
**ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ**

УДК 62-50

**ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
ГИБРИДНОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ 4-ГО ПОРЯДКА**

© 2023 г. Ю. В. Морозов^{a,*}, А. В. Пестерев^{a,**}

^a*ИПУ РАН, Москва, Россия*

^{*}*e-mail: tot1983@inbox.ru*

^{**}*e-mail: alexanderpesterev.ap@gmail.com*

Поступила в редакцию 03.11.2022 г.

После доработки 23.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Исследуемая гибридная аффинная система возникает при применении импульсного управления специального вида к цепочке четырех интеграторов. Цель управления – стабилизировать систему в начале координат так, чтобы система приближалась к состоянию равновесия по заданной желаемой (целевой) траектории. Целевая траектория определена неявно как траектория интегратора второго порядка, стабилизируемого с помощью обратной связи в виде вложенных сатураторов. Задача исследования – найти диапазон изменения коэффициентов обратной связи, при которых система глобально устойчива. Показано, что задача сводится к более простой задаче установления устойчивости линейной системы второго порядка с переключениями с зависящим от состояния законом переключений. Доказано, что последняя устойчива при любом законе переключений.

DOI: 10.31857/S0002338823040108, EDN: OCWYZV

Введение. Гибридными системами называют динамические системы, которые демонстрируют как непрерывное, так и дискретное поведение, т.е. системы, состояния которых могут меняться не только непрерывно, но и скачками [1]. Исследуемая в статье гибридная аффинная система возникает при применении импульсного управления специального вида для стабилизации цепочки четырех интеграторов. Задача стабилизации цепочек интеграторов широко обсуждалась в литературе в течение нескольких последних десятилетий (например, [2–6] и приведенные там ссылки). Интерес к данной проблематике обусловлен тем, что управления, разработанные для цепочек интеграторов, легко обобщаются на более широкие классы систем [5]. Более того, во многих приложениях исходные модели, например модели механических планарных систем, заданы в виде цепочек интеграторов.

Задачей настоящего исследования было нахождение управления, глобально стабилизирующего интегратор 4-го порядка, при дополнительном условии асимптотического следования вдоль желаемой траектории при приближении к состоянию равновесия. Целевая траектория определена неявно как траектория более простой эталонной системы 2-го порядка, расширенная до четырехмерного пространства. В качестве эталонной системы рассматривается цепочка двух интеграторов, замкнутая заданной обратной связью в виде вложенных сатураторов с коэффициентами обратной связи, выбранными так, чтобы обеспечить желаемые характеристики целевой траектории. Искомая обратная связь, обеспечивающая глобальную стабилизацию интегратора 4-го порядка, получена в виде суммы кусочно-непрерывного и импульсного управления. Показано, что система, замкнутая такой обратной связью, является гибридной аффинной системой.

Настоящая публикация не претендует на разработку общего метода или инструмента для исследования гибридных систем и/или систем с переключениями. Рассматривается конкретная, нетривиальная гибридная аффинная система. Цель работы – установить условия ее глобальной устойчивости. Так как система нелинейна, к ней неприменимы хорошо известные методы исследования линейных систем, основанные, например, на критериях Михайлова и Рауса–Гурвица. Известные же методы исследования устойчивости нелинейных систем напрямую неприменимы к гибридным системам и системам с переключениями, для которых разработан ряд специ-

альных методов [1, 7–9]. Однако ни один из обсуждаемых в цитированной выше литературе методов оказался неприменим к рассмотренной в статье гибридной аффинной системе. Полученное доказательство глобальной устойчивости основано на сведении исходной задачи к исследованию устойчивости более простой системы 2-го порядка с переключениями. Цель статьи, таким образом, состоит в следующем: 1) разработать новый закон управления, стабилизирующий интегратор 4-го порядка; 2) показать, что замкнутая система является гибридной системой; 3) исследовать глобальную устойчивость полученной гибридной системы.

В разд. 1 статьи формулируется задача стабилизации интегратора 4-го порядка при дополнительном условии асимптотического следования вдоль заданной траектории и предлагается обратная связь, обеспечивающая желаемые характеристики процесса перехода к состоянию равновесия. Показано, что система, замкнутая такой обратной связью, является гибридной аффинной системой с зависящим от состояния законом переключения. Главный результат работы представлен в разд. 1. Исследование устойчивости рассматриваемой гибридной системы сведено к исследованию устойчивости линейной системы 2-го порядка с переключениями. Доказательство устойчивости последней при любых законах переключения, что гарантирует глобальную устойчивость исходной системы, приведено в Приложении, где также доказан вспомогательный результат о глобальной устойчивости интегратора 2-го порядка, замкнутого обратной связью в виде вложенных сатураторов. В разд. 3 приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующих изложение.

1. Постановка задачи. Постановку задачи разобьем на два этапа.

1.1. Стабилизация интегратора 4-го порядка. Рассмотрим интегратор 4-го порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = U(x), \quad (1.1)$$

где $x \equiv [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, и поставим задачу нахождения управления $U(x)$, стабилизирующего систему в начале координат и при этом обеспечивающего желаемое асимптотическое поведение траектории системы. Для более точной формулировки последнего условия рассмотрим вспомогательную задачу стабилизации интегратора 2-го порядка:

$$\dot{w}_1 = w_2, \quad \dot{w}_2 = U_1(w_1, w_2), \quad w_1(0) = x_1(0), \quad w_2(0) = x_2(0) \quad (1.2)$$

с помощью непрерывного управления U_1 , обеспечивающего экспоненциальное убывание отклонения $w_1(t)$ в окрестности нуля с заданной скоростью (показателем экспоненты) λ при дополнительных ограничениях

$$|U_1(w_1, w_2)| \leq U_{\max}, \quad |w_2(t)| \leq V_{\max}. \quad (1.3)$$

Для стабилизации системы (1.2) применим негладкую обратную связь U_1 в виде вложенных сатураторов:

$$U_1(w_1, w_2) = -k_4 \text{sat}(k_3(w_2 + k_2 \text{sat}(k_1 w_1))), \quad (1.4)$$

где $\text{sat}(\cdot)$ – функция насыщения: $\text{sat}(w) = w$ при $|w| \leq 1$ и $\text{sat}(w) = \text{sign}(w)$ при $|w| > 1$. Ограничения (1.3) выполняются, если положить $k_4 = U_{\max}$ и $k_2 = V_{\max}$, а желаемое значение экспоненциальной скорости убывания отклонения λ обеспечивается соответствующим выбором коэффициентов k_1 и k_3 [10]. Систему (1.2), (1.4) будем называть *эталонной системой*.

Вблизи нуля система (1.2), (1.4) линейна: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -k_1 k_2 k_3 k_4 x_1 - k_3 k_4 x_2$ и имеет в нуле устойчивое положение равновесия при любых $k_i > 0$, $i = 1, 4$. Если $k_3 k_4 < 4k_1 k_2$, то $x = 0$ – фокус; иначе – узел. Последний случай представляется более практичным, так как не приводит к осцилляциям вокруг нуля, поэтому далее будем считать, что коэффициенты контроллера удовлетворяют неравенству $k_3 k_4 \geq 4k_1 k_2$.

Обратные связи в виде вложенных сатураторов применялись в ряде работ по стабилизации цепочек интеграторов ([2, 3, 10–13] и приведенные там ссылки). Однако авторам не известны работы, результаты которых могли бы быть использованы для установления устойчивости системы (1.2), (1.4). Общий случай n -мерного интегратора обсуждается, например, в [2, 3]. Глобальная устойчивость системы, замкнутой обратной связью в виде n вложенных сатураторов, при этом была доказана только для случая, когда предельные значения вложенных функций насыщения удовлетворяют определенным неравенствам [2], Theorem 2.1, которые не выполняются для обратной связи (1.4). В [11, 12] для стабилизации интегратора 2-го порядка применяется обратная

связь вида (1.4), отличающаяся от (1.4) тем, что аргументом внутреннего сатуратора является скорость w_2 , а не отклонение w_1 , как в (1.4) (в [12] аргумент внешнего сатуратора дополнительно зависит от квадрата скорости w_2^2). Доказательство глобальной устойчивости в обеих работах основано на существовании функции Ляпунова в виде суммы квадратичного и интегрального членов. Для системы (1.2), (1.4), однако, указанный прием не применим, так как функцию Ляпунова такого вида не удастся найти.

Условия глобальной устойчивости системы (1.2), (1.4) сформулированы в следующей лемме, доказательство которой приведено в Приложении.

Л е м м а 1. Пусть $k_i > 0, i = \overline{1,4}$ и $k_3 k_4 \geq 4k_1 k_2$. Тогда система (1.2), замкнутая обратной связью (1.4), глобально устойчива.

Чтобы уменьшить количество параметров, будем выбирать коэффициенты k_1 и k_3 в (1.4) при заданных значениях ресурса управления k_4 и максимальной скорости k_2 из однопараметрического семейства, параметризованного показателем λ :

$$k_1 = \lambda/2k_2, \quad k_3 = 2\lambda/k_4, \quad \lambda > 0. \quad (1.5)$$

При таком выборе коэффициентов характеристическое уравнение системы (1.2), (1.4) имеет два одинаковых корня: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda$, т.е. начало координат является устойчивым вырожденным узлом, а система (1.2), (1.4) в окрестности нуля принимает вид

$$\dot{w}_1 = w_2, \quad \dot{w}_2 = -\lambda^2 w_1 - 2\lambda w_2. \quad (1.6)$$

Кроме того, без потери общности положим далее $U_{\max} = 1$ и $V_{\max} = 1$ ($k_4 = k_2 = 1$).

Возвращаясь теперь к исследуемой системе (1.1), наложим на ее решение дополнительное условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = U_1(x_1(t), x_2(t)), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_4(t) = \dot{U}_1(x_1(t), x_2(t)) \quad (1.7)$$

и будем искать стабилизирующее управление для интегратора 4-го порядка в виде

$$U(x) = \ddot{U}_1(x_1, x_2) + \beta_1(U_1(x_1, x_2) - x_3) + \beta_2(\dot{U}_1(x_1, x_2) - x_4), \quad (1.8)$$

где $\beta_1, \beta_2 > 0$, \dot{U}_1 и \ddot{U}_1 – производные функции U_1 в силу системы (1.2). Требование (1.7) формализует наше желание получить такое решение системы (1.1), первые две компоненты которого $x_1(t)$ и $x_2(t)$ ведут себя аналогично компонентам решения уравнения 2-го порядка (1.2).

Как и в случае коэффициентов k_1 и k_3 , ограничимся для простоты выбором β_1 и β_2 из однопараметрического семейства и при этом масштабируем их с помощью показателя λ [14]:

$$\beta_1 = (\lambda\xi)^2, \quad \beta_2 = 2\lambda\xi, \quad \xi > 0,$$

уменьшив таким образом количество параметров до двух: λ и ξ . Далее докажем, что обратная связь (1.8) стабилизирует интегратор 4-го порядка, и определим диапазон изменения параметров λ и ξ , для которых замкнутая система (1.1), (1.8) глобально устойчива и при этом выполняются условия (1.7). Покажем сначала, что система (1.1), (1.8) является гибридной аффинной системой.

1.2. Эквивалентная гибридная аффинная система. Рассмотрим разбиение плоскости (x_1, x_2) на три множества (рис. 1). Ко множеству D_1 отнесем все точки, в которых оба сатуратора не насыщены:

$$D_1 = \{(x_1, x_2): |x_1| < 1/k_1, |x_2 + k_1 x_1| < 1/k_3\}$$

(наклонная полоса, ограниченная пунктирными линиями на рис. 1). Множество D_2 состоит из точек, в которых насыщен внутренний сатуратор, а внешний сатуратор не достигает насыщения:

$$D_2 = \{(x_1, x_2): |x_1| \geq 1/k_1, |x_2 + \text{sign}(x_1)| < 1/k_3\}$$

(две горизонтальные полосы на рис. 1). Множество

$$D_3 = \{(x_1, x_2): |x_2 + \text{sat}(k_1 x_1)| > 1/k_3\}$$

включает в себя все точки, в которых достигает насыщения внешний сатуратор, т.е. $U_1(x_1, x_2) \equiv \pm 1$. Границу между всеми тремя множествами обозначим Γ : $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \Gamma = R^2$.

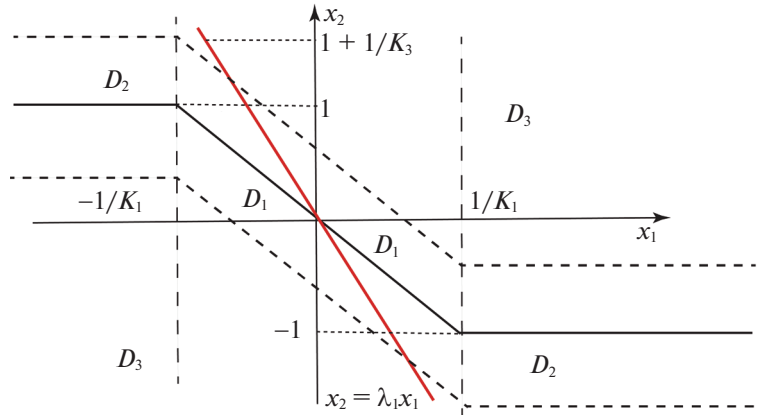


Рис. 1. Разбиение фазовой плоскости на множества D_1 , D_2 и D_3 .

Из формулы (1.4) с учетом (1.5) видно, что U_1 – кусочно-линейная функция:

$$U_1 = \begin{cases} -\lambda^2 x_1 - 2\lambda x_2, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ -2\lambda(x_2 + \text{sign}(x_1)), & (x_1, x_2) \in D_2, \\ -\text{sign}(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1)), & (x_1, x_2) \in D_3. \end{cases}$$

Производные U_1 в силу системы (1.2) определены формулами

$$\dot{U}_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} U_1, \quad \ddot{U}_1 = \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} U_1$$

и на множествах D_i , $i = \overline{1, 3}$, принимают вид:

$$\dot{U}_1 = \begin{cases} 2\lambda^3 x_1 + 3\lambda^2 x_2, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ 4\lambda^2(x_2 + \text{sign}(x_1)), & (x_1, x_2) \in D_2, \\ 0, & (x_1, x_2) \in D_3, \end{cases}$$

$$\ddot{U}_1 = \begin{cases} -3\lambda^4 x_1 - 4\lambda^3 x_2, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ -8\lambda^3(x_2 + \text{sign}(x_1)), & (x_1, x_2) \in D_2, \\ 0, & (x_1, x_2) \in D_3. \end{cases}$$

Подставляя выражения для U_1 , \dot{U}_1 и \ddot{U}_1 в уравнение замкнутой системы (1.1), (1.8), получаем аффинную систему с переключениями:

$$\dot{x} = A_{\sigma(x)}(\lambda, \xi)x + b_{\sigma(x)}(\lambda, \xi), \quad \sigma(x) \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.9)$$

где A_1, A_2, A_3 и b_1, b_2, b_3 – постоянные матрицы и векторы соответственно:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^4 c_1(\xi) & -\lambda^3 c_2(\xi) & -\lambda^2 \xi^2 & -2\lambda \xi \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\lambda^3 c_3(\xi) & -\lambda^2 \xi^2 & -2\lambda \xi \end{bmatrix}, \quad b_2 = -2\lambda^3 c_3(\xi) \text{sign}(x_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \xi^2 & -2\lambda \xi \end{bmatrix}, \quad b_3 = -\lambda^2 \xi^2 \operatorname{sign}(x_2 + \operatorname{sat}(\lambda x_1/2)) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и $c_1(\xi) = (\xi - 3)(\xi - 1)$, $c_2(\xi) = 2(\xi - 2)(\xi - 1)$, $c_3(\xi) = (\xi - 2)^2$.

Переключения между системами зависят от состояния, согласно закону

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_1 \times R^2, \\ 2, & x \in D_2 \times R^2, \\ 3, & x \in D_3 \times R^2. \end{cases} \quad (1.10)$$

Так как \dot{U}_1 меняется скачком при пересечении границы Γ , функция \dot{U}_1 претерпевает разрыв второго рода в этот момент, а управление $U(x)$ имеет как кусочно-непрерывную, так и импульсную составляющие. На множестве $\Gamma \times R^2$ (jump set [1]) вектор состояния меняется скачком, так что отображение (1.9) (flow map [1]) следует дополнить отображением

$$x^+ = x^- + \Delta \dot{U}_1(x_1, x_2)q, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad (1.11)$$

(jump map [1]), где x^- и x^+ – значения вектора состояния до и после скачка соответственно, $q = [0, 0, 0, 1]^T$ и $\Delta \dot{U}_1(x_1, x_2)$ – скачок функции $\dot{U}_1(x_1, x_2)$ при пересечении траекторией границы Γ .

Таким образом, представления (1.1), (1.8) и (1.9), (1.11) эквивалентны, т.е. замкнутая система (1.1), (1.8) является гибридной, и исследование ее устойчивости сводится к исследованию глобальной устойчивости системы (1.9), (1.11).

2. Доказательство глобальной устойчивости. Легко видеть, что области D_2 и D_3 не включают начала координат и вторая и третья системы в (1.9) не имеют стационарных положений равновесия. Следовательно, необходимым условием устойчивости начала координат является гурвицевость матрицы A_1 . Вычисляя характеристический полином A_1 и применяя критерий Раussa–Гурвица или Льенара–Шипарда [15], нетрудно доказать что эта матрица гурвицева при любых $\lambda > 0$ и $\xi > 3$. Далее будет показано, что эти условия не только необходимы для глобальной устойчивости системы (1.9), но и достаточны. Для этого сначала будет показано, что задача исследования устойчивости рассматриваемой гибридной системы 4-го порядка сводится к исследованию устойчивости системы 2-го порядка с переключениями. Затем будет доказано, что последняя устойчива при любом законе переключения.

2.1. Сведение исследования устойчивости гибридной системы 4-го порядка к исследованию устойчивости системы 2-го порядка с переключениями. Для начала избавимся от разрывной переменной x_4 , введя новые переменные состояния δ_1 и δ_2 вместо x_3 и x_4 :

$$\delta_1 = U_1(x_1, x_2) - x_3, \quad \delta_2 = \dot{U}_1(x_1, x_2) - x_4.$$

Так как скачки \dot{U}_1 и x_4 при пересечении границы $\Gamma \times R^2$ компенсируют друг друга, переменная δ_2 непрерывна, так что ее можно дифференцировать в обычном смысле. Введем обозначения dU_1/dt и $d\dot{U}_1/dt$ для производных функций U_1 и \dot{U}_1 в силу системы (1.1), сохранив обозначения с помощью точки над символом для производных этих функций в силу системы (1.2). Для производных δ_1 и δ_2 в силу (1.1) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= \frac{d}{dt} U_1 - \dot{x}_3 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} x_3 - x_4 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} U_1 - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} U_1 = \dot{U}_1 - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} [U_1(x_1, x_2) - x_3] - x_4, \\ \dot{\delta}_2 &= \frac{d}{dt} \dot{U}_1 - \dot{x}_4 = \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} x_3 - \dot{x}_4 + \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} U_1 - \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} U_1 = \\ &= \ddot{U}_1 - \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} [U_1(x_1, x_2) - x_3] - \ddot{U}_1 - \beta_1 \delta_1 - \beta_2 \delta_2. \end{aligned}$$

Перепишывая (1.9) в новых переменных, получаем

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = U_1(x_1, x_2) - \delta_1, \quad (2.1)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial U_1}{\partial x_2} & 1 \\ -\left(\frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} + \lambda^2 \xi^2\right) & -2\lambda \xi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Из (2.1) видно, что компоненты решения x_1, x_2 стремятся к решению эталонной системы (1.2) тогда и только тогда, когда δ_1 стремится к нулю. Это условие выполняется, когда нулевое решение δ -подсистемы (2.2) глобально устойчиво. Принимая во внимание, что частные производные U_1 и \dot{U}_1 не зависят от x :

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \begin{cases} -2\lambda, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ -2\lambda, & (x_1, x_2) \in D_2, \\ 0, & (x_1, x_2) \in D_3, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} = \begin{cases} 3\lambda^2, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ 4\lambda^2, & (x_1, x_2) \in D_2, \\ 0, & (x_1, x_2) \in D_3, \end{cases}$$

видим, что δ -подсистема представляет из себя линейную систему с переключениями:

$$\dot{\delta} = C_{i(x)}\delta, \quad i(x) \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.3)$$

где $\delta = [\delta_1, \delta_2]^T$ и C_i – постоянные матрицы:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2\lambda & 1 \\ -\lambda^2(\xi^2 + 3) & -2\lambda\xi \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2\lambda & 1 \\ -\lambda^2(\xi^2 + 4) & -2\lambda\xi \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2\xi^2 & -2\lambda\xi \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

а закон переключения $i(x)$ зависит от состояния x -подсистемы: $i(x) = k$, когда $(x_1, x_2) \in D_k$.

2.2. Устойчивость системы 2-го порядка с переключениями. Хотя матрицы C_i в правой части (2.3) не зависят от переменных x_1 и x_2 , решение δ -подсистемы (2.3) зависит от динамики x -подсистемы, так как от состояния x -подсистемы зависят моменты переключения в (2.3). Тем не менее, оказывается, что динамика x -подсистемы не влияет на устойчивость системы (2.3). А именно справедлива следующая лемма, доказательство которой приведено в Приложении.

Л е м м а 2. Система с переключениями (2.3) устойчива при любых законах переключения тогда и только тогда, когда $\lambda > 0$ и $\xi > 3$.

Устойчивость системы (2.3) при произвольных переключениях означает, что она устойчива и при любом зависящем от состояния законе переключения. Следовательно, условия $\lambda > 0$ и $\xi > 3$ достаточны для глобальной устойчивости гибридной системы (1.9), (1.11). Принимая во внимание, что, как установлено в начале данного раздела, эти условия необходимы для глобальной устойчивости, получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а. Нулевое решение гибридной системы (1.9), (1.11) глобально устойчиво тогда и только тогда, когда $\lambda > 0$ и $\xi > 3$.

3. Численные примеры. С целью иллюстрации рассмотрим стабилизацию интегратора 4-го порядка с помощью обратной связи (1.8) с параметрами $\lambda = 1.5$ и $\xi = 4.0$ ($\beta_1 = 36$ и $\beta_2 = 12$). Предельные значения управления и скорости эталонной системы с обратной связью (1.4) были

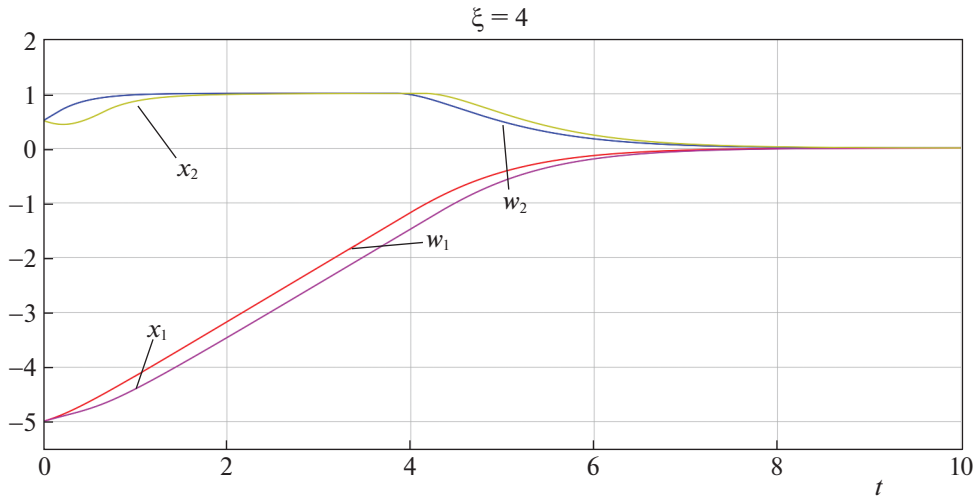


Рис. 2. Графики отклонений и скоростей (x_1, x_2) и (w_1, w_2) исследуемой и эталонной систем ($\xi = 4.0$).

принятыми равными единице: $k_2 = k_4 = 1$, а значения $k_1 = 0.75$ и $k_3 = 3.0$ двух других коэффициентов выбраны так, чтобы обеспечить целевую экспоненциальную скорость убывания отклонения $\lambda = 1.5$.

Рисунки 2 и 3 демонстрируют графики переменных состояния для начальных условий $x_1(0) = -5.0$, $x_2(0) = 0.5$, $x_3(0) = -0.5$ и $x_4 = -1.0$. Начальные невязки, таким образом, равны $\delta_1(0) = U_1(x_1(0), x_2(0)) - x_3(0) = 1.5$ и $\delta_2(0) = \dot{U}_1(x_1(0), x_2(0)) - x_4(0) = 1.0$. На рис. 2 показаны отклонения и скорости (x_1, x_2) и (w_1, w_2) исследуемой и эталонной систем, а на рис. 3 для сравнения представлены переменные x_3 и x_4 и функции $U_1(x_1, x_2)$ и $\dot{U}_1(x_1, x_2)$. Видно, что невязки δ_1 и δ_2 быстро убывают и становятся практически равными нулю при $t > t_d \approx 3$. Первые две компоненты вектора состояния интегратора 4-го порядка ведут себя аналогично переменным состояния интегратора 2-го порядка в том смысле, что графики одного из них могут быть получены из графиков другого сдвигом вдоль оси времени: $x_i(t) \approx w_i(t - t_d)$, $i = 1, 2$, for $t > t_d$ (рис. 2). Время задержки t_d зависит как от параметров λ и ξ , так и от начальных условий.

Наконец, для демонстрации отсутствия устойчивости нулевого решения при $\xi \leq 3$ на рис. 4 показаны графики x_1 и x_2 для $\xi = 2.0$. Из рисунка видно, что система останавливается на некотором расстоянии от начала координат.

Заключение. Рассмотрена задача стабилизации цепочки четырех интеграторов при дополнительном условии следования вдоль целевой траектории вблизи состояния равновесия. Целевая траектория определена неявно как траектория эталонной системы. В качестве эталонной системы взят интегратор 2-го порядка, стабилизируемый с помощью обратной связи в виде вложенных сатураторов. Предложен новый закон управления в виде комбинации кусочно-непрерывной и импульсной составляющих. Показано, что система, замкнутая таким законом управления, является гибридной аффинной системой и что задача исследования ее устойчивости сводится к исследованию устойчивости более простой системы 2-го порядка с переключениями. Определена область значений параметров обратной связи, обеспечивающих глобальную устойчивость исследуемой системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Доказательство не зависит от конкретных значений ресурса управления (k_4) и максимальной скорости (k_2). Поэтому без потери общности положим их равными единице. При замыкании системы (1.2) обратной связью (1.4) получаем кусочно-линейную систему, определенную уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_3 k_1 x_1 - k_3 x_2 \tag{П.1}$$

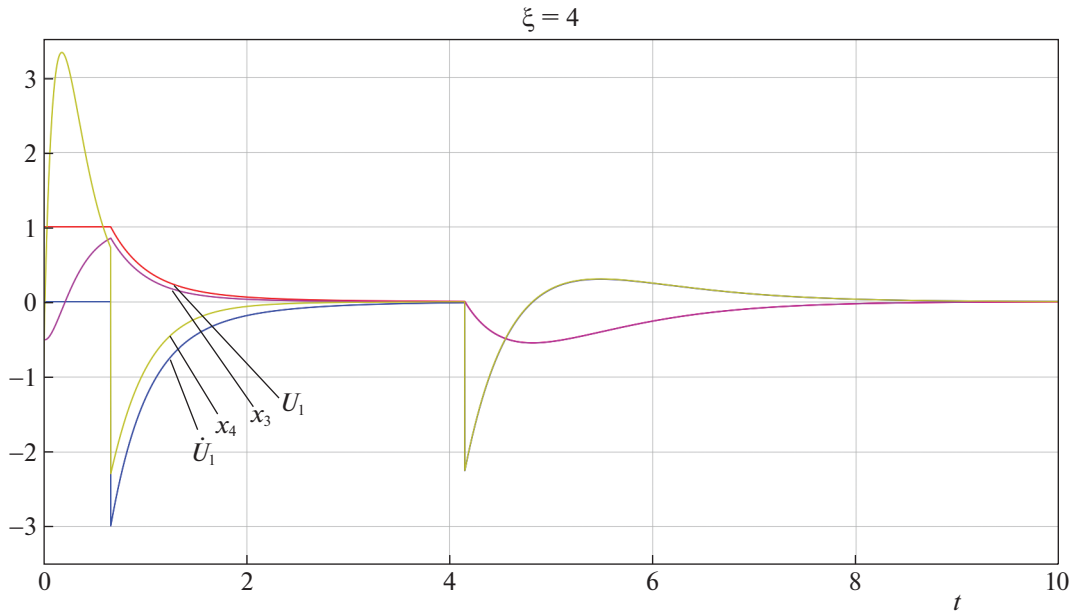


Рис. 3. Графики переменных x_3 и x_4 и функций $U_1(x_1, x_2)$ и $\dot{U}_1(x_1, x_2)$ ($\xi = 4.0$).

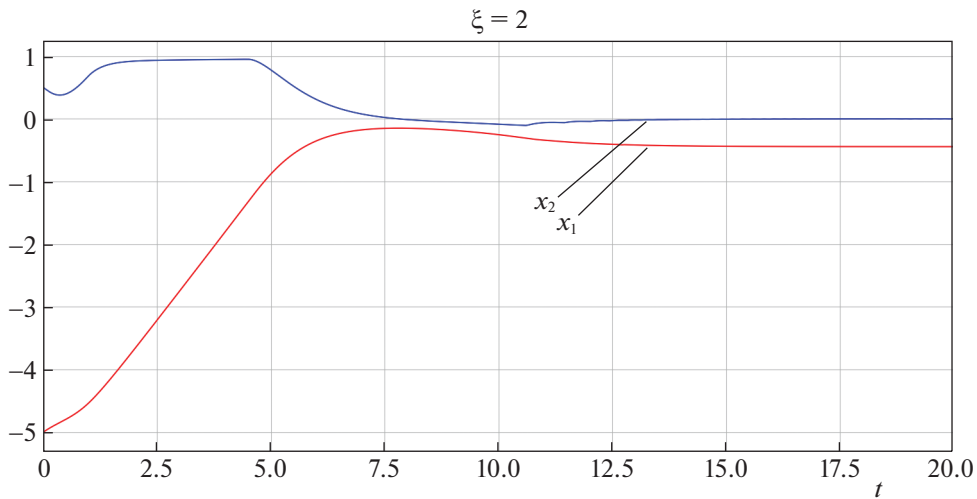


Рис. 4. Графики отклонения x_1 и скорости x_2 при $\xi = 2.0$.

в области D_1 и уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_3(x_2 + \text{sign}(x_1)), \tag{П.2}$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\text{sign}(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1)) \tag{П.3}$$

в D_2 и D_3 соответственно. Условие леммы означает, что начало координат является устойчивым узлом уравнения (П.1). Пусть корни характеристического уравнения равны $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$, где $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$.

Доказательство леммы основано на хорошо известном факте из теории динамических систем 2-го порядка [16]. Множество ω -предельных точек (т.е. предельных точек положительных полутраекторий) ограниченных траекторий системы может состоять только из точек равновесия, траекторий, соединяющих точки равновесия, и замкнутых траекторий. Так как рассматриваемая система имеет единственную точку равновесия (устойчивый узел в начале координат) требуется

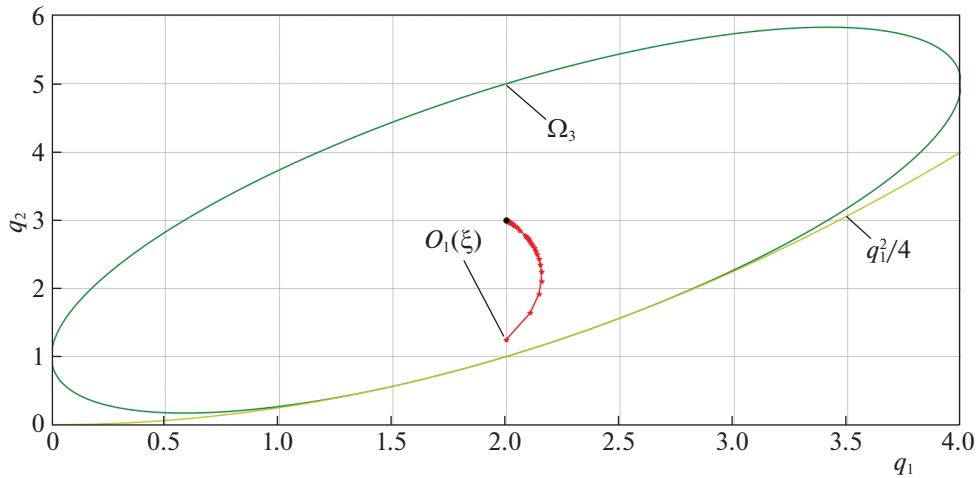


Рис. 5. Эллипс Ω_3 и траектория центра эллипса $\Omega_1(\xi)$ при изменении ξ от 3 до ∞ .

доказать, что любая траектория, во-первых, принадлежит ограниченному множеству и, во-вторых, не может быть замкнутой кривой.

Из уравнения (П.2) и рис. 1, легко видеть, что любая траектория, начинающаяся в D_2 , за конечное время попадает в D_1 . В D_3 интегральными кривыми системы (П.3) являются параболы $x_1(t) = -\text{sign}(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1))x_2^2(t)/2 + C$, двигаясь вдоль которых система попадает либо в D_1 , либо в D_2 . Другими словами, любая траектория через конечное время обязательно попадает в D_1 (но не обязательно после этого остается в нем). Следовательно, с учетом ограниченности множества D_1 никакая траектория не может уйти в бесконечность. Отсюда также следует, что никакая замкнутая траектория не может целиком лежать в D_1 или D_2 , или в их объединении $D = D_1 \cup D_2$. В силу условий леммы, очевидно также, что не существует замкнутой траектории, целиком лежащей в области D_1 . Таким образом, любая замкнутая траектория, если существует, должна дважды пересекать область D , делящую множество D_3 на две разомкнутые области D_3^- и D_3^+ , лежащие выше и ниже области D , в которых управление принимает предельные значения -1 и $+1$ соответственно. Для краткости, будем называть сегменты траекторий, принадлежащих множеству $D = D_1 \cup D_2$, в котором управление не насыщено, и множеству D_3 , в котором управление достигает насыщения, ненасыщенными и насыщенными сегментами. Следовательно, любая замкнутая траектория должна состоять из четырех – двух насыщенных и двух ненасыщенных – сегментов, причем движение вдоль такой траектории должно быть направлено по часовой стрелке. Возможны только три следующих варианта локализации таких сегментов на фазовой плоскости:

- 1) ненасыщенные сегменты целиком лежат во втором и четвертом квадрантах;
- 2) ненасыщенный сегмент начинается в первом (третьем) квадранте на множестве D_1 и заканчивается во втором (четвертом) квадранте;
- 3) ненасыщенный сегмент начинается в первом (третьем) квадранте на множестве D_2 и заканчивается во втором (четвертом) квадранте.

Рассмотрим эти три случая отдельно.

1. Функция

$$V = |x_1| + \frac{1}{2}x_2^2,$$

положительна всюду, за исключением начала координат, где она равна нулю. Производная \dot{V} в силу системы (1.2) определена формулой

$$\dot{V} = x_2(\text{sign}(x_1) + U_1(x)), \tag{П.4}$$

где $|U_1(x)| \leq 1$. Определим знак \dot{V} на каждом из вышеперечисленных сегментов. В первом квадранте $U_1(x) = -1$; поэтому $\dot{V} = 0$. Часть траектории, лежащая во втором квадрате, в общем случае

состоит из трех участков: часть насыщенного сегмента, на котором $U_1(x) = -1$, ненасыщенный сегмент и участок насыщенного сегмента, на котором $U_1(x) = 1$. На первом из них $\dot{V} = 0$; на втором $\dot{V} = x_2(1 - |U_1(x)|) < 0$, так как $x_2 < 0$, и на третьем $\dot{V} = 2x_2 < 0$. Аналогично находим, что на участках траектории, лежащих в третьем и четвертом квадрантах, производная либо отрицательна, либо равна нулю. Это означает, что после прохождения всех четырех сегментов система попадает в ту же точку фазовой плоскости с другим значением функции V , что невозможно. Следовательно, замкнутая траектория такого типа не может существовать.

2. Рассмотрим для определенности первый квадрант. Докажем, что, если траектория входит в область D_1 в первом квадранте, то она уже не выйдет из нее и, таким образом, не может быть замкнутой. Войдя в D_1 в первом квадранте, траектория пересечет ось x_1 на интервале $(0, x_{10})$, где $x_{10} = 1/k_1 k_3$ – абсцисса точки, в которой верхняя граница множества D_1 пересекает ось x_1 (рис. 1). Траектория может выйти из области D_1 только если она пересечет асимптоту $x_2 = -\lambda_1 x_1$ уравнения (1.6), что невозможно. Действительно, асимптота пересекает нижнюю границу области D_1 в точке с координатами $(1/\lambda_1^2, -1/\lambda_1)$, абсцисса которой больше, чем x_{10} . Следовательно, весь участок асимптоты, принадлежащий вертикальной полосе $0 < x_1 < x_{10}$, полностью лежит в области D_1 , так что траектория не может выйти из D_1 и стремится асимптотически в начало координат.

3. В третьем случае часть множества D_2 лежит в первом и третьем квадрантах. Такое расположение возможно только при малых значениях k_3 , когда расстояние от прямой линии $x_2 = -1$ ($x_2 = 1$) до верхней (нижней) границы D_2 , равно $1/k_3$, больше единицы, т.е. при $k_3 < 1$. Рассмотрим, для определенности, первый квадрант. Войдя в D_2 в первом квадранте, траектория пересечет ось x_1 и затем в полосе $-1 < x_2 < 0$ пересечет границу $x_1 = 1/k_1$ между множествами D_2 и D_1 . Отметим, что асимптота и нижняя граница D_1 пересекают эту линию в точках с ординатами $x_2^a = -\lambda_1/k_1 - 1 - \lambda_1/\lambda_2$, $|x_2^a| \leq 2$, и $x_2^b = -1 - 1/k_3$ соответственно. Так как $k_3 < 1$, имеем $|x_2^b| > 2$ и, следовательно, $|x_2^a| < |x_2^b|$. Отсюда следует, что весь участок асимптоты, лежащий в вертикальной полосе $0 < x_1 < 1/k_1$, полностью лежит в D_1 , так что траектория не может его пересечь, а значит, и выйти из D_1 , и асимптотически стремится в начало координат, как и в предыдущем случае. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Необходимость. Для того чтобы система (2.3) была устойчива при любых переключениях, необходимо, чтобы все три матрицы C_1 , C_2 и C_3 были гурвицевы. Для $\lambda > 0$ матрица C_3 – гурвицева при любых $\xi > 0$; C_2 – при $\xi > 1$ и $\xi \neq 2$ и C_1 – при $\xi > 3$. Отсюда, очевидно, следует необходимость условия леммы.

Достаточность. Для того чтобы нулевое решение δ -подсистемы (2.3) было глобально устойчиво, достаточно чтобы существовала общая квадратичная функция Ляпунова $V = \delta^T P \delta$ для всех трех линейных систем (2.3), т.е. существовала положительно-определенная матрица \tilde{P} , удовлетворяющая трем линейным матричным неравенствам (л.м.н.) [7, 17]:

$$Q_i \equiv -(\tilde{P}C_i + C_i^T \tilde{P}) > 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{П.5})$$

Из гурвицевости матриц C_i , $i = \overline{1, 3}$, при $\xi > 3$ следует, что каждое отдельное л.м.н. в (П.5) имеет решение. Докажем, что их общее решение существует.

Будем искать матрицу \tilde{P} в виде $\tilde{P} = rP$, где $r > 0$ и [18]

$$P = \begin{bmatrix} \lambda \xi & q_1/2 \\ q_1/2 & q_2/\lambda \xi \end{bmatrix}, \quad (\text{П.6})$$

$q_1, q_2 > 0$ и $q_2 > q_1^2/4$. Последнее неравенство, обеспечивающее положительную определенность матрицы P , выполняется для всех точек на плоскости (q_1, q_2) , лежащих выше параболы $q_2 = q_1^2/4$ (рис. 5). Множество решений каждого неравенства в (П.5) в пространстве переменных r, q_1, q_2 – конус, а его проекция на плоскость $r = 1$ – эллипс:

$$\Omega_i = \{(q_1, q_2) : PC_i + C_i^T P < 0\}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (\text{П.7})$$

где P определена формулой (П.6). Общая функция Ляпунова для всех трех систем (2.3) существует, если пересечение трех эллипсов не пусто, т.е. существует точка (q_1^*, q_2^*) , принадлежащая всем трем эллипсам (П.7). Покажем, что центр эллипса Ω_1 удовлетворяет этому условию при любых $\xi > 3$.

Подставляя (П.6) в первое л.м.н. в (П.5), получаем

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda^2[(\xi^2 + 3)q_1 - 4\xi] & \lambda \left[(\xi - 1)q_1 + \frac{\xi^2 + 3}{\xi} q_2 - \xi \right] \\ * & 4q_2 - q_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.8})$$

Матрица Q_1 положительна определена тогда и только тогда, когда

$$q_1 > \frac{4\xi}{\xi^2 + 3} \quad (\text{П.9})$$

и ее детерминант положителен. Второе условие после несложных, но громоздких вычислений сводится к неравенству

$$q^T W_1 q + 2q^T b_1 + d_1 < 0, \quad (\text{П.10})$$

где $q = (q_1, q_2)^T$,

$$W_1 = \begin{bmatrix} 2\xi^2 - 2\xi + 4 & -\frac{1}{\xi}(\xi + 1)(\xi^2 + 3) \\ -\frac{1}{\xi}(\xi + 1)(\xi^2 + 3) & (\xi^2 + 3)^2/\xi^2 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = -\begin{bmatrix} \xi(\xi + 1) \\ \xi^2 - 8\xi + 3 \end{bmatrix}, \quad d_1 = -\xi^2.$$

Сравнивая (П.10) с каноническим уравнением эллипса

$$(q - O_1)^T W_1 (q - O_1) < R_1,$$

где O_1 – вектор координат центра эллипса, получаем

$$O_1 \equiv \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{bmatrix} = -W_1^{-1} b_1 = \begin{bmatrix} \frac{2\xi(\xi + 1)}{\xi^2 + 3} \\ \frac{(3\xi^2 - 4\xi + 5)\xi^2}{(\xi^2 + 3)^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.11})$$

Координата $q_1^*(\xi)$, очевидно, удовлетворяет условию (П.9) при любых $\xi > 3$. Докажем, что $O_1(\xi) \in \Omega_3$ при любых $\xi > 3$. Легко проверить (см., например, доказательство в [18]), что эллипс Ω_3 не зависит от параметра $\lambda\xi$ и определен формулой [18]

$$\Omega_3 = \{(q_1, q_2) : (q_2 - q_1 - 1)^2 + (q_1 - 2)^2 < 4\}. \quad (\text{П.12})$$

На рис. 5 показаны граница эллипса Ω_3 и парабола $q_2 = q_1^2/4$, отделяющая область, в которой матрица P положительно определена, а также кривая, описываемая точкой $O_1(\xi)$, при изменении ξ от 3 до бесконечности. Как видим, кривая полностью лежит внутри эллипса и, следовательно, $O_1(\xi) \in \Omega_3$ при любых $\xi > 3$. Заметим, что центр $O_1(\xi)$ стремится к центру $O_3 = [2, 3]^T$, когда $\xi \rightarrow \infty$.

Докажем теперь, что $O_1(\xi) \in \Omega_2$ при любых $\xi > 3$. Подставляя (П.6) во второе л.м.н. в (П.5), получаем

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda^2[(\xi^2 + 4)q_1 - 4\xi] & \lambda \left[(\xi - 1)q_1 + \frac{\xi^2 + 4}{\xi} q_2 - \xi \right] \\ * & 4q_2 - q_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.13})$$

Условие $O_1(\xi) \in \Omega_2(\xi)$ выполняется, если матрица $Q_2^*(\xi)$, получающаяся подстановкой $q_1^*(\xi)$ и $q_2^*(\xi)$ в (П.13) вместо q_1 и q_2 соответственно, положительно определена при любых $\xi > 3$. Из неравенства (П.9) следует, что первый диагональный элемент $Q_2^*(\xi)$ положительный. Проверим знак детерминанта матрицы $Q_2^*(\xi)$. Имеем

$$\det Q_2(\xi, q_1, q_2) = \lambda^2 \left[-(\xi^2 + 4)q_1^2 - (\xi - 1)^2 q_1^2 - \frac{(\xi^2 + 4)^2}{\xi^2} q_2^2 - \right. \\ \left. - \frac{2(\xi - 1)(\xi^2 + 4)}{\xi^2} q_1 q_2 + 4(\xi^2 + 4)q_1 q_2 + 4\xi q_1 + 2\xi(\xi - 1)q_1 - 16\xi q_2 + 2(\xi^2 + 4)q_2 - \xi^2 \right].$$

Подставляя $q_1^*(\xi)$ и $q_2^*(\xi)$ вместо q_1 и q_2 в последнюю формулу, находим

$$\det Q_2^*(\xi) = \lambda^2 R(\xi) / (\xi^2 + 3)^4,$$

где $R(\xi)$ – полином:

$$R(\xi) = 4\xi^8 - 24\xi^7 + 68\xi^6 - 144\xi^5 + 235\xi^4 - 256\xi^3 + 206\xi^2 - 152\xi + 47, \quad (\text{П.14})$$

сведя таким образом задачу к доказательству строгой положительности этого полинома при $\xi > 3$. Легко убедиться с помощью непосредственной проверки, что $R(\xi)$ преобразуется к виду

$$R(\xi) = 4\xi^6(\xi - 3)^2 + 16\xi^4(2\xi - 3)(\xi - 3) + \xi^2(91\xi - 74)(\xi - 2) + (58\xi + 22)(\xi - 3) + 113. \quad (\text{П.15})$$

Так как каждое слагаемое в правой части (П.15) положительно при $\xi > 3$, $R(\xi)$ также положительно. Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Goebel R., Sanfelice R.G., Teel A.R.* Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness. New Jersey: Princeton University Press, 2012.
2. *Teel A.R.* Global Stabilization and Restricted Tracking for Multiple Integrators with Bounded Controls // Systems & Control Letters. 1992. V. 18. P. 165–171.
3. *Teel A.R.* A Nonlinear Small Gain Theorem for the Analysis of Control Systems with Saturation // Trans. Autom. Contr. IEEE. 1996. V. 41. P. 1256–1270.
4. *Pao L., Franklin G.* Proximate Time-optimal Control of Third-order Servomechanisms // IEEE Transactions on Automatic Control. 1993. V. 38. P. 560–580.
5. *Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W.* Robust Stabilization of MIMO Systems in Finite/fixed Time // Int. J. Robust. Nonlinear Control. 2016. V. 26. P. 69–90.
6. *Kurzanski A.B., Varaiya P.* Solution Examples on Ellipsoidal Methods: Computation in High Dimensions. Cham: Springer, 2014. Ch. 4. P. 147–196.
7. *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results // IEEE Transactions on Automatic Control 2009. V. 54. P. 308–322.
8. *Pyatnitskiy E., Rapoport L.* Criteria of Asymptotic Stability of Differential Inclusions and Periodic Motions of Time-varying Nonlinear Control Systems // IEEE Transactions on Circuits and Systems. Fundamental Theory and Applications. 1996. V. 43. P. 219–229.
9. *Serieye M., Albea-Sánchez C., Seuret A., Jungers M.* Stabilization of Switched Affine Systems via Multiple Shifted Lyapunov Functions // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. P. 6133–6138.
10. *Pesterev A.V., Morozov Y.V.* Optimizing Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // Optimization and Applications. Montenegro. 2021. V. 13078. P. 191–202.
11. *Olfati-Saber R.* Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles. Ph.D. Thesis. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
12. *Hua M.-D., Samson C.* Time Sub-optimal Nonlinear Pi and Pid Controllers Applied to Longitudinal Headway Car Control // International Journal of Control. 2011. V. 84. P. 1717–1728.

13. *Marconi L., Isidori A.* Robust Global Stabilization of a Class of Uncertain Feedforward Nonlinear Systems // *Systems & Control Letters*. 2000. V. 41. P. 281–290.
14. *Pesterev A.V., Morozov Y.V.* Stabilization of a Cart with Inverted Pendulum // *Automation and Remote Control*. 2022. V. 83. P. 78–91.
15. *Gantmacher F.* Matrix theory. 5th ed. M.: Fizmatlit, 2010.
16. *Andronov A.A., Leontovich E., Gordon I.I., Maier A.* Qualitative Theory of Second-order Dynamic Systems. New Jersey: Wiley, 1973.
17. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
18. *Pesterev A.V.* Construction of the Best Ellipsoidal Approximation of the Attraction Domain in Stabilization Problem for a Wheeled Robot // *Automation and Remote Control*. 2011. V. 72. P. 512–528.