

УДК 519.977

БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ© 2023 г. А. С. Бортакoвский^{a,b,*}^aМосковский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия^bМИСиС (национальный исследовательский технологический ун-т), Москва, Россия

*e-mail: asbortakov@mail.ru

Поступила в редакцию 12.04.2023 г.

После доработки 21.04.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

Рассматривается задача быстродействия группы управляемых объектов, начальное состояние каждого из которых задано, а конечное – выбирается из фиксированного набора возможных терминальных состояний (целей). Для каждого объекта требуется назначить цель и найти управление, обеспечивающее одновременное достижение группой всех выбранных целей за наименьшее время. Поскольку оптимальные по быстродействию управления отдельными объектами не решают задачу группового быстродействия, применяются так называемые минимально опаздывающие траектории. Разработана методика решения поставленной задачи, которая включает алгоритм решения минимаксной задачи назначения, процедуру использования оптимальных и минимально опаздывающих траекторий. Решена задача быстродействия группы объектов, плоское движение которых представляется траекториями Маркова–Дубинса.

DOI: 10.31857/S0002338823050049, EDN: OЕСКJA

Введение. Задачи группового управления имеют многочисленные приложения, в том числе при управлении подвижными объектами [1–3], в частности летательными аппаратами [4–9]. Постановки задач группового управления подвижными объектами весьма разнообразны [10]. Например, задачи сбора группы в заданной области [4], обход препятствий [2, 4, 8], перехват подвижной цели [11], управление в конфликтной среде [12]. Управляемыми динамическими системами служат математические модели роботов, летательных аппаратов, надводные и подводные корабли. Для моделирования движения беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) [13] нередко используется модель Маркова–Дубинса [14–16] или ее обобщения [17, 18].

В статье рассматривается задача одновременного достижения точечных целей группой подвижных объектов за наименьшее время. Решение задачи проводится в несколько этапов.

На первом этапе для каждого объекта управления определяется такая цель из множества заданных, чтобы максимальное время движения всех объектов группы до целей было минимальным. Иначе говоря, находится минимальное время (рекорд) одновременного достижения всех целей. Для этого решается задача минимаксного назначения [19–21] или, что то же самое, линейная задача о назначениях узких мест [22, 23].

На втором этапе выясняется существование траекторий, приводящих объекты управления в назначенные цели в рекордное время. Все объекты группы делятся на “дальние” и “ближние”. “Дальние” объекты должны двигаться к своим целям оптимальным по быстродействию образом. Для них рекордное время совпадает с минимальным. Напротив, для каждого “ближнего” объекта рекордное время больше минимального. Поэтому движение “ближних” объектов не должно быть оптимальным, чтобы они не опередили “дальние”. Замедление “ближних” объектов можно выполнить разными способами. В [8] предлагается удлинять траектории, объединяя участки кратчайших путей. В [9] траектория дополняется начальным участком с неоптимальным (либо антиоптимальным, либо нейтральным) управлением. Так или иначе, получаются неопаздывающие траектории, которые приводят “ближние” объекты в конечное состояние в рекордное (но неоптимальное для них) время. Такие траектории являются субоптимальными. Как правило, они определяются либо неоднозначно, либо вообще не существуют. Если неопаздывающие траектории находятся для всех “ближних” объектов, то задача группового быстродействия решена. Если для некоторых объектов нет неопаздывающих траекторий, то повторяем двухэтапную процедуру.

Снова решаем задачу минимаксного назначения (первый этап), но уже не для оптимальных, а так называемых минимально опаздывающих траекторий. Затем для нового назначения проверяем существование неопаздывающих траекторий (второй этап), но уже для нового рекорда, который хуже предыдущего. В результате итерационной процедуры либо находится решение задачи группового быстрогодействия, либо рекорд превысит максимально допустимое значение.

Предлагаются алгоритмы решения минимаксной задачи назначения, нахождения минимально опаздывающих траекторий, решения задачи группового быстрогодействия. Эффективность предлагаемых алгоритмов демонстрируется на примерах быстрогодействия группы объектов, плоское движение которых представляется траекториями Маркова–Дубинса.

В [8, 24, 25] рассматриваются более сложные задачи назначения для БПЛА, учитывающие препятствия, противодействие противника, периодичность попадания в цель и т.п. При этом, как правило, применяются эвристические алгоритмы или “ручная доводка” запланированных траекторий до попадающих в реальных условиях.

1. Постановки задач. Проблема оптимального по быстродействию управления группой подвижных объектов имеет комплексный характер и может быть представлена как совокупность задач оптимального управления, параметрической и дискретной оптимизации. Рассмотрим постановки соответствующих задач.

Задача минимаксного назначения (линейная задача назначения узких мест). Пусть имеется M подвижных объектов и N пунктов назначения (целей), причем $N \geq M$. Формально для каждого объекта выбирается свой пункт назначения (без повторения номеров цели), при этом в некоторые цели подвижные объекты не будут направлены. Фактически некоторые цели могут совпадать, поэтому в них будут направлены несколько объектов. В частности, если все N целей совпадают, то получается задача сбора группы M объектов в одном месте.

Пусть известно время T_{ij} передвижения i -го объекта в j -й пункт назначения, $i = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, N$. Каждому объекту ставится в соответствие свой пункт назначения: первому объекту – j_1 -я цель, второму – j_2 -я цель и т.д., последнему – j_M -я цель, причем номера целей попарно не совпадают. Такое паросочетание называется назначением [26] и обозначается (j_1, \dots, j_M) . Заметим, что назначение представляет собой размещение (без повторений) M чисел из N возможных. Качество назначения (j_1, \dots, j_M) характеризуется временем достижения всех целей:

$$T(j_1, \dots, j_M) = \max_{i=1, \dots, M} T_{i j_i}. \quad (1.1)$$

Требуется найти минимальное значение T^* функции (1.1) и оптимальное назначение (j_1^*, \dots, j_M^*) , на котором это значение достигается:

$$T^* = \min_{(j_1, \dots, j_M)} T(j_1, \dots, j_M) = \min_{(j_1, \dots, j_M)} \max_{i=1, \dots, M} T_{i j_i}. \quad (1.2)$$

Минимизация проводится по всем размещениям (j_1, \dots, j_M) по M чисел из N возможных.

Отметим, что полный перебор всех размещений по M объектов из N возможных составляет $N!/(N - M)!$ вариантов. Наибольшее количество вариантов $N!$ получается при $M = N$, когда количество подвижных объектов совпадает с количеством целей.

Для решения задачи назначения разработаны разные алгоритмы [25], в том числе пороговый алгоритм [27] и алгоритм последовательных приращений [28]. Метод ветвей и границ реализуется в предлагаемом алгоритме (см. Приложение). В нем не используются вспомогательные булевы матрицы, задающие назначение, в отличие от [21]. Для групп с небольшим количеством объектов управления алгоритм оказался вполне эффективным.

В результате решения задачи (1.2) определяются “дальние” и “ближние” подвижные объекты. Время движения “дальних” объектов до цели равно T^* , а время движения “ближних” – меньше T^* .

Задача группового быстрогодействия. Пусть на промежутке времени $[0, T]$ движение группы объектов управления описывается уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \quad i = 1, \dots, M, \quad (1.3)$$

где $x_i(t)$ и $u_i(t)$ – состояние и управление i -го объекта в момент времени $t \in T$, $x_i(t) \in X = \mathbb{R}^{n_i}$; $u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$, U_i – заданное множество допустимых значений управления, $i = 1, \dots, M$. Функции f_i непрерывны вместе с градиентами $\partial f_i / \partial x_i$.

Начальное состояние каждого объекта группы задано:

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.4)$$

Конечное состояние каждого объекта выбирается из множества целей $\{z_1, \dots, z_N\}$:

$$x_1(T) = z_{j_1}, \dots, x_M(T) = z_{j_M}. \quad (1.5)$$

Номера целей попарно различные, т.е. $j_i \neq j_k$, если $i \neq k$. Иначе говоря, упорядоченный набор (j_1, \dots, j_M) представляет собой размещение (без повторений) по M чисел из N возможных, причем $M \leq N$. Конечные условия (1.5) определяют “точечные” цели, фиксируя тем самым правые концы траекторий подвижных объектов. Заметим, что сами цели в множестве $\{z_1, \dots, z_N\}$ не обязательно различные. Например, равенство $z_1 = z_2$ (при $M = N$) означает, что в эту цель должны попасть два объекта группы. В частности, если все цели совпадают, то получаем задачу о сборе группы в одном месте в одно и то же время. Конечные условия (1.5) попадания в “точечные” цели можно заменить условиями достижения терминальных поверхностей. В этом случае правые концы траекторий становятся подвижными [29, 30].

Допустимым процессом управления i -м объектом считаем абсолютно непрерывную траекторию $x_i(\cdot)$ и ограниченное измеримое управление $u_i(\cdot)$, удовлетворяющие почти всюду на $[0, T]$ дифференциальному уравнению (1.3) с терминальными условиями (1.4), (1.5). Допустимый процесс управления группой составляется из допустимых процессов управления всеми ее объектами.

Требуется определить назначение целей (1.5) и найти допустимые процессы управления объектами, при которых время T одновременного достижения всех целей будет минимальным. Иначе говоря, требуется решить задачу группового быстрогодействия

$$T \rightarrow \min. \quad (1.6)$$

Как отмечалось выше, по результату T^* (см. (1.2)) решения задачи назначения все объекты можно разделить на “дальние” и “ближние”. Время оптимального движения “дальних” объектов до цели равно T^* , а время оптимального движения “ближних” — меньше T^* . Поэтому движение “ближних” объектов необходимо замедлить. Для этого вместо оптимального управления нужно применить такое субоптимальное управление, при котором время движения цели окажется равным T^* .

Задача быстрогодействия одного объекта. Она является частным случаем задачи группового быстрогодействия. Запишем кратко постановку задачи, опуская индекс i — номер объекта:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.7)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T, \quad (1.8)$$

$$T \rightarrow \min. \quad (1.9)$$

Здесь $x(t)$ и $u(t)$ — состояние и управление в момент времени $t \in [0, T]$, $x(t) \in X = \mathbb{R}^n$; $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$, U — заданное множество допустимых значений управления. Постановка задачи (1.9) — классическая [31]. Возможно изменение терминальных условий. Например, вместо конечного состояния в (1.8) определить окончание процесса управления первым достижением терминальной поверхности Γ , заданной уравнением

$$\Gamma(T, x(T)) = 0, \quad (1.10)$$

где $\Gamma : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ — вектор-функция.

Задача о множестве моментов достижения цели. Для управляемой системы (1.7) моментом достижения цели (заданного конечного состояния) будем называть момент времени T , для которого существует траектория системы, удовлетворяющая терминальным условиям (1.8). Иначе говоря, момент достижения — это допустимое время окончания процесса управления. Например, время T_0 (решение задачи быстрогодействия (1.9)) является моментом достижения, причем наименьшим. В задаче о множестве моментов достижения цели требуется найти все возможные моменты достижения заданного конечного состояния, т.е. определить множество $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x_0 | x_T)$ допустимых моментов окончания процессов управления.

Заметим, что поставленная задача будет в некотором смысле двойственной к задаче нахождения множества достижимости. В самом деле, множество достижимости $\mathbb{X}(T|x_0)$ образуют все возможные состояния $x(T)$ управляемой системы в заданный момент времени T . Множество $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x_0|x_T)$ составляют все возможные моменты достижения заданного состояния x_T . Из определений этих множеств следует равносильность включений

$$x(T) \in \mathbb{X}(T|x_0) \Leftrightarrow T \in \mathbb{T}(x_0|x(T)).$$

В постановке задачи о моментах достижения цели конечное состояние системы фиксировано. Возможны другие условия окончания, например достижение терминальной поверхности, заданной уравнением (1.10). В этом случае левый конец траектории фиксирован первым равенством в (1.8), правый – подвижный, а множество $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x_0|\Gamma)$ моментов достижения цели зависит от терминальной поверхности. Возможны и другие терминальные условия [29], например условия периодичности.

Задача минимизации опоздания. Рассмотрим задачу быстрогодействия (1.7)–(1.9) с дополнительным условием

$$T \geq T_*, \tag{1.11}$$

где T_* – заданное минимальное допустимое время достижения конечного состояния (цели). Не меняя решения задачи (1.7)–(1.9), функционал (1.9) можно переписать в виде

$$\Delta T = T - T_* \rightarrow \min. \tag{1.12}$$

Величина ΔT равна опозданию системы при достижении ее конечного состояния по сравнению с “желаемым” временем окончания T_* . Поэтому задачу (1.12) с условием (1.11) можно назвать задачей минимизации опоздания (к назначенному сроку T_*), а искомое управление – минимально опаздывающим.

В зависимости от величины T_* минимально опаздывающее управление имеет разный смысл. В самом деле, при $T_* = 0$ минимально опаздывающее управление является оптимальным по быстродействию. Такое же управление получаем при $T_* \leq T_0$, где T_0 – решение задачи быстрогодействия (1.7)–(1.9). Действительно, в этом случае ограничение $T \geq T_*$ не оказывает влияния на решение задачи, так как выполняется автоматически, поскольку $T \geq T_0$.

Если $T_* > T_0$, то возможны два варианта: либо опоздание равно нулю, либо нет. В первом случае $T = T_*$, т.е. существует неопаздывающее управление, при котором система попадает в заданное конечное состояние в заданный момент времени T_* . Заметим, что неопаздывающее управление обычно определяется неоднозначно. Его можно получить, если немного “ухудшить” оптимальное управление. Например, для подвижных объектов с регулируемой скоростью движения можно уменьшить величину оптимальной скорости, которая, как правило, максимально допустимая. Аналогичное уменьшение возможно для оптимальной (максимальной) тяги двигателя. Однако на практике встречаются подвижные объекты с нерегулируемой скоростью или с фиксированным ускорением. Например, это БПЛА с реактивным двигателем постоянной тяги, некоторые типы космических аппаратов и др. Для таких объектов нахождение неопаздывающего управления сложнее, чем оптимального, а иногда вообще невозможно.

Во втором случае опоздание ненулевое, т.е. $T > T_*$. Это означает, что неопаздывающей траектории, для которой $T = T_*$, не существует, а минимально опаздывающее управление является условно оптимальным, т.е. оптимальным по быстродействию с дополнительным условием (1.11).

Задача минимизации опоздания связана с задачей о времени достижения цели. Действительно, если известно множество $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x_0|x_T)$ моментов достижения цели x_T , то минимально опаздывающему управлению для заданного значения T_* соответствует момент

$$T = \min\{T \in \mathbb{T}(x_0|x_T) | T \geq T_*\} \tag{1.13}$$

Если $T_* \in \mathbb{T}(x_0|x_T)$, то существует субоптимальное управление, приводящее в состояние $x(T_*) = x_T$. Если $T_* \notin \mathbb{T}(x_0|x_T)$, то минимально опаздывающему управлению соответствует минимальное время $T \in \mathbb{T}(x_0|x_T)$, удовлетворяющее неравенству $T \geq T_*$, что и записано в (1.13).

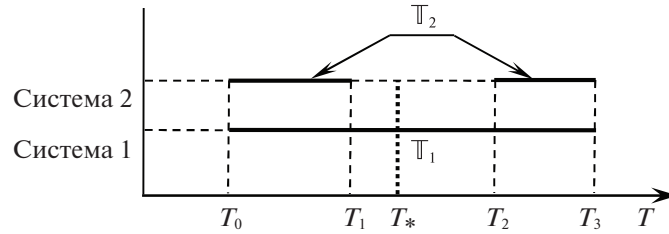


Рис. 1. Множества моментов достижения целей

На рис. 1 полужирными линиями изображены множества $\mathbb{T}_1 = [T_0, T_3]$ и $\mathbb{T}_2 = [T_0, T_1] \cup [T_2, T_3]$ моментов достижения целей для двух систем соответственно, а пунктирной линией — назначенный срок T_* . Поскольку $T_* \in \mathbb{T}_1$, первая система может попасть в конечное состояние в момент T_* . Значит, существует неопаздывающее управление, приводящее систему 1 в заданное конечное состояние в момент T_* .

Вторая система, напротив, не может достигнуть заданного конечного состояния в момент T_* , так как $T_* \notin \mathbb{T}_2$. Неопаздывающей траектории нет, но минимально опаздывающая траектория существует. Время движения до цели с минимальным опозданием равно T_2 .

2. Условия оптимальности для задачи быстрогодействия одного объекта. Задача быстрогодействия (1.7)–(1.9) относится к классическим задачам оптимального управления. Для ее решения применяем принцип максимума Понтрягина [31]. Составляем функцию Гамильтона–Понтрягина (ГП)

$$H(\psi, t, x, u) = \psi f(t, x, u) - 1, \quad (2.1)$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ — набор вспомогательных переменных, которые удовлетворяют сопряженной системе уравнений

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), t, x(t), u(t)). \quad (2.2)$$

Из условия максимума функции ГП по управлению выражаем оптимальное управление

$$u(t) = \arg \max_{u \in U} H(\psi(t), t, x(t), u). \quad (2.3)$$

Составляем краевую задачу для уравнений (1.7), (2.2), дополняя дифференциальные уравнения краевыми условиями (1.8) и равенством $H(\psi(T), T, x(T), u(T)) = 0$, которое следует из условия трансверсальности.

Таким образом, задача быстрогодействия одного подвижного объекта сведена к двухточечной краевой задаче для системы $2n$ дифференциальных уравнений. Методы численного решения таких задач рассматриваются в [29, 32].

Заметим, что для получения исходных данных для задачи назначения (см. разд. 1) нужно определить минимальное время T_{ij} достижения i -м объектом j -й цели, $i = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, N$. Для этого приходится решать MN задач быстрогодействия. Такая процедура значительно упрощается, если модель движения объекта управления простая и оптимальное управление известно.

Пример 1. Пусть на промежутке $[0, T]$ движение системы описывается уравнениями модели Маркова–Дубинса [14–16]

$$\dot{x}(t) = V \cos \varphi(t), \quad \dot{y}(t) = V \sin \varphi(t), \quad \dot{\varphi}(t) = \omega(t), \quad (2.4)$$

где x, y — координаты положения объекта на плоскости Oxy , φ — угол направления движения, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс, V — постоянная линейная скорость движения, ω — угловая скорость. Управлением служит измеримая функция $\omega(\cdot)$, удовлетворяющая ограничению $|\omega| \leq \Omega$, где Ω — максимальная допустимая угловая скорость.

Начальное состояние и конечное положение системы заданы

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad x(T) = x_F, \quad y(T) = y_F.$$

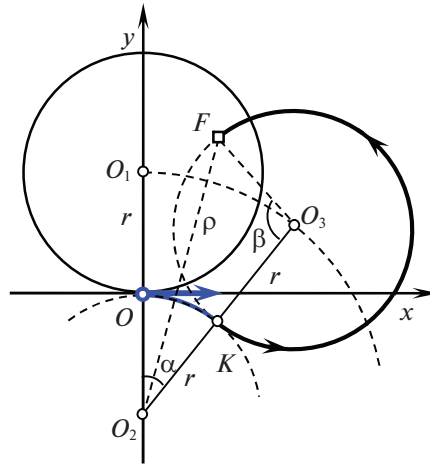


Рис. 2. Оптимальная траектория *CC*

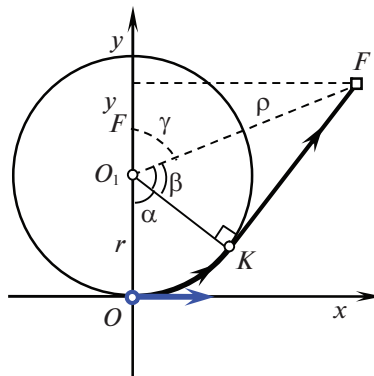


Рис. 3. Оптимальная траектория *CL* (дуга поворота меньше π)

Отметим, что в конечный момент времени направление $\varphi(T)$ движения не задано, т.е. речь идет о достижении заданной точки $F(x_F, y_F)$ на координатной плоскости.

Требуется найти наименьшее значение времени T и оптимальное управление $\omega(\cdot)$, на котором оно достигается, т.е. решить задачу быстродействия

$$T \rightarrow \min.$$

Можно сказать, что поставлена задача наискорейшего попадания в точечную цель.

Решение этой задачи известно [14, 33]. Его можно получить, применяя принцип максимума Понтрягина [31]. Оптимальное управление оказывается кусочно-постоянным с одним переключением, причем $\omega(t) \in \{0, \pm \Omega\}$. Оптимальные траектории на плоскости Oxy представляют собой гладкое соединение либо двух дуг окружностей (траектория типа *CC* (рис. 2)), либо дуги окружности и отрезка (траектория типа *CL* (рис. 3, 4)). Приведем оптимальные траектории для нулевого начального состояния $x_0 = 0, y_0 = 0, \varphi_0 = 0$. Без ограничения общности будем считать, что конечное положение системы – точка $F(x_F, y_F)$ находится в верхней полуплоскости $y \geq 0$.

Если цель F находится внутри окружности радиуса $r = V/\Omega$ с центром в точке $O_1(0, r)$, то оптимальной будет траектория типа *CC*. Если вне этой окружности, то оптимальной будет траектория типа *CL*. Типичные траектории *CC* и *CL* представлены на рис. 2–4 соответственно. Начальное состояние и направление начальной скорости показано полужирным вектором, приложенным к началу координат, конечные положения отмечены квадратиками F , направление движения по траекториям указывается стрелками. Заметим, что $r = V/\Omega$ – наименьший допустимый радиус поворота.

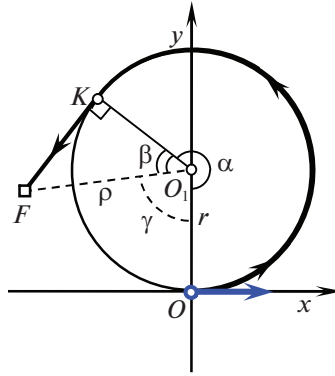


Рис. 4. Оптимальная траектория CL (дуга поворота больше π).

Вычислим время T_0 движения по оптимальной траектории CC . Пусть K – точка гладкого соединения дуг окружностей с центрами O_2 и O_3 . Обозначим через ρ длину отрезка O_2F , а через α – угловую меру дуги OK . Тогда из треугольника O_2O_3F получаем

$$\beta = \arccos \frac{5r^2 - \rho^2}{4r^2}. \quad (2.5)$$

Величина α равна сумме углов

$$\alpha = \angle O_1O_2O_3 = \angle O_1O_2F + \angle O_3O_2F = \arcsin \frac{x_F}{\rho} + \arccos \frac{3r^2 + \rho^2}{4r\rho}. \quad (2.6)$$

Время движения находится следующим образом:

$$T_0 = \frac{\alpha r + (2\pi - \beta)r}{V} = \frac{2\pi + \alpha - \beta}{\Omega}. \quad (2.7)$$

Подчеркнем, что у оптимальной траектории CC угловая величина дуги второй окружности (с центром O_3) больше π . Это обстоятельство окажется важным для построения субоптимальных траекторий.

Вычислим время T_0 движения по оптимальной траектории CL . Пусть K – точка касания прямой и окружности, ρ – длина отрезка O_1F , α – угловая мера дуги OK , β – величина угла KO_1F , а γ – величина угла OO_1F . Предположим, что конечное положение $F(x_F, y_F)$ принадлежит первой четверти, т.е. $x_F \geq 0$, $y_F \geq 0$ (см. рис. 3). Тогда

$$\alpha = \pi - \gamma - \beta = \pi - \arccos \frac{y_F - r}{\rho} - \arccos \frac{r}{\rho} = \arccos \frac{r - y_F}{\rho} - \arccos \frac{r}{\rho},$$

а время движения

$$T_0 = \frac{\alpha r + \sqrt{\rho^2 - r^2}}{V} = \frac{\alpha}{\Omega} + \frac{\sqrt{\rho^2 - r^2}}{V}. \quad (2.8)$$

Если конечное положение $F(x_F, y_F)$ находится во второй четверти (при $x_F < 0$, $y_F \geq 0$ (см. рис. 4)), то приходим к той же формуле (2.8), но величина угла поворота

$$\alpha = 2\pi - \gamma - \beta = 2\pi - \arccos \frac{r - y_F}{\rho} - \arccos \frac{r}{\rho}. \quad (2.9)$$

Траектории CC и CL получаются при релейном оптимальном управлении. Единственное переключение происходит в точках K (см. рис. 2–4). Момент переключения t_1 определяется величиной α угла поворота:

$$t_1 = \frac{\alpha}{\Omega}. \quad (2.10)$$

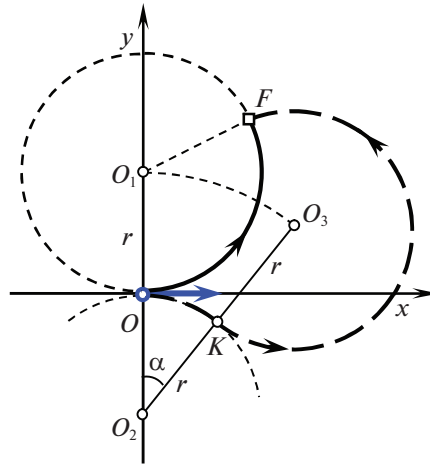


Рис. 5. Линия разрыва функции цены.

Рассмотрим частные случаи. Если конечное положение F находится на окружности радиуса r с центром O_1 , то оптимальная траектория – дуга этой окружности. Величина α угла поворота вычисляется по формулам

$$\alpha = \arcsin \frac{x_F}{\rho} \quad \text{при} \quad x_F \geq 0; \quad \alpha = 2\pi + \arcsin \frac{x_F}{\rho} \quad \text{при} \quad x_F < 0,$$

а время движения

$$T_0 = \frac{\alpha}{\Omega}. \tag{2.11}$$

Если точка F принадлежит положительной части оси абсцисс ($x_F > 0, y_F = 0$), то угол поворота $\alpha = 0$, а время движения

$$T_0 = \frac{x_F}{V}. \tag{2.12}$$

В случае $x_F < 0, y_F = 0$ применяются формулы (2.8), (2.9).

Если начальное состояние ненулевое, то нужно перенести начало системы координат в стартовое положение (x_0, y_0) объекта управления и повернуть ее в соответствии с направлением φ_0 скорости движения, при необходимости выполнить отражение в новой оси абсцисс, если ордината цели окажется отрицательной. После этого момент переключения и минимальное значение времени движения вычисляются соответственно по формулам (2.7), (2.8), (2.11), (2.12).

Полученные формулы (2.7), (2.8), (2.11), (2.12) показывают, что минимальное время T_0 непрерывно зависит от координат цели F на всей верхней полуплоскости, за исключением полуокружности с центром O_1 радиуса r , находящейся в первой четверти ($x \geq 0, y \geq 0$). При переносе точки F через эту линию изменяется тип оптимальной траектории, а время T_0 меняется скачком, так как вычисляется по разным формулам ((2.7) или (2.8)). Иначе говоря, функция цены $T_0(F)$ имеет конечный разрыв на этой полуокружности.

Вычислим величину скачка. Пусть точка F находится на линии разрыва (рис. 5). Дуга OF (полужирная линия) является оптимальной траекторией. Минимальное время достижения цели находим по формулам (2.10), (2.11):

$$T_0 = \frac{1}{\Omega} \arcsin \frac{x_F}{\rho}. \tag{2.13}$$

Кривая OKF (штриховая линия) – попадающая траектория типа CC . Время движения по этой траектории вычисляется по формулам (2.5)–(2.7):

$$T_0 = \frac{1}{\Omega} \left(2\pi + \arcsin \frac{x_F}{\rho} + \arccos \frac{3r^2 + \rho^2}{4r\rho} - \arccos \frac{5r^2 - \rho^2}{4r^2} \right). \quad (2.14)$$

Величина скачка определяется разностью величин (2.13) и (2.14):

$$\Delta T_0 = \frac{1}{\Omega} \left(2\pi + \arccos \frac{3r^2 + \rho^2}{4r\rho} - \arccos \frac{5r^2 - \rho^2}{4r^2} \right). \quad (2.15)$$

Следовательно, если конечное положение цели перемещается, пересекая линию разрыва в точке F в направлении к центру O_1 , то минимальное время T_0 увеличивается скачком на величину (2.15).

Таким образом, в классической задаче Маркова–Дубинса попадания в заданную цель функция цены всюду непрерывно зависит от позиции цели, за исключением линии разрыва, на которой она имеет скачок (2.15).

3. Методика нахождения моментов достижения цели. Известно [34], что в граничные точки множества достижимости приводят траектории, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина для задачи быстрогодействия. Следует ожидать, что граничные точки множества $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x_0 | x_T)$ также соответствуют процессам, удовлетворяющим необходимым условиям оптимальности.

Действительно, наименьший элемент T_0 множества \mathbb{T} является решением задачи быстрогодействия (1.7)–(1.9). Если множество \mathbb{T} состоит, например, из двух отрезков $\mathbb{T} = [T_0, T_1] \cup [T_2, T_3]$, то момент T_2 достижения цели – решение задачи быстрогодействия (1.7)–(1.9) с дополнительным условием $T \geq T_*$, где T_* – любой момент между T_1 и T_2 . Иначе говоря, время T_2 соответствует минимально опаздывающему управлению при заданном T_* . Таким образом, левые границы пересекающихся отрезков, входящих в множество \mathbb{T} , соответствуют моментам окончания процессов, удовлетворяющих принципу максимума. Для правых границ отрезков такое утверждение не доказано и, возможно, неверное.

Пример 2. Пусть на промежутке $[0, T]$ движение системы описывается уравнениями (2.4) модели Маркова–Дубинса [14–16]. Нулевое начальное состояние O и конечное положение $F(x_F, y_F)$ определяются равенствами:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad x(T) = x_F, \quad y(T) = y_F. \quad (3.1)$$

Требуется решить задачу о времени достижения цели, т.е. для каждого конечного положения F найти множество $\mathbb{T}(O | F)$ всех допустимых моментов T окончания процессов управления.

Решение этой задачи будем искать, предполагая, что цель $F(x_F, y_F)$ находится в верхней полуплоскости $y \geq 0$. Наименьший элемент T_0 множества $\mathbb{T}(O | F)$ является решением задачи быстрогодействия (см. пример 1). Поэтому для каждого момента $T > T_0$ нужно либо найти неопаздывающую траекторию, удовлетворяющую терминальным условиям (3.1), либо показать, что такой траектории нет.

Предлагается строить неопаздывающие траектории, удлиняя оптимальные путем добавления нового участка: либо отрезка, либо дуги окружности. В зависимости от положения цели F на координатной плоскости Oxy будем строить разные неопаздывающие траектории. На рис. 6 представлены характерные области 1–4 расположения цели. Границами областей служат окружность с центром $O_1(0, r)$ радиуса r , дуга окружности с центром $O_2(0, -r)$ радиуса $3r$, луч $y = 2r$, $x \geq 0$. Здесь, как и ранее, $r = V/\Omega$ – наименьший допустимый радиус поворота. Пунктирной полуокружностью на рис. 6 изображена линия разрыва функции цели, о которой шла речь в примере 1. Решим задачу о множестве моментов достижения цели для каждой области.

Пусть цель находится в области 1 (см. рис. 6). Оптимальная траектория OKF типа CL изображена на рис. 7 полужирной линией. Минимальное время T_0 достижения цели находится по формуле (2.8). Рассмотрим попадающую траекторию типа LCL движения объекта управления, при котором сначала выполняется прямолинейное движение в течение времени τ , потом поворот в положительном направлении и, наконец, прямолинейное движение в цель. На рис. 7 такая

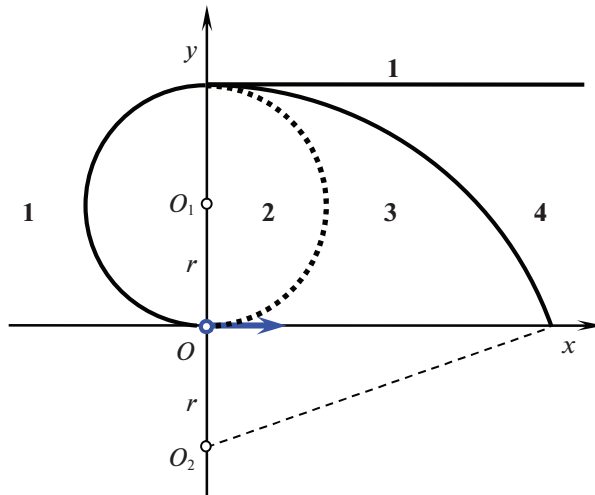


Рис. 6. Характерные области расположения целей.

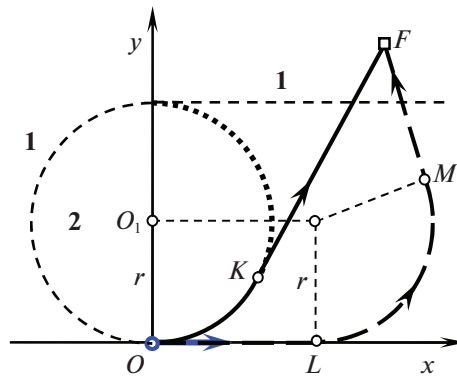


Рис. 7. Оптимальная траектория CC и неопаздывающая траектория LCL (цель в области 1).

траектория представлена штриховой линией $OLMF$. Время T движения по этой траектории больше, чем время T_0 движения по оптимальной траектории OKF .

Получим зависимость времени T от продолжительности τ первого участка. Для этого вместо движения объекта управления рассмотрим перемещение цели относительно объекта управления, который будем считать неподвижным. Действительно, прямолинейному движению объекта по отрезку $OL = V\tau$ соответствует относительное перемещение цели по отрезку $FF' = V\tau$ (рис. 8). После этого перемещения цель окажется в точке F' области 1. Поэтому общее время движения по траектории $OLMF$ составит

$$T = \tau + T_0(F'), \tag{3.2}$$

где $T_0(F')$ – минимальное время движения из нулевого начального состояния в конечное состояние $F'(x_F - V\tau, y_F)$ по траектории OKF' (штрихпунктирная линия на рис. 8). Так как функция $T_0(F')$ непрерывна в области 1, а координаты точки F' непрерывно зависят от параметра τ , то при любом значении $T \geq T_0$ найдется корень τ уравнения (3.2). Иначе говоря, для любого $T \geq T_0$ существует неопаздывающая попадающая траектория. Следовательно, множество моментов достижения цели в области 1 представляет собой луч $\mathbb{T}(O|F) = [T_0(F), +\infty)$.

Пусть цель находится в области 2 (см. рис. 6). Оптимальная траектория OKF типа CC изображена на рис. 9, 10 полужирной линией. Минимальное время T_0 достижения цели находится по формуле (2.7). Рассмотрим попадающие траектории двух типов LCC и LCL , которые представлены на

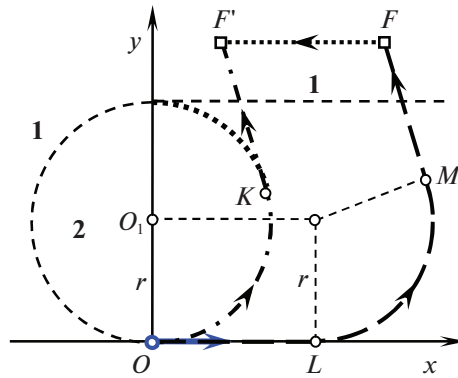


Рис. 8. Перемещение цели в области 1 для неопаздывающей траектории LCL.

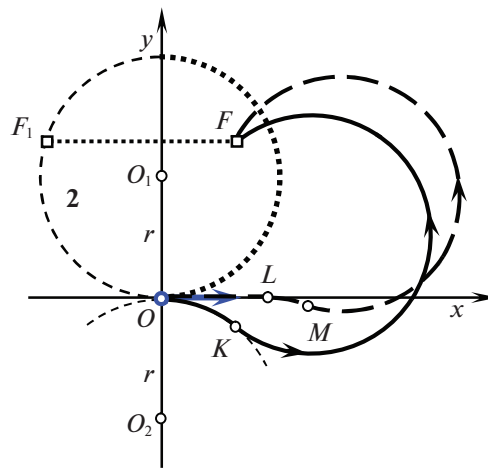


Рис. 9. Оптимальная траектория CC и неопаздывающая траектория LCC (цель в области 2).

рис. 9, 10 штриховыми линиями $OLMF$ соответственно. На первом участке обеих траекторий происходит прямолинейное движение объекта в течение времени τ . Первый участок продолжится либо двумя поворотами (рис. 9), либо поворотом с последующим прямолинейным движением до цели (рис. 10). Первые участки попадающих траекторий отличаются длиной. У траектории LCC (на рис. 9) первый участок $OL = V\tau$ короче отрезка $FF_1 = x_F - \sqrt{y_F(2r - y_F)}$, а у траектории LCL (на рис. 10) отрезок OL больше FF_1 . Время T движения по траекториям LCC или LCL больше, чем время T_0 движения по оптимальной траектории OKF .

Получим зависимость времени T от продолжительности τ первого участка. Для этого, как и ранее, вместо движения объекта управления рассмотрим перемещение цели относительно объекта управления, который будем считать неподвижным. Прямолинейному движению объекта по отрезку $OL = V\tau$ соответствует относительное перемещение цели по отрезку $FF' = V\tau$ (рис. 11, 12). После такого перемещения цель окажется в точке F' либо в области 2 (см. рис. 11), либо в области 1 (см. рис. 12). В обоих случаях время движения по попадающим траекториям определяется равенством (3.2), в котором, однако, минимальное время $T_0(F')$ движения из нулевого начального состояния в конечное состояние $F'(x_F - V\tau, y_F)$ по траекториям OKF' (штрихпунктирные линии на рис. 11, 12) вычисляется либо по формуле (2.7), либо по формуле (2.8) соответственно.

Функция $T_0(F')$ непрерывна в областях 1 и 2. Координаты точки F' непрерывно зависят от τ . Поскольку перемещение FF' цели из области 2 в область 1 (рис. 12) не пересекает линии разрыва функции цены (пунктирной полуокружности на рис. 6). Значит, функция $T_0(F')$ непрерывно зависит от параметра τ . Поэтому при любом значении $T \geq T_0$ найдется корень τ уравнения (3.2).

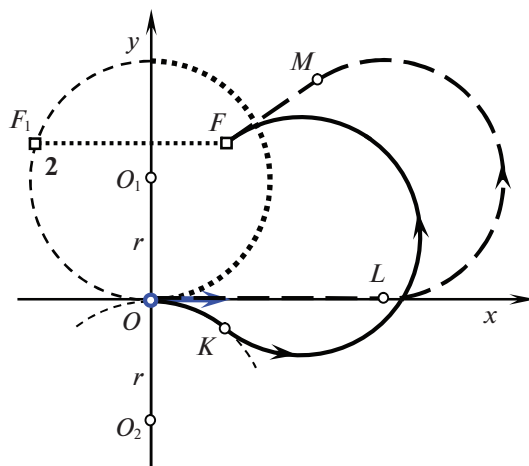


Рис. 10. Оптимальная траектория CC и неопаздывающая траектория LCL (цель в области 2).

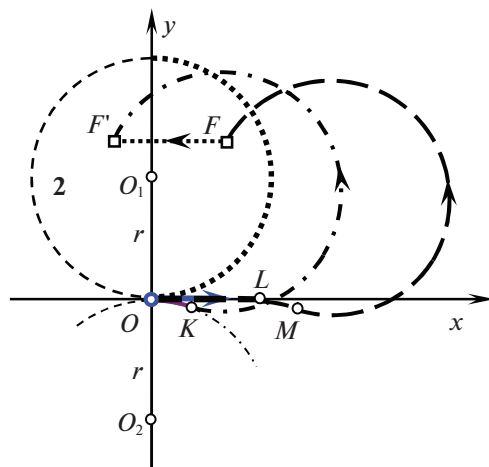


Рис. 11. Перемещение цели в области 2 для неопаздывающей траектории LCC .

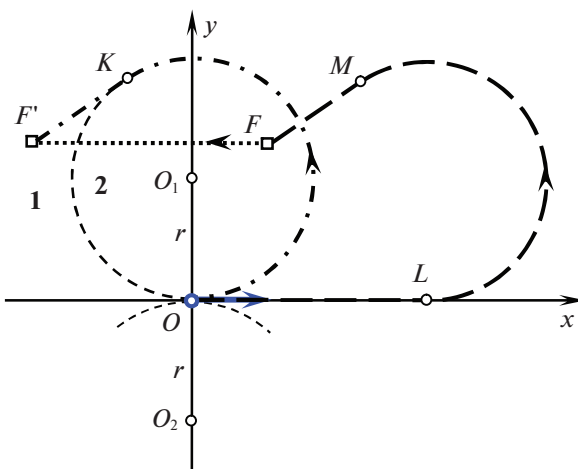


Рис. 12. Перемещение цели из области 2 для неопаздывающей траектории LCL .

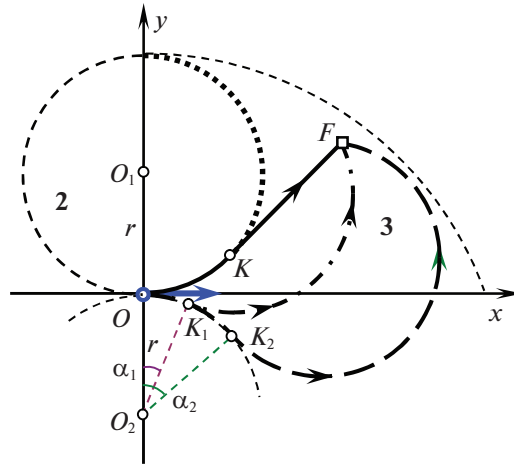


Рис. 13. Оптимальная траектория CC и две попадающих траектории CC (цель в области 3).

Иначе говоря, для любого $T \geq T_0$ существует неопаздывающая попадающая траектория. Следовательно, множество моментов достижения цели в области 2 представляет собой луч $\mathbb{T}(O|F) = [T_0(F), +\infty)$.

Пусть цель находится в области 3 (см. рис. 6). Оптимальная траектория типа CL достигает цель за время T_0 , которое находится по формуле (2.8). На рис. 13 изображены оптимальная траектория типа CL (полуэллиптическая линия), а также две траектории типа CC (штрихпунктирная и штриховая линии), попадающие в точку F . Здесь K, K_1, K_2 – точки гладкого соединения участков трех траекторий соответственно. Обозначим через T_1 и T_2 время движения по попадающим траекториям OK_1F и OK_2F . Покажем, что множество моментов достижения цели представляет собой объединение промежутков

$$\mathbb{T}(O|F) = [T_0, T_1] \cup [T_2, +\infty). \tag{3.3}$$

В самом деле, рассмотрим движение цели относительно объекта управления, который будем считать неподвижным. На рис. 14 показаны линии перемещения цели, соответствующие попадающим траекториям OK_1F и OK_2F движения объекта на рис. 13. Повороту OK_1 (рис. 13) соответствует перемещение FF_1 на угол $\alpha_1 = \angle FO_2F_1 = \angle OO_2K_1$, повороту OK_2 – перемещение FF_2 на угол $\alpha_2 = \angle FO_2F_2 = \angle FO_2K_2$. Вычислим время движения по траекториям OK_1F и OK_2F , используя перемещения цели на рис. 14. Из равных треугольников $O_1O_2F_2$ и $O_1O_2F_1$ получаем

$$\beta = \arccos \frac{5r^2 - \rho^2}{4r^2},$$

где ρ – длина отрезка O_2F . Угол α_1 находим как разность углов O_1O_2F и $O_1O_2F_1$, а угол α_2 – как сумму углов O_1O_2F и $O_1O_2F_1$:

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{x_F}{\rho} - \arccos \frac{3r^2 + \rho^2}{4r\rho}, \quad \alpha_2 = \arcsin \frac{x_F}{\rho} + \arccos \frac{3r^2 + \rho^2}{4r\rho}. \tag{3.4}$$

Тогда время T_1 и T_2 движения по траекториям OK_1F и OK_2F вычисляется по формулам

$$T_1 = \frac{\alpha_1 + \beta}{\Omega}, \quad T_2 = \frac{2\pi + \alpha_2 - \beta}{\Omega}. \tag{3.5}$$

Докажем теперь, что для любого момента окончания T из множества (3.3) найдется неопаздывающая траектория. Пусть $T_0 \leq T \leq T_1$. Обозначим через τ время первоначального поворота OK объекта управления в отрицательном направлении (рис. 15) на угол $\alpha = \Omega \tau$. Предполагаем, что угол α меньше угла α_1 (рис. 14). При таком небольшом повороте относительное перемещение FF' цели будет в пределах области 3. Тогда время достижения цели будет равно

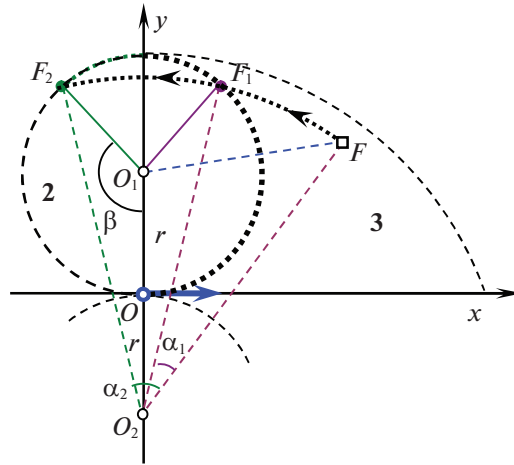


Рис. 14. Перемещение цели из области 3 для попадающих траекторий CC .

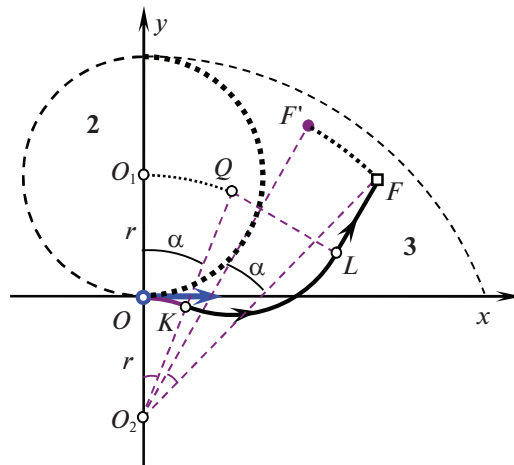


Рис. 15. Перемещение цели в области 3 для попадающей траектории CCL .

$$T = \tau + T_0(F'). \tag{3.6}$$

Здесь $T_0(F')$ – минимальное время движения из нулевого начального состояния в конечное положение $F'(x', y')$, координаты которого находятся по формулам

$$x' = x_F \cos \alpha - y_F \sin \alpha - r \sin \alpha, \quad y' = x_F \sin \alpha + y_F \cos \alpha + r \cos \alpha - r, \tag{3.7}$$

где $\alpha = \Omega \tau$. Заметим, что в силу непрерывности функции $T_0(F')$ в области 3 для каждого момента времени $T \in [T_0, T_1]$ найдется корень τ уравнения (3.6). Поэтому существует неопаздывающая траектория $OKLF$ (полужирная линия на рис. 15) типа CCL с первоначальным отрицательным поворотом на угол $\Omega \tau$.

Пусть теперь $T \geq T_2$. Рассмотрим траекторию типа $CLCL$ движения объекта управления (рис. 16), при котором сначала выполняется поворот в отрицательном направлении на угол α_2 , определяемый формулой (3.4), затем прямолинейное движение в течение времени τ , потом поворот в положительном направлении и, наконец, прямолинейное движение в цель. На рис. 16 такая траектория представлена полужирной линией OK_2LMF . Время T движения по этой траектории больше, чем время T_2 движения по траектории OK_2F (штриховая линия на рис. 13). Первым двум участкам движения объекта – повороту по дуге OK_2 на угол $\alpha_2 = \angle OO_2K$ и прямолинейному движению по отрезку $K_2L = V\tau$ соответствуют относительное перемещение цели по дуге FF_2

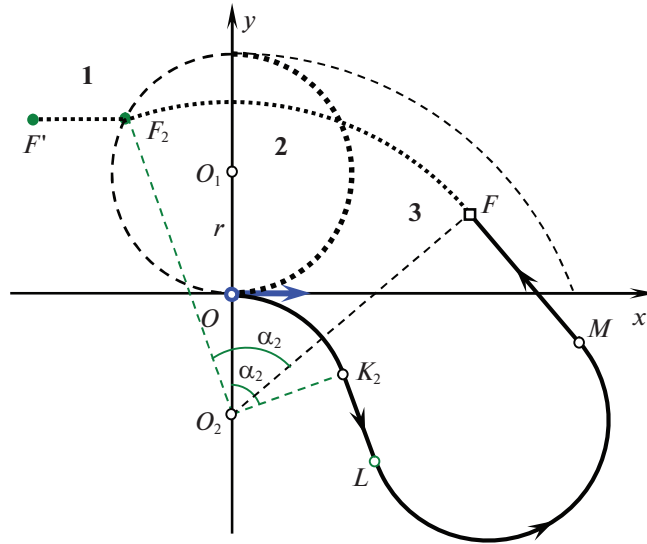


Рис. 16. Перемещение цели из области 3 для попадающей траектории $CLCL$.

на угол $\alpha_2 = \angle FO_2F_2$ и по отрезку $F_2F' = K_2L$. После таких перемещений цель останавливается в точке F' в области 1 относительно неподвижного объекта управления. Поэтому общее время движения по траектории типа $CLCL$ оказывается равным

$$T = \frac{\alpha_2}{\Omega} + \tau + T_0(F'), \quad (3.8)$$

где $T_0(F')$ – минимальное время движения из нулевого начального состояния в конечное положение $F'(x', y')$, координаты которого находятся по формулам

$$x' = x_F \cos \alpha_2 - y_F \sin \alpha_2 - r \sin \alpha_2 - V\tau; \quad y' = x_F \sin \alpha_2 + y_F \cos \alpha_2 + r \cos \alpha_2 - r. \quad (3.9)$$

Так как функция $T_0(F_3)$ непрерывная в области 1, а координаты (3.9) точки F_3 непрерывно зависят от параметра τ , то при любом значении $T \geq T_2$ найдется корень τ уравнения (3.8). Иначе говоря, для любого $T \geq T_2$ существует неопаздывающая попадающая траектория.

Подчеркнем, что момент $T \in (T_1, T_2)$ не является допустимым моментом достижения цели. Первоначальному повороту объекта управления в отрицательном направлении соответствует относительное перемещение цели по дуге FF_1F_2 в противоположном направлении движение (рис. 14). При этом перемещении цель пересекает пунктирную полуокружность, которая, как отмечалось в примере 1, является линией разрыва функции цены. На этой дуге в точке F_1 происходит скачок (2.15) функции цены от значения T_1 к значению T_2 . Промежуточных значений (между T_1 и T_2) функция цены не принимает. Поэтому не существует траекторий, достигающих цель в момент $T \in (T_1, T_2)$. Однако минимально опаздывающая траектория для $T \in (T_1, T_2)$ существует. Это траектория типа CC , представленная на рис. 13 штриховой линией OK_2F . Время T_2 движения по этой траектории определяется формулой (3.5).

Пусть цель находится в области 4 (рис. 6). Оптимальная траектория OKF типа CL изображена на рис. 17, 18 полужирной линией. Минимальное время T_0 достижения цели находится по формуле (2.8). Рассмотрим попадающие траектории двух типов CCL и $CLCL$, которые представлены на рис. 17, 18 штриховыми линиями OK_1LF и OK_1LMF соответственно. На первом участке OK_1 обеих траекторий происходит поворот в отрицательном направлении на угол α и α_1 соответственно, причем $\alpha < \alpha_1$. Угол $\alpha = \Omega\tau$, где τ – продолжительность первого участка траектории OK_1LF (рис. 17). Угол $\alpha_1 = \angle OO_2F_1 = \arccos(3r/\rho)$, где F_1 – точка пересечения луча $y = 2r$, $x \geq 0$ окружности с центром O_2 радиуса $\rho = O_2F$ с границей области 4 (лучом $y = 2r$, $x \geq 0$). Первый участок траектории CCL продолжается поворотом в положительном направлении и

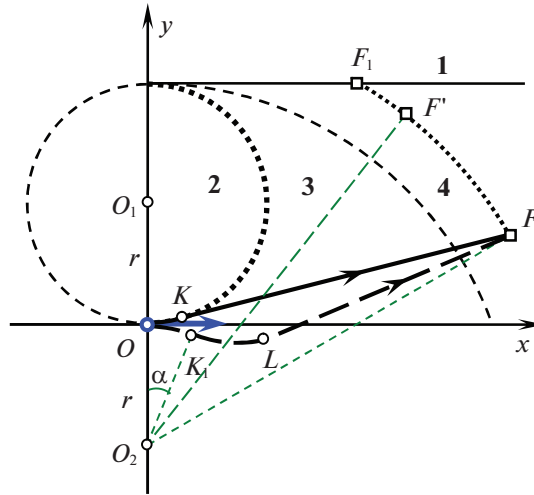


Рис. 17. Оптимальная траектория CL и перемещение цели в области **4** для неопаздывающей траектории CCL .

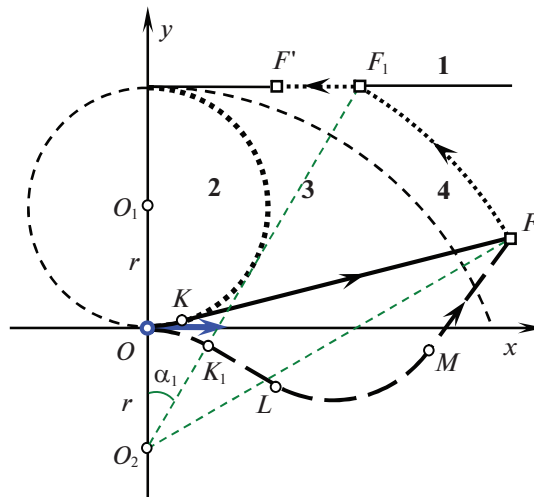


Рис. 18. Оптимальная траектория CL и перемещение цели из области **4** для неопаздывающей траектории $CLCL$.

прямолинейным движением в цель (см. рис. 17). За первым участком траектории $CLCL$ следует участок прямолинейного движения продолжительности $\tau - \alpha_1/\Omega$, затем поворот в положительном направлении и, наконец, прямолинейное движение в цель. Время T движения по траекториям CCL или $CLCL$ больше, чем время T_0 движения по оптимальной траектории OKF .

Получим зависимость времени T движения от параметра τ . Рассмотрим относительное перемещение цели для обеих попадающих траекторий. Для траектории типа CCL первоначальному повороту на угол $\alpha = \angle OO_2K_1$ соответствует перемещение цели по дуге FF' той же угловой величины $\alpha = \angle FO_2F'$ (рис. 17). После такого перемещения цель окажется в точке F' в области **4**. Поэтому время движения по траектории OK_1LF типа CCL вычисляется по формулам (3.6), (3.7).

Для траектории типа $CLCL$ первоначальному повороту на угол $\alpha_1 = \angle OO_2K_1$ соответствует перемещение цели по дуге FF_1 той же угловой величины $\alpha_1 = \angle FO_2F'$ (рис. 18). После такого перемещения цель окажется в точке F_1 на границе области **1**. Прямолинейному движению объекта по отрезку $K_1L = V(\tau - \alpha_1/\Omega)$ соответствует относительное перемещение цели по отрезку F_1F' той же длины (рис. 18). Конечное положение F' цели остается в области **1**. Поэтому общее время дви-

жения по траектории OK_1LMF типа $CLCL$ вычисляется по формуле (3.6), в которой координаты конечного положения $F'(x', y')$ цели определяются выражениями

$$x' = \rho \sin \alpha_1 - V \left(\tau - \frac{\alpha_1}{\Omega} \right); \quad y' = 2r.$$

Зависимость времени T движения от параметра τ непрерывная, поскольку при относительном перемещении FF' цели линия разрыва функции цены (пунктирная полуокружность на рис. 17, 18) не пересекается. Поэтому для любого значения $T \geq T_0$ найдется корень τ уравнения (3.6). Иначе говоря, для любого $T \geq T_0$ существует неопаздывающая попадающая траектория. Следовательно, множество моментов достижения цели в области **4** представляет собой луч $\mathbb{T}(O|F) = [T_0(F), +\infty)$.

Таким образом, в классической задаче Маркова–Дубинса множеством моментов достижения цели является либо луч $[T_0, +\infty)$, либо объединение двух промежутков $[T_0, T_1] \cup [T_2, +\infty)$, где T_0 – минимальное время достижения цели, а T_1 и T_2 – моменты, определяемые формулами (3.5). В частном случае, когда цель лежит на границе областей **2** и **3**, множество моментов достижения цели будет объединением точки и луча $\{T_0\} \cup [T_2, +\infty)$, поскольку в этом случае $T_1 = T_0$.

4. Условия оптимальности для задачи минимизации опоздания. Задача минимизации опоздания отличается от задачи быстродействия (1.7)–(1.9) с дополнительным условием (1.11):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ x(0) &= x_0, \quad x(T) = x_T, \\ T &\geq T_*, \\ T &\rightarrow \min, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где T_* – заданное минимальное допустимое время достижения конечного состояния (цели). Применяя метод Лагранжа снятия ограничений [35], составляем функционал

$$L = \lambda_0 T + \lambda(T_* - T),$$

для которого записываем необходимые условия оптимальности. В регулярном [35] (невыврожденном [30]) случае при $\lambda_0 = 1$ условия принципа максимума Понтрягина будут совпадать с соотношениями (2.1)–(2.3). Отличия заключаются в условиях трансверсальности

$$H(\psi(T), T, x(T), u(T)) = 1 - \lambda,$$

дополняющей нежесткости $\lambda(T_* - T) = 0$ и неотрицательности $\lambda \geq 0$.

Задачу (4.1) можно решать без применения метода Лагранжа. Для этого нужно модифицировать минимизируемый функционал (4.1):

$$T_+ = \max\{T - T_*; 0\} \rightarrow \min. \tag{4.2}$$

Такая негладкая модификация может быть полезна при решении задачи (4.2) численными методами минимизации нулевого порядка [30] или методами недифференцируемой минимизации [36, 37].

Пример 3. Пусть на промежутке $[0, T]$ движение системы описывается уравнениями (2.4) модели Маркова–Дубинса [14–16]. Нулевое начальное состояние O и конечное положение $F(x_F, y_F)$ определяются равенствами (3.1). Требуется решить задачу минимизации опоздания, т.е. найти минимальное время T достижения цели, которое не меньше заданной величины T_* .

Решение этой задачи фактически получено в примерах 1, 2. В самом деле, если минимально допустимое время T_* достижения цели меньше минимального времени T_0 достижения цели, то минимально опаздывающая траектория совпадает с оптимальной по быстродействию, которая найдена в примере 1. Если цель не принадлежит области **3** на рис. 6, то множество моментов достижения цели представляет собой луч $\mathbb{T}(O|F) = [T_0(F), +\infty)$, поэтому для любого назначенного срока $T_* \geq T_0$ существует неопаздывающая траектория (см. пример 2), которая является минимально опаздывающей. Если же цель принадлежит области **3** на рис. 6, то множество моментов достижения цели представляет собой объединение двух промежутков $\mathbb{T}(O|F) = [T_0, T_1] \cup [T_2, +\infty)$,

где T_1 и T_2 – моменты, определяемые формулами (3.5). Значит, при $T_* \notin (T_1, T_2)$ минимально опаздывающая траектория совпадает с неопаздывающей, а при $T_* \in (T_1, T_2)$ минимально опаздывающая является траекторией типа CC , представленной на рис. 13 штриховой линией OK_2F . Время T_2 движения по этой траектории определяется формулой (3.5).

Таким образом, в классической задаче Маркова–Дубинса попадания в заданную цель для любого назначенного срока существует минимально опаздывающая траектория.

5. Алгоритмы решения задачи группового быстрогодействия. Решение задачи (1.3)–(1.6) группового быстрогодействия связано с нахождением оптимальных по быстродействию и минимально опаздывающих траекторий. Рассмотрим два итерационных алгоритма. В первом на каждой итерации используются множества моментов достижения целей, а минимально опаздывающие траектории строятся один раз после нахождения оптимального назначения. Во втором алгоритме на каждой итерации находятся минимально опаздывающие траектории, а множества моментов достижения целей не применяются. Выбор алгоритма зависит от трудоемкости решения вспомогательных задач. Процедура построения множеств моментов достижения для каждого объекта управления и каждой цели требует, как правило, больших вычислительных ресурсов. Однако эта процедура, используемая в первом алгоритме, выполняется один раз. Во втором алгоритме на каждой итерации нужно для каждого объекта управления и каждой цели найти минимально опаздывающие траектории. Нахождение каждой такой траектории по вычислительным затратам обычно сравнимо с поиском оптимальной траектории. Количество итераций конечно, но заранее неизвестно. Если для решения достаточно малого числа итераций, то выгоднее использовать второй алгоритм, если итераций много, то лучше применять первый алгоритм.

Поскольку численная реализация каждого алгоритма весьма сложная, она связана с многократным решением задач оптимального управления, желательно использовать аналитические методы, упрощающие решение. Например, вместо оптимального управления применять рациональное управление, если оно находится сравнительно просто, а по качеству близко к оптимальному. Либо упростить модель движения объектов управления так, чтобы оптимальные траектории можно было получить аналитически. Решить задачу группового быстрогодействия с простыми моделями движения, а полученное управление проверить на прикладных моделях, описывающих реальное движение.

Алгоритм I решения задачи группового быстрогодействия с известными множествами моментов достижения цели. Пусть в задаче (1.3)–(1.6) группового быстрогодействия для каждого объекта управления и каждой цели известны множества $\mathbb{T}_{ij} = \mathbb{T}(x_{i0} | z_j)$ моментов достижения цели, $i = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, N$. Минимальный момент T^* одновременного достижения цели определяется равенством

$$T^* = \min_{(j_1, \dots, j_M)} \min \bigcap_{i=1, \dots, M} \mathbb{T}_{ij_i}. \quad (5.1)$$

Здесь первая операция минимизация проводится по всем размещениям (j_1, \dots, j_M) по M чисел из N возможных. Каждое размещение определяет назначение (паросочетание): первому подвижному объекту назначается j_1 -я цель, второму – j_2 -я цель и т.д. Второй минимум в формуле (5.1) обозначает выбор минимального элемента пересечения числовых множеств. Для решения вспомогательных задач назначения, возникающих на каждой итерации, применяется алгоритм, приведенный в Приложении. Алгоритм решения задачи группового быстрогодействия следующий.

Шаг 0. Назначаем нулевой не опережаемый срок $T_* = 0$ достижения целей и переходим к шагу 1.

Шаг 1. Составляем матрицу минимальных допустимых моментов достижений целей с элементами $T_{ij} = \min\{t \in \mathbb{T}_{ij} | t \geq T_*\}$.

Шаг 2. Решаем задачу минимаксного назначения с матрицей (T_{ij}) . Получаем оптимальное назначение (j_1^*, \dots, j_M^*) и рекорд

$$T^* = T(j_1^*, \dots, j_M^*) = \min_{(j_1, \dots, j_M)} \max_{i=1, \dots, M} T_{ij_i}. \quad (5.2)$$

Шаг 3. Проверяем реализуемость рекорда T^* . Если $T^* \in \mathbb{T}_{ij}$ для всех $i = 1, \dots, M$, то переходим к шагу 4, поскольку минимальный момент T^* одновременного достижения целей найден. В противном случае увеличиваем не опережаемый срок, полагая $T_* = T^*$, и переходим к шагу 1.

Шаг 4. Находим неопаздывающие траектории для момента T^* одновременного достижения целей. Решение задачи закончено.

Поясним работу алгоритма. На первой итерации, поскольку не опережаемый срок – нулевой, матрица (T_{ij}) заполняется оптимальными по быстродействию моментами достижения целей. Решая минимаксную задачу назначения, получаем первый рекорд T^* . Заметим, что $T^* > T_*$, так как все элементы матрицы (T_{ij}) не меньше T_* . В шаге 3 алгоритма выясняется, могут ли все подвижные объекты попасть в назначенные цели в рекордное время T^* . Если могут, то задача решена, осталось только построить неопаздывающие траектории (см. шаг 4). Если нет, то после увеличения минимального срока $T_* = T^*$ достижения целей возвращаемся к шагу 1. На второй и последующих итерациях (в шаге 1) матрица (T_{ij}) заполняется моментами окончания минимально опаздывающих к назначенному сроку T_* траекторий. Заметим, что число итераций конечно, поскольку количество возможных размещений равно $N! / (N - M)!$.

Алгоритм Прешения задачи группового быстродействия при помощи минимально опаздывающих траекторий.

Шаг 0. Назначаем нулевой не опережаемый срок $T_* = 0$ достижения целей и переходим к шагу 1.

Шаг 1. Составляем матрицу (T_{ij}) моментов достижения целей минимально опаздывающими к сроку T_* траекториями. Элемент T_{ij} является решением задачи минимизации опоздания i -го объекта при достижении j -й цели:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ x_i(0) &= x_{i0}, \quad x_i(T) = z_j, \\ T &\geq T_*, \\ T &\rightarrow \min, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$.

Шаг 2. Решаем задачу минимаксного назначения с матрицей (T_{ij}) . Получаем оптимальное назначение (j_1^*, \dots, j_M^*) и рекорд (5.2).

Шаг 3. Проверяем реализуемость рекорда T^* . Полагаем $T_* = T^*$ и решаем задачу (5.3) минимизации опоздания i -го объекта при достижении j_i^* -й цели, $i = 1, \dots, M$. Получаем моменты $T_{ij_i^*}$ достижения целей минимально опаздывающими к сроку T^* траекториями. Если $T_{ij_i^*} = T_*$ для всех $i = 1, \dots, M$, то все траектории неопаздывающие и решение задачи закончено. Если равенство $T_{ij_i^*} = T_*$ нарушается хотя бы для одного объекта, то имеются опаздывающие траектории. Поэтому переходим к шагу 1. (Элементы $T_{ij_i^*}$, $i = 1, \dots, M$, матрицы (T_{ij}) в шаге 1 повторно искать не надо.)

Оба алгоритма за конечное число шагов приводят к одному и тому же результату – минимальному времени одновременного достижения цели. Однако неопаздывающее управление объектами, а также решение задачи назначения находятся неоднозначно. Поэтому процессы управления, соответствующие оптимальному результату, могут отличаться.

Пример 4. Пусть на промежутке времени $[0, T]$ движение группы M подвижных объектов управления описывается уравнениями (2.4) модели Маркова–Дубинса [14–16]:

$$\dot{x}_i(t) = V_i \cos \varphi_i(t), \quad \dot{y}_i(t) = V_i \sin \varphi_i(t), \quad \dot{\varphi}_i(t) = \omega_i(t), \quad i = 1, \dots, M, \quad (5.4)$$

где x_i, y_i – координаты положения i -го объекта на плоскости Oxy , φ_i – угол направления движения, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс, V_i – постоянная линейная

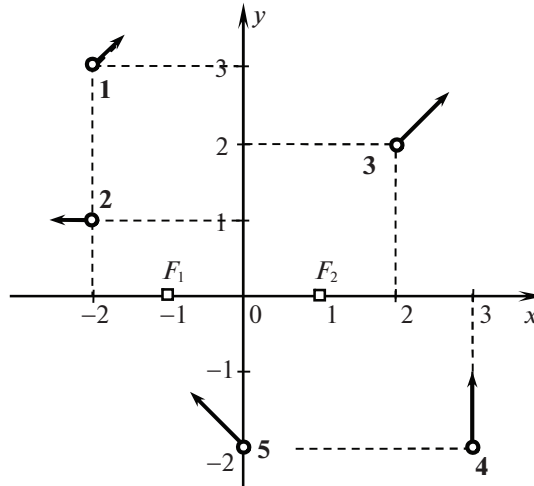


Рис. 19. Начальные состояния подвижных объектов 1–5 и положения целей F_1, F_2

скорость движения, ω_i – угловая скорость. Управлениями служат измеримые функции $\omega_i(\cdot)$, удовлетворяющие ограничению $|\omega_i| \leq \Omega_i$, где Ω_i – максимальная допустимая угловая скорость.

Начальное состояние каждого объекта группы задано равенствами

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad y_i(0) = y_{i0}, \quad \varphi(0) = \varphi_{i0}, \quad i = 1, \dots, M. \tag{5.5}$$

Конечное положение выбирается из множества целей $\{F_1(x_{F_1}, y_{F_1}), \dots, F_N(x_{F_N}, y_{F_N})\}$:

$$x_i(T) = x_{F_{j_i}}, \quad y_i(T) = y_{F_{j_i}}, \quad i = 1, \dots, M. \tag{5.6}$$

Номера целей в (5.6) попарно различные, т.е. $j_i \neq j_k$, если $i \neq k$. Иначе говоря, упорядоченный набор (j_1, \dots, j_M) представляет собой размещение (без повторений) по M чисел из N возможных, причем $M \leq N$. Конечные условия (5.6) определяют “точечные” цели на координатной плоскости Oxy . Заметим, что цели в множестве $\{F_1, \dots, F_N\}$ не обязательно различные. Например, равенство $F_1 = F_2$ (при $M = N$) означает, что в эту цель должны попасть два объекта группы. В частности, если все цели совпадают, то получаем задачу о сборе группы в одном месте в одно и то же время.

Требуется определить назначение целей и найти допустимые процессы управления объектами, при которых время T одновременного достижения всех целей будем минимальным. Иначе говоря, требуется решить задачу группового быстрогодействия

$$T \rightarrow \min. \tag{5.7}$$

В задаче (5.4)–(5.7) столкновения подвижных объектов исключаются. Можно считать, что речь идет о движении группы БПЛА, которые летят на разных высотах. Кроме того, нет фазовых ограничений, запрещенных для движения областей, конфликтных ситуаций, связанных с действиями противника [8, 25].

Рассмотрим академический пример быстрогодействия группы из пяти подвижных объектов, которые направляются в две точечные цели, причем в одну цель должны попасть два объекта, а в другую – три. Значения параметров моделей движения, начальные состояния и положения целей следующие:

$$\begin{aligned} V_1 = V_2 = 1, \quad V_3 = V_4 = V_5 = 2, \quad \Omega_1 = \dots = \Omega_5 = 1; \\ x_{10} = -2, \quad y_{10} = 3, \quad \varphi_{10} = \pi/4; \quad x_{20} = -2, \quad y_{20} = 1, \quad \varphi_{20} = \pi; \quad x_{30} = 2, \quad y_{30} = 2, \\ \varphi_{30} = \pi/4; \quad x_{40} = 3, \quad y_{40} = -2, \quad \varphi_{40} = \pi/2; \quad x_{50} = 0, \quad y_{50} = -2, \quad \varphi_{50} = 3\pi/4; \\ F_3 = F_1(-1; 0), \quad F_4 = F_5 = F_2(1; 0). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Для задачи назначения цели F_1 и F_2 “клонироваться”. В равенствах (5.8) одна цель указывается дважды, а другая – трижды. На рис. 19 начальные состояния подвижных объектов изображены

Таблица 1. Первое минимаксное назначение

Объект	Цель	Время достижения
1	F_2	4.9689
2	F_1	4.7124
3	$F_4 = F_2$	5.3616
4	$F_5 = F_2$	1.5708
5	$F_3 = F_1$	1.1252

окружностями с приложенными к ним векторами скорости, цели F_1 и F_2 – квадратиками. Объекты перенумерованы полужирными цифрами.

Решение поставленной задачи будем искать, применяя описанные выше алгоритмы. Чтобы использовать первый алгоритм, нужно для каждого объекта найти множество моментов достижения каждой цели. Учитывая решение примера 2, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{11} = \mathbb{T}_{13} &= [4.7606, +\infty), & \mathbb{T}_{12} = \mathbb{T}_{14} = \mathbb{T}_{15} &= [4.9689, +\infty), \\ \mathbb{T}_{21} = \mathbb{T}_{23} &= [4.7124, +\infty), & \mathbb{T}_{22} = \mathbb{T}_{24} = \mathbb{T}_{25} &= [6.3099, +\infty), \\ \mathbb{T}_{31} = \mathbb{T}_{33} &= [5.6469, +\infty), & \mathbb{T}_{32} = \mathbb{T}_{34} = \mathbb{T}_{35} &= [5.3616, +\infty), \\ \mathbb{T}_{41} = \mathbb{T}_{43} &= [2.5708, +\infty), & \mathbb{T}_{42} = \mathbb{T}_{44} = \mathbb{T}_{45} &= \{1.5708\} \cup [5.6397, +\infty), \\ \mathbb{T}_{51} = \mathbb{T}_{53} &= [1.1252; 1.4173] \cup [6.4366, +\infty), & \mathbb{T}_{52} = \mathbb{T}_{54} = \mathbb{T}_{55} &= [5.5321, +\infty). \end{aligned}$$

Здесь \mathbb{T}_{ij} – множество моментов достижения i -м объектом j -й цели с учетом “клонирования” (5.8). Изолированная точка в множестве \mathbb{T}_{42} соответствует частному положению цели F_2 на границе областей 2 и 3 для 4-го объекта управления.

На шаге 0 алгоритма I полагаем $T_* = 0$ и переходим к шагу 1.

Шаг 1 (первая итерация). Составляем матрицу минимальных допустимых моментов достижений целей с элементами $T_{ij} = \min\{t \in \mathbb{T}_{ij} | t \geq T_*\}$. Так как $T_* = 0$, то выбираем минимальные элементы множеств \mathbb{T}_{ij} :

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 4.7606 & \mathbf{4.9689} & 4.7606 & 4.9689 & 4.9689 \\ \mathbf{4.7124} & 6.3099 & 4.7124 & 6.3099 & 6.3099 \\ 5.6469 & 5.3616 & 5.6469 & \mathbf{5.3616} & 5.3616 \\ 2.5708 & 1.5708 & 2.5708 & 1.5708 & \mathbf{1.5708} \\ 1.1252 & 5.5321 & \mathbf{1.1252} & 5.5321 & 5.5321 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

В матрице (5.9) третий столбец совпадает с первым, а четвертый и пятый – со вторым, что соответствует “клонированию” целей (5.8).

Шаг 2 (первая итерация). Решаем задачу минимаксного назначения при помощи алгоритма, приведенного в Приложении. Для матрицы (5.9) получаем назначение (2, 1, 4, 5, 3) с рекордом $T^* = 5.3616$. В матрице (5.9) элементы найденного назначения выделены полужирным курсивом. Время достижения целей при этом назначении записаны в табл. 1. Как видим, для третьего объекта назначенная цель “дальняя”, а для остальных объектов все цели “ближние”.

Шаг 3 (первая итерация). Проверяем реализуемость рекорда $T^* = 5.3616$. Так как $T^* \notin \mathbb{T}_{45}$ и $T^* \notin \mathbb{T}_{53}$, то полученное назначение нельзя реализовать. За время T^* четвертый объект не может попасть во вторую цель, а пятый – в первую. Поэтому увеличиваем не опережаемый срок, полагая $T_* = 5.3616$, и переходим к шагу 1.

Шаг 1 (вторая итерация). Составляем матрицу минимальных допустимых моментов достижений целей с элементами $T_{ij} = \min\{t \in \mathbb{T}_{ij} | t \geq T_*\}$. Так как $T_* = 5.3616$, то выбираем элементы множеств \mathbb{T}_{ij} , соответствующие минимально опаздывающим траекториям:

Таблица 2. Второе минимаксное назначение

Объект	Цель	Время достижения цели
1	F_2	5.3616
2	F_1	5.3616
3	$F_4 = F_2$	5.3616
4	$F_3 = F_1$	5.3616
5	$F_5 = F_2$	5.5321

Таблица 3. Неопаздывающие траектории

Объект	Цель	Тип траектории	Моменты переключения управления
1	F_2	<i>LCL</i>	0.413 2.0084 3.1121
2	F_1	<i>LCL</i>	0.53 3.8539 1.158
3	$F_4 = F_2$	<i>LCL</i>	0.15 4.4484 0.94
4	$F_3 = F_1$	<i>LCL</i>	1.7 3.1416 0.7
5	$F_5 = F_2$	<i>CC</i>	0.6619 4.8702

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 5.3616 & \mathbf{5.3616} & 5.3616 & 5.3616 & 5.3616 \\ \mathbf{5.3616} & 6.3099 & 5.3616 & 6.3099 & 6.3099 \\ 5.6469 & 5.3616 & 5.6469 & \mathbf{5.3616} & 5.3616 \\ 5.3616 & 5.6397 & \mathbf{5.3616} & 5.6397 & 5.6397 \\ 6.4366 & 5.5321 & 6.4366 & 5.5321 & \mathbf{5.5321} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Шаг 2 (вторая итерация). Решаем задачу минимаксного назначения с матрицей (5.10), получаем назначение (2, 1, 4, 5, 3) с рекордом $T^* = 5.5321$. В матрице (5.10) элементы найденного назначения выделены полужирным курсивом. Время достижения целей при этом назначении записаны в табл. 2. Как видим, для пятого объекта назначенная цель “дальняя”, а для остальных объектов все цели “ближние”.

Шаг 3 (вторая итерация). Проверяем реализуемость рекорда $T^* = 5.5321$. Так как величина T^* принадлежит множествам $\mathbb{T}_{12}, \mathbb{T}_{21}, \mathbb{T}_{34}, \mathbb{T}_{43}, \mathbb{T}_{55}$, то полученное назначение (2, 1, 4, 5, 3) реализовать можно. Наименьший момент $T^* = 5.5321$ одновременного достижения целей найден. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Находим неопаздывающие траектории для момента $T^* = 5.5321$ одновременного достижения целей. В примере 3 поиск неопаздывающей траекторий каждого типа сведен к решению нелинейного уравнения с одним неизвестным τ – продолжительностью движения по допустимому участку. В табл. 3 приведены параметры полученных траекторий.

На рис. 20 полужирными линиями изображены оптимальные траектории при первом назначении, а штриховыми – неопаздывающие траектории для второго назначения. Заметим, что на второй итерации четвертому и пятому объектам были назначены другие цели, чем при первой.

Используем для решения алгоритм II.

Шаг 0. Назначаем нулевой не опережаемый срок $T_* = 0$ достижения целей и переходим к шагу 1.

Шаг 1 (первая итерация). Составляем матрицу (T_{ij}) моментов достижения целей минимально опаздывающими к сроку $T_* = 0$ траекториями. Элемент T_{ij} является решением задачи быстрого действия (см. пример 1). Получаем матрицу (5.9).

Шаг 2 (первая итерация). Решаем задачу минимаксного назначения при помощи алгоритма, приведенного в Приложении. Для матрицы (5.9) получаем назначение (2, 1, 4, 5, 3) с рекордом $T^* = 5.3616$. В матрице (5.9) элементы найденного назначения выделены полужирным курсивом.

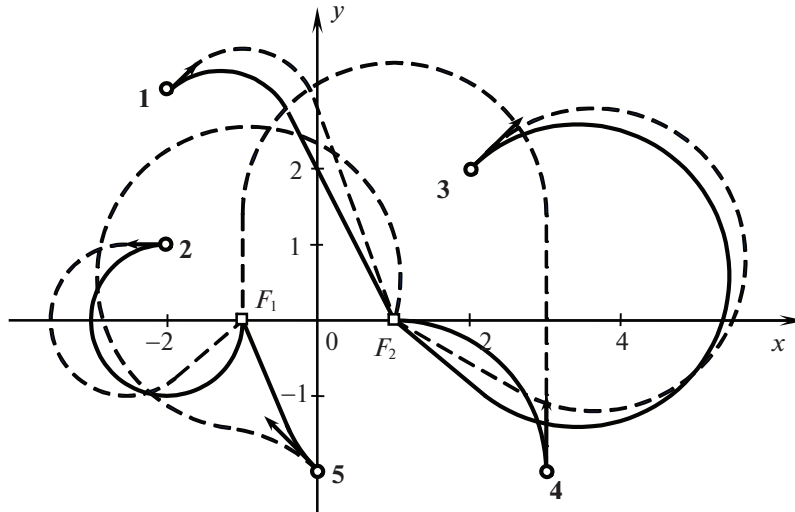


Рис. 20. Оптимальные траектории при первом назначении (полужирные линии), неопаздывающие траектории для второго назначения (штриховые линии).

Время достижения целей при этом назначении записаны в табл. 1. Как видим, для третьего объекта назначенная цель “дальняя”, а для остальных объектов все цели “ближние”.

Шаг 3 (первая итерация). Проверяем реализуемость рекорда $T^* = 5.3616$. Полагаем $T_* = T^* = 5.3616$ и решаем задачу минимизации опоздания для найденного назначения (см. пример 3). Получаем

$$T_{12} = 5.3616, \quad T_{21} = 5.3616, \quad T_{34} = 5.3616, \quad T_{45} = 5.6397, \quad T_{52} = 5.5321.$$

Поскольку $T_{45} \neq T_*$ (и $T_{52} \neq T_*$), значит, имеются опаздывающие траектории. Поэтому назначение не реализуемо, переходим к шагу 1.

Шаг 1 (вторая итерация). Составляем матрицу (T_{ij}) моментов достижения целей минимально опаздывающими к сроку $T_* = 5.3616$ траекториями. Получаем матрицу (5.10).

Шаг 2 (вторая итерация). Решаем задачу минимаксного назначения для матрицы (5.10). Получаем назначение (2, 1, 4, 5, 3) с рекордом $T^* = 5.5321$. В матрице (5.10) элементы найденного назначения выделены полужирным курсивом.

Шаг 3 (вторая итерация). Проверяем реализуемость рекорда $T^* = 5.5321$. Полагаем $T_* = T^* = 5.5321$ и решаем задачу минимизации опоздания для найденного назначения (см. пример 3). Получаем $T_{12} = T_{21} = T_{34} = T_{43} = T_{55} = 5.3616$. Так как все траектории назначения неопаздывающие, значит, это назначение реализуемо. Решение задачи закончено, параметры неопаздывающих траекторий группы представлены в табл. 3.

Оба алгоритма привели к одному и тому же решению. Это совпадение обусловлено тем, что решение задачи назначения и построение минимально опаздывающих траекторий выполнялось в обоих алгоритмах одними и теми же методами. Если применять другие методы, то получим разные неопаздывающие траектории и, возможно, разные назначения. При этом, конечно, минимальное время одновременного достижения целей находится однозначно любым точным алгоритмом.

Заключение. Поставлена задача минимизации опоздания динамической системы, которая является модификацией задачи быстродействия, а также задача поиска множества моментов достижения терминального состояния. Обе задачи тесно связаны с задачей группового быстродействия. Предложены два алгоритма решения задачи быстродействия группы подвижных объектов, а именно минимизации времени одновременного достижения всех целей. Эффективность этих алгоритмов в общем случае зависит от динамики управляемых систем. В статье приведена конкретная реализация обоих алгоритмов для модели Маркова–Дубинса, т.е. задача группового быстродействия машин Маркова–Дубинса полностью решена. Это решение можно использовать при планировании траекторий летательных аппаратов в многочисленных приложениях.

Дальнейшие исследования в этом направлении связаны с известными обобщениями задач группового управления: учетом взаимодействий между объектами группы, противодействием противника, наличием запрещенных для движения областей и т.п.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Алгоритм решения задачи минимаксного назначения. Задача минимаксного назначения или, что то же самое, линейная задача назначения узких мест (см. разд. 1) сводится к следующей задаче целочисленной оптимизации. Для заданной матрицы $T = (T_{ij})$ размеров $M \times N$, элементы которой равны времени достижения целей (T_{ij} – время движения i -го объекта до j -й цели), найти минимальное значение T^* и оптимальное размещение (J_1^*, \dots, J_M^*) , на котором это значение достигается:

$$T^* = \min_{(J_1, \dots, J_M)} \max_{i=1, \dots, M} T_{i J_i}. \tag{П.1}$$

Минимизация проводится по всем размещениям (j_1, \dots, j_M) по M чисел из N возможных.

Для решения задачи применяется метод ветвей и границ, согласно которому вместо полного перебора всех размещений строится минимизирующая последовательность размещений $\{(J_1^s, \dots, J_M^s)\}$, $s = 1, 2, \dots$, приводящая к монотонному убыванию минимизируемой функции (П.1):

$$T^1 > T^2 > \dots > T^s > \dots, \tag{П.2}$$

где $T^s = T(j_1^s, \dots, j_M^s)$. Последовательность (П.2) конечная, так как количество вариантов размещений ограничено.

Для работы алгоритма кроме матрицы T размеров $M \times N$, элементы которой равны времени достижения целей (T_{ij} – время движения i -го объекта до j -й цели), потребуется также матрица J размеров $M \times N$ для записи размещений. В i -й строке матрицы J будем записывать последовательно номера целей, доступных для i -го объекта. Оставшиеся элементы этой строки – нулевые. Первый столбец матрицы J определяет размещение (J_{11}, \dots, J_{M1}) , т.е. первому объекту назначена цель J_{11} , второму – J_{21} и т.д. Остальные столбцы вспомогательные. Например, в начале, пока нет ни одного элемента последовательности (П.2), в первую строку записываем номера всех целей; во вторую – всех целей, кроме цели J_{11} , которая назначена для первого объекта, и т.д. Если уже получено значение T^s последовательности (П.2), то в первую строку заносим номера тех целей, время достижения которых первым объектом меньше T^s , т.е. $T_{1j} < T^s$, $j = 1, \dots, N$; во вторую строку – номера целей, для которых $T_{2j} < T^s$, $j = 1, \dots, N$, $j \neq J_{11}$, кроме выбранной для первого объекта, и т.д. Подчеркнем еще раз, что только первый столбец матрицы J определяет “настоящее” размещение. Остальные столбцы предназначены для генерации вариантов. Например, при сдвиге всех элементов последней строки на одну позицию влево в первом столбце получаем новое размещение.

Перейдем к описанию алгоритма. Пусть матрица J нулевая ($J = O$), $s = 0$, $T^0 = +\infty$.

Шаг 1. Если матрица $J = O$, то полагаем $k = 1$ и переходим к шагу 2. Если матрица $J \neq O$ (в ней только первые k строк ненулевые, $k < M$, а ненулевые элементы первого столбца составляют часть назначения (J_{11}, \dots, J_{k1})), то полагаем $k = k + 1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Дополняем строки матрицы J , начиная с первой нулевой строки k :

в k -ю строку записываем номера столбцов элементов k -й строки матрицы T , которые меньше T^s , при этом не учитываются столбцы с выбранными ранее парами (i, J_{i1}) , $i = 1, \dots, k$;

в $(k + 1)$ -ю строку записываем номера столбцов элементов $(k + 1)$ -й строки матрицы T , которые меньше T^s , при этом не учитываются столбцы с ранее выбранными парами (i, J_{i1}) , $i = 1, \dots, k + 1$, и т.д.

Если удалось заполнить все M строк, то получено новое назначение (J_{11}, \dots, J_{M1}) . Тогда вычисляем новое значение

$$T^{s+1} = \max_{i=1, \dots, M} T_{i J_{i1}}.$$

Полагаем $J = O$, $s = s + 1$ и переходим к шагу 1.

Если заполнить все строки не удалось, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. Если матрица $J = O$, то решение закончено и переходим к шагу 4. Если матрица $J \neq O$ (в ней только первые k строк ненулевые, $k < M$). Сдвигаем все элементы k -й строки на одну позицию влево $J_{kj} = J_{kj+1}$, $j = 1, N - 1$, дополняя эту строку последним нулевым элементом $J_{kN} = 0$. Если k -я строка оказалась нулевой, то выполняем сдвиг элементов в $(k - 1)$ -й строке и т.д. Если в матрице J остались ненулевые строки, то переходим к шагу 2. В противном случае (при $J = O$) решение закончено и переходим к шагу 4.

Шаг 4. Последнее назначение (J_{11}, \dots, J_{M1}) и значение T^{s+1} минимизируемой функции, найденные в шаге 2, являются оптимальным назначением и минимаксным значением времени достижения всех целей соответственно.

Количество вычислений можно немного уменьшить, заменяя начальное значение $T^0 = +\infty$, например, величиной

$$T^1 = \max_{i=1, \dots, M} T_{ii},$$

которая соответствует размещению $(1, 2, \dots, M)$. Первое размещение можно получить, выбирая для первого объекта ближайшую к нему цель, которой соответствует наименьший элемент в первой строке матрицы T , для второго – ближайшую к нему цель, не совпадающую с целью, выбранной для первого, и т.д. Конечно, такой выбор первого размещения не меняет оценку объема вычислений в общем случае, но может сократить его в конкретном примере. Отметим также, что алгоритм находит одно из возможных решений, если их несколько.

При $M = N$ можно поставить задачу обязательного достижения некоторых целей несколькими объектами. Для таких целей нужно записать в матрице T несколько равных столбцов. Например, если первые три столбца матрицы T совпадают, то в одну цель будет направлено три подвижных объекта.

Пример 5. Время достижения каждым из четырех подвижных объектов каждой из пяти целей указано в матрице

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти минимальное значение T^* максимальной продолжительности движения

$$T^* = \min_{(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)} \max\{T_{1j_1}, T_{2j_2}, T_{3j_3}, T_{4j_4}, T_{5j_5}\},$$

а также оптимальное назначение $(j_1^*, j_2^*, j_3^*, j_4^*, j_5^*)$, на котором это значение достигается.

Решение. Применяя алгоритм, получаем последовательно назначения и соответствующие значения минимизируемой функции $T(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5) = \max\{T_{1j_1}, T_{2j_2}, T_{3j_3}, T_{4j_4}, T_{5j_5}\}$:

$$T(1, 2, 3, 4) = 5; \quad T(2, 1, 5, 3) = 4; \quad T(2, 3, 1, 5) = 3; \quad T(2, 5, 1, 3) = 2.$$

Потребовалось построить четыре назначения, т.е. минимизирующая последовательность (П.2) имеет четыре элемента. Полный перебор всех 120 размещений показывает, что имеется еще два решения, кроме полученного, а именно: $(4, 5, 1, 2)$, $(4, 5, 1, 3)$, которые дают, разумеется, тот же самый минимум.

Пример 6. Время достижения каждым из четырех подвижных объектов каждой из четырех целей указано в матрице

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку первый и второй, третий и четвертый столбцы совпадают, то фактически имеется две цели, в каждую из которых должны быть направлены по два объекта. Требуется найти минимальное значение T^* максимальной продолжительности движения

$$T^* = \min_{(j_1, j_2, j_3, j_4)} \max\{T_{1j_1}, T_{2j_2}, T_{3j_3}, T_{4j_4}\},$$

а также оптимальное назначение $(j_1^*, j_2^*, j_3^*, j_4^*)$, на котором это значение достигается.

Решение. Применяя алгоритм, получаем последовательно назначения и соответствующие значения минимизируемой функции $T(j_1, j_2, j_3, j_4) = \max\{T_{1j_1}, T_{2j_2}, T_{3j_3}, T_{4j_4}\}$:

$$T(1, 2, 3, 4) = 5; \quad T(1, 3, 2, 4) = 3; \quad T(3, 4, 1, 2) = 2.$$

Потребовалось построить три назначения, т.е. минимизирующая последовательность (П.2) имеет три элемента. Полный перебор всех 16 перестановок показывает, что имеется еще три решения, кроме полученного, а именно: (4, 3, 2, 1), (4, 3, 1, 2), (3, 4, 2, 1), которые дают, разумеется, тот же самый минимум.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит, 2009.
2. *Куржанский А.Б.* Задача управления групповым движением. Общие соотношения // Докл. РАН. 2009. Т. 426. № 1. С. 20–25.
3. *Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М.* Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48. № 4. С. 593–600.
4. *Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н., Оркин С.Д.* Управление смешанными группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов в условиях единого информационно-управляющего поля. М.: Изд-во МАИ, 2015.
5. *Гончаренко В.И., Желтов С.Ю., Князь В.А., Лебедева Г.Н., Михайлина Д.А., Царева О.Ю.* Интеллектуальная система планирования групповых действий беспилотных летательных аппаратов при наблюдении наземных мобильных объектов на заданной территории // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 3. С. 39–56.
6. *Tsourdos A., White B., Shanmugavel M.* Cooperative Path Planning of Unmanned Aerial Vehicles. N. Y.: Wiley&Sons, 2011.
7. *Jia Zeng, Xiaoke Yang, Lingyu Yang, Gongzhang Shen.* Modeling for UAV Resource Scheduling Under Mission Synchronization // J. Systems Engineering and Electronics. 2010. V. 21. № 5. P. 821–826.
8. *Babel L.* Coordinated Target Assignment and UAV Path Planning with Timing Constraints // J. Intelligent & Robotic Systems. 2019. V. 94 (3–4). P. 857–869.
9. *Бортаковский А.С., Щелчков К.А.* Задачи группового быстрогодействия летательных аппаратов // Тр. МАИ. 2018. № 99. http://mai.ru/upload/iblock/33c/Bortakovskiy_SHCHelchkov_rus.pdf.
10. *Poudel S., Moh S.* Task Assignment Algorithms for Unmanned Aerial Vehicle Networks: A Comprehensive Survey // Vehicular Communications. 2022. V. 35. P. 100469.
11. *Бузиков М.Э., Галяев А.А.* Перехват подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время // АиТ. 2021. № 5. С. 3–19.
12. *Галяев А.А., Рубинович Е.Я.* Планирование движения подвижных объектов в конфликтной среде // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. XI Междунар. Четаевской конф. (плерарные доклады). Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. С. 71–90.
13. *Mohsan S.A.H., Othman N.Q.H., Li Y. et al.* Unmanned Aerial Vehicles (UAVs): Practical Aspects, Fpplications, Open Challenges, Security Issues, and Future Trends. Intel Serv Robotics. 2023. V. 16. P. 109–137.
14. *Марков А.А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьк. мат. общества. Сер. 2. Т. I. 1889. С. 250–276.
15. *Dubins L.E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American. Mathematics. 1957. V. 79. № 3. P. 497–516.
16. *Isaacs R.* Games of Pursuit // Scientific Report of the RAND Corporation. Santa Monica, 1951.
17. *Бортаковский А.С.* Оптимальные по быстроддействию траектории плоского движения с неограниченной кривизной // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 38–48.
18. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости для машины Дубинса: сведение общего случая ограничений на повороты к каноническому // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 4. С. 25–49.
19. *Диниц Е.А.* О решении двух задач о назначении // Исследования по дискретной оптимизации. М.: Наука, 1976. С. 333–348.
20. *Глебов Н.И.* Об одном обобщении минимаксной задачи о назначениях // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2004. Т. 11. Вып. 4. С. 36–43.
21. *Серая О.В.* Минимаксная задача назначения // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2009. Т. 3. № 3(39). С. 8–11.

22. *Fulkerson D.R., Glicksberg I., Gross O.* A Production Line Assignment Problem. Tech. Rep. RM-1102, The Rand Corporation. Santa Monica. CA, 1953.
23. *Burkard R., Dell'Amico M., Martello S.* Assignment Problems: Revised Reprint. Siam, 2012. Т. 125.
24. *Gottlieb Y.; Shima T.* UAVs Task and Motion Planning in the Presence of Obstacles and Prioritized Targets // *Sensors*. 2015. V. 15. P. 29734–29764. <https://doi.org/10.3390/s151129734>
25. *Zhu X., Peng R.* Optimal Routing, Aborting and Hitting Strategies of UAVs Executing Hitting the Targets Considering the Defense Range of Targets // *Reliability Engineering and System Safety*. 2021. V. 215. P. 107811.
26. *Кофман А., Анри-Лабордер А.* Методы и модели исследования оптимизации. Целочисленное программирование. М.: Мир, 1976.
27. *Garfinkel R.* An Improved Algorithm for the Bottleneck Assignment Problem // *Oper. Res.* 1971. V. 19. P. 1747–1751.
28. *Derigs U., Zimmermann U.* An Augmenting Path Method for Solving Linear Bottleneck Assignment Problems // *Computing*. 1978. V. 19. P. 285–295.
29. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
30. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
31. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
32. *Грачев Н.И., Евтушенко Ю.Г.* Библиотека программ для решения задач оптимального управления // *ЖВМ и МФ*. 1979. Т.10. № 2. С. 367–387.
33. *Cockayne E.J., Hall G.W.C.* Plane Motion of a Particle Subject to Curvature Constraints // *SIAM J. Control and Optimization*. 1975. V. 13. № 1. P. 197–220.
34. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
35. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
36. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
37. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.