178–220.