

УДК 531.36

## О КОЛЕБАНИЯХ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ С НЕСКОЛЬКИМИ ПОДВИЖНЫМИ МАССАМИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ ЭФФЕКТ ГАЛОПИРОВАНИЯ<sup>1</sup>

© 2023 г. Б. Я. Локшин<sup>а</sup>, Ю. Д. Селюцкий<sup>а,\*</sup><sup>а</sup>НИИ механики МГУ, Москва, Россия

\*e-mail: seliutski@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 18.04.2023 г.

После доработки 02.05.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

Рассматривается цепочка из нескольких тел, которые могут перемещаться поступательно вдоль некоторой горизонтальной прямой. Соседние тела связаны друг с другом пружинами. Один конец цепочки закреплен, а на другом находится тело, представляющее собой прямоугольный параллелепипед квадратного сечения. Система помещена в горизонтальный стационарный поток среды, перпендикулярный указанной прямой. В предположении, что поток воздействует только на параллелепипед, исследуется динамика этой системы как потенциального рабочего элемента ветроэнергетической установки колебательного типа, использующей эффект галопирования. Для разного количества тел в цепочке, различных значениях скорости потока и внешней нагрузки изучаются периодические режимы в системе. Показано, в частности, что увеличение числа тел в цепочке позволяет увеличить максимальную мощность, которая может быть получена с помощью устройства, и уменьшить критическую скорость, при которой возникают колебания. Предложена схема регулирования нагрузочного сопротивления, направленная на обеспечение перехода на колебательный режим с максимальной мощностью.

DOI: 10.31857/S0002338823050116, EDN: OIXVFO

**Введение.** Известно, что при определенных условиях тела “плохообтекаемой” формы (типа призмы, цилиндра и т.п.) могут совершать поступательные колебания в направлении поперек набегающего потока. Это явление получило название галопирования. Его возникновение связано с тем, что при определенной ориентации плохообтекаемого тела относительно набегающего потока аэродинамические силы создают отрицательное демпфирование.

В отличие от колебаний, индуцированных сходом вихрей с поверхности тела, галопирование достаточно эффективно описывается в рамках квазистатического подхода, когда аэродинамические силы считаются зависящими только от текущих значений фазовых координат и скоростей тела. С помощью этого подхода в [1] был получен критерий возникновения галопирующих колебаний обледеневших проводов. В работах [2, 3] было показано, что квазистатический подход позволяет обеспечить достаточно точное описание данного явления для прямоугольного параллелепипеда. Вообще говоря, галопированию подвержены плохообтекаемые тела с разной формой поперечного сечения. В этом обзоре мы ограничимся только работами, в которых рассматриваются тела, имеющие острые кромки (призмы и т.п.).

В [3, 4] показано, что в определенном диапазоне скоростей набегающего потока существуют два притягивающих цикла (имеет место гистерезис амплитуды колебаний). Эти результаты согласуются с экспериментами. Следует отметить, что аэродинамические характеристики исследуемых в этих работах призм таковы, что возникновение галопирования сопровождается мягкой потерей устойчивости. В [5] исследована взаимосвязь между характером зависимости коэффициента поперечной аэродинамической силы от угла атаки и количеством притягивающих предельных циклов, а также размером зоны гистерезиса. Установлено, что при определенных формах зависимости возможна “жесткая” потеря устойчивости. В [6] проведено исследование зави-

<sup>1</sup> Исследование выполнено при поддержке РФФ (грант № 22-29-00472).

симости амплитуд предельных циклов при галопировании от скорости потока для прямоугольных параллелепипедов разного удлинения.

Аэродинамические силы, действующие на прямоугольные параллелепипеды, изучались в целом ряде экспериментальных работ. В частности, в [7, 8] приведены результаты измерений аэродинамических сил, действующих на параллелепипеды с квадратным сечением, в зависимости от угла атаки (причем в [8] исследуется также конфигурация, в которой к параллелепипеду прикреплена плоская пластина). В [9] описаны эксперименты, в которых измерялась непосредственно нестационарная аэродинамическая сила, возникающая при галопировании прямоугольного параллелепипеда, и предложен эмпирический подход для моделирования этой силы.

С точки зрения обеспечения прочности конструкций и снижения их износа, необходимо предотвращать возникновение галопирования или, по крайней мере, уменьшать его интенсивность. В ряде работ рассматриваются различные способы достижения этой цели, например, [10–12].

Однако уже достаточно давно было предложено (в частности, в [13]) использовать галопирование тел для преобразования энергии потока в электричество. Растущий интерес к различным системам, основанным на использовании возобновляемой энергии, привел к появлению исследований, рассматривающих различные варианты таких ветроэнергетических установок. В [14, 15] рассматриваются системы, в которых галопирующее тело (призма) соединено с линейным генератором на постоянном магните, и исследуется влияние параметров (в частности, ориентации призмы относительно потока) на характеристики колебаний. В других работах (например, [16–19]) изучаются системы, в которых электричество вырабатывается с помощью пьезоэлементов. Так, для прямоугольного параллелепипеда, консольно закрепленного в потоке с помощью упругой балки, в [17] предложено аналитическое решение, приближенно описывающее колебания в системе, а в [18] анализируется влияние формы балки на характеристики колебаний. В [19] проведено экспериментальное исследование влияния формы поперечного сечения призмы на выходную мощность и отмечено, что максимальная мощность была достигнута в случае, когда это сечение имеет воронкообразную форму. В [20] обсуждается влияние закруглений углов призмы с квадратным сечением и угла атаки на мощность, получаемую при галопировании, и отмечается, что закругление углов приводит к некоторому уменьшению мощности, но делает систему менее чувствительной к изменению угла атаки.

В [21–23] рассматриваются системы, в которых к плохообтекаемому телу, совершающему галопирующие колебания в потоке, прикреплено еще одно тело, которое не взаимодействует с потоком. Показано, что при определенных схемах соединения тел можно обеспечить уменьшение критической скорости потока (при которой теряется устойчивость равновесия) и увеличить выходную мощность.

В работе исследуется динамика галопирующей ветроэнергетической установки, содержащей несколько последовательно соединенных пружинами подвижных масс и линейный генератор. Анализируется влияние параметров системы на область устойчивости равновесия. Проводится численное и аналитическое исследование периодических режимов. Изучается влияние количества звеньев, скорости потока и внешнего сопротивления на выходную мощность системы. Обсуждается возможность регулирования нагрузки с целью максимизации мощности, отбираемой у потока.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим цепочку из  $n$  тел  $M_1, \dots, M_n$  (рис. 1), которые могут двигаться поступательно вдоль некоторой неподвижной горизонтальной прямой  $\ell$ . Все тела, кроме  $n$ -го, представляют собой материальные точки, а тело  $M_n$  – прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат. Боковые грани параллелепипеда вертикальны, причем две из них перпендикулярны прямой  $\ell$ . Соседние тела в цепочке соединены друг с другом линейно-упругими пружинами. Тело  $M_1$  соединено пружиной с некоторой неподвижной точкой  $O$ , лежащей на прямой  $\ell$ . К телу  $M_n$  жестко прикреплен постоянный магнит, который расположен внутри катушки индуктивности. Катушка включена в электрическую цепь, которая содержит также нагрузочное сопротивление  $R$ . При перемещении тела  $M_n$  магнит движется внутри катушки, и в цепи индуцируется электрический ток.

Система помещена в стационарный поток среды, скорость которого на бесконечности равна  $V$ , горизонтальна и перпендикулярна прямой  $\ell$ . Будем считать, что поток воздействует только на тело  $M_n$ .

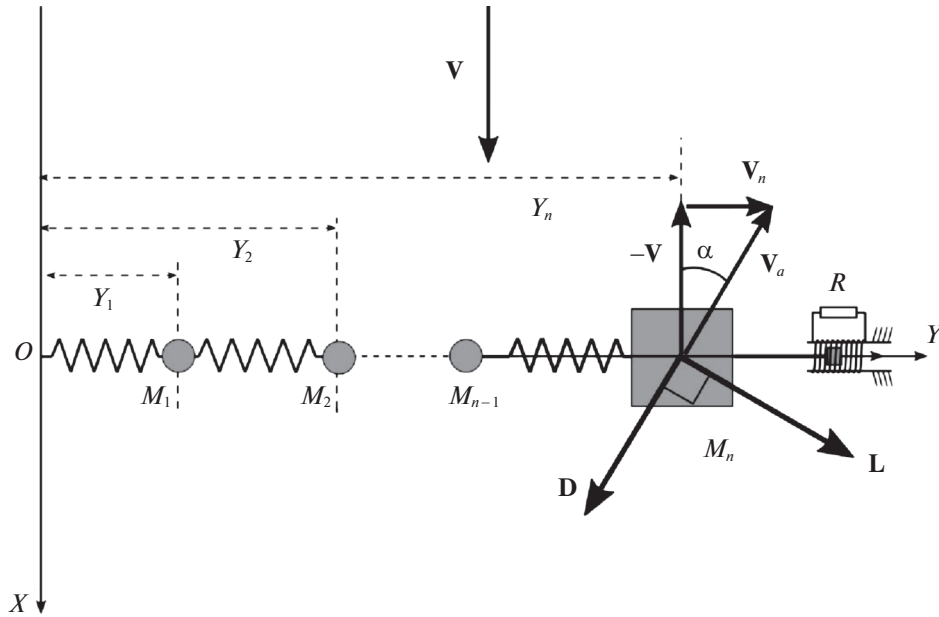


Рис. 1. Схема цепочки тел, совершающих галопирующие колебания (вид сверху).

Введем в горизонтальной плоскости неподвижную систему координат  $OXY$ , ось абсцисс  $OX$  которой направим вдоль скорости набегающего потока, а ось ординат — вдоль прямой  $\ell$ . Выберем в качестве обобщенных координат ординаты  $Y_1, \dots, Y_{n-1}$  точек  $M_1, \dots, M_{n-1}$  и ординату  $Y_n$  центра масс параллелепипеда  $M_n$ .

Будем предполагать, что поток действует только на параллелепипед, причем это воздействие сводится к силе лобового сопротивления  $\mathbf{D}$  и боковой силе  $\mathbf{L}$ , приложенным в геометрическом центре  $G$  параллелепипеда. Сила  $\mathbf{D}$  направлена против воздушной скорости  $\mathbf{V}_a$  точки  $G$  (т.е. скорости относительно набегающего потока), сила  $\mathbf{L}$  — перпендикулярно ей. Воспользуемся квазистатическим подходом, т.е. будем считать, что аэродинамические силы зависят только от мгновенных значений фазовых координат и скоростей тела (применимость этого подхода для широкого спектра задач движения тела в среде обсуждается, в частности, в [24, 25]). Тогда величины сил  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{L}$  определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\rho S}{2} V_a^2 C_d(\alpha), & L &= \frac{\rho S}{2} V_a^2 C_l(\alpha), \\ V_a &= \sqrt{V^2 + \dot{Y}_n^2}, & \alpha &= \arctg \frac{\dot{Y}_n}{V}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды,  $S$  — площадь боковой грани параллелепипеда,  $C_d$  и  $C_l$  — безразмерные коэффициенты, которые считаются зависящими только от мгновенного угла атаки  $\alpha$  — угла между вектором  $\mathbf{V}_a$  и внешней нормалью к соответствующей грани параллелепипеда.

Процессы в электрической цепи будем описывать аналогично [14, 26]:

$$L_c \dot{I} = C \dot{Y}_n - (R + R_c) I, \quad (1.2)$$

где  $I$  — ток в цепи,  $L_c$  и  $R_c$  — индуктивность и внутреннее сопротивление катушки,  $C$  — коэффициент электромеханического взаимодействия.

С учетом соотношений (1.1) и (1.2) полную систему уравнений динамики рассматриваемой электромеханической системы можно записать следующим образом:

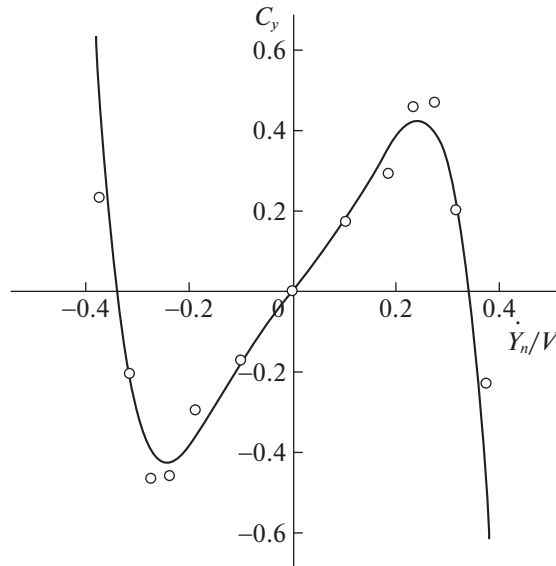


Рис. 2. Зависимость коэффициента  $C_y$  от скорости тела.

$$\begin{aligned}
 m_i \ddot{Y}_i + K_i (Y_i - Y_{i-1}) + H_i (\dot{Y}_i - \dot{Y}_{i-1}) + K_{i+1} (Y_i - Y_{i+1}) + H_{i+1} (\dot{Y}_i - \dot{Y}_{i+1}) &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
 m_n \ddot{Y}_n + K_n (Y_n - Y_{n-1}) + H_n (\dot{Y}_n - \dot{Y}_{n-1}) &= \frac{\rho S}{2} (V^2 + \dot{Y}_n^2) (C_l(\alpha) \cos \alpha - C_d(\alpha) \sin \alpha) - CI, \\
 L_c \dot{I} &= C \dot{Y}_n - (R + R_c) I.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь  $m_i$  – масса тела  $M_i$ ,  $K_i$  и  $H_i$  – коэффициенты жесткости и демпфирования пружины, соединяющей тела  $M_i$  и  $M_{i+1}$ . Кроме того,  $Y_0 \equiv 0$ .

Для сокращения записи введем следующее обозначение:

$$C_y = C_l(\alpha) \cos \alpha - C_d(\alpha) \sin \alpha.$$

Зависимости коэффициента  $C_y$  поперечной аэродинамической силы от угла атаки определялись для разных прямоугольных параллелепипедов в целом ряде экспериментальных работ. На рис. 2 точками показаны экспериментальные данные из работы [8]. Будем аппроксимировать функцию  $C_y$  полиномом пятой степени от величины  $\dot{Y}_n/V$ :

$$C_y = C_{y1} \frac{\dot{Y}_n}{V} + C_{y3} \left( \frac{\dot{Y}_n}{V} \right)^3 + C_{y5} \left( \frac{\dot{Y}_n}{V} \right)^5, \tag{1.4}$$

где  $C_{y1} > 0$ ,  $C_{y5} < 0$ .

Сплошной линией на рис. 2 изображена аппроксимационная кривая (1.4) при следующих значениях коэффициентов:

$$C_{y1} = 1.6, \quad C_{y3} = 17.5, \quad C_{y5} = -272.3. \tag{1.5}$$

Из рис. 2 видно, что качество аппроксимации достаточно хорошее. В дальнейшем будем считать, что  $C_{y3} > 0$ , а при численном моделировании будем пользоваться значениями (1.5).

Введем безразмерные величины следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \tau = t \sqrt{\frac{K_n}{M}}, \quad y_i = \frac{Y_i}{b}, \quad \iota = \frac{IR_c}{Cb} \sqrt{\frac{M}{K_n}}, \quad \mu_i = \frac{m_i}{M}, \quad k_i = \frac{K_i}{K_n}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
 \nu = \frac{V}{b} \sqrt{\frac{M}{K_n}}, \quad h_i = \frac{H_i}{\sqrt{MK_n}}, \quad \mu = \frac{\rho S b}{2M}, \quad L = \frac{L_c}{R_c} \sqrt{\frac{K_n}{M}}, \quad r = \frac{R}{R_c}, \quad \chi = \frac{C^2}{R_c \sqrt{MK_n}}.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  – масса всей системы,  $b$  – характерный размер параллелепипеда (например, длина стороны основания). Параметр  $\mu$  характеризует относительную плотность среды.

С учетом (1.6), уравнения динамики системы в безразмерном виде будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} \mu_i y_i'' + k_i (y_i - y_{i-1}) + h_i (y_i' - y_{i-1}') + k_{i+1} (y_i - y_{i+1}) + h_{i+1} (y_i' - y_{i+1}') &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \mu_n y_n'' + (y_n - y_{n-1}) + h_n (y_n' - y_{n-1}') &= \mu (v^2 + y_n'^2) \left( C_{y1} \frac{y_n'}{v} + C_{y3} \left( \frac{y_n'}{v} \right)^3 + C_{y5} \left( \frac{y_n'}{v} \right)^5 \right) - \chi \mathfrak{l}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$L\mathfrak{l}' = y_n' - (r+1)\mathfrak{l}.$$

Здесь штрихом обозначена производная по безразмерному времени, а  $k_n = 1$ .

Чтобы несколько упростить параметрический анализ системы (1.7), будем в дальнейшем считать, что массы всех материальных точек равны (т.е.  $\mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = \mu_0$ ), а все пружины между материальными точками и между точками  $O$  и  $M_1$  одинаковы:  $k_1 = \dots = k_{n-1} = k_0$  и  $h_1 = \dots = h_{n-1} = h_0$ .

Будем считать, что индуктивность весьма мала. Тогда в последнем уравнении возникает малый параметр при старшей производной. В дальнейшем ограничимся рассмотрением вырожденной в смысле Тихонова системы:

$$\begin{aligned} \mu_0 y_i'' + k_i (y_i - y_{i-1}) + h_i (y_i' - y_{i-1}') + k_{i+1} (y_i - y_{i+1}) + h_{i+1} (y_i' - y_{i+1}') &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \mu_n y_n'' + (y_n - y_{n-1}) + h_n (y_n' - y_{n-1}') &= \mu (v^2 + y_n'^2) \left( C_{y1} \frac{y_n'}{v} + C_{y3} \left( \frac{y_n'}{v} \right)^3 + C_{y5} \left( \frac{y_n'}{v} \right)^5 \right) - \frac{\chi}{r+1} y_n', \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\mathfrak{l} = \frac{y_n'}{r+1}.$$

Система (1.8), очевидно, имеет единственную неподвижную точку, а именно тривиальную.

**2. Устойчивость и периодические решения.** Линеаризуем систему (1.8) в окрестности тривиального равновесия. Получим

$$\mathbf{M}y'' + \mathbf{B}y' + \mathbf{A}y = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\mu_0 \ \mu_0 \ \dots \ \mu_n),$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2h_0 & -h_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -h_0 & 2h_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2h_0 & -h_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -h_0 & h_n + h_0 & -h_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -h_n & -C_{y1}v\mu + h_n + \tilde{\chi} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2k_0 & -k_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_0 & 2k_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2k_0 & -k_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -k_0 & 1 + k_0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\tilde{\chi} = \chi/(r+1)$ .

Легко показать (например, методом математической индукции), что главные миноры  $A_i$  и  $B_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  определяются следующими формулами:

$$A_i = (i + 1)k_0^i, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad A_{n-1} = k_0^{n-1} + (n-1)k_0^{n-2}, \quad A_n = \det \mathbf{A} = k_0^{n-1},$$

$$B_i = (i + 1)h_0^i, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad B_{n-1} = h_0^{n-1} + (n-1)h_n h_0^{n-2},$$

$$B_n = \det \mathbf{B} = h_0^{n-2} (h_n h_0 + (-C_{y1} v \mu + \tilde{\chi})(h_0 + (n-1)h_n)).$$

Заметим, что все  $A_i > 0$ , а если

$$v < v_1(\tilde{\chi}) = \frac{h_n h_0}{(h_0 + (n-1)h_n) C_{y1} \mu} + \frac{\tilde{\chi}}{C_{y1} \mu},$$

то и все  $B_i > 0$ , значит, имеет место полная диссипация, и тривиальное равновесие асимптотически устойчиво. Отметим, что  $C_{y1} > 0$ , следовательно,  $v_1$  растет с ростом  $\tilde{\chi}$ .

Характеристический полином системы (2.1) имеет вид

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{2n} p_i \lambda^i,$$

причем  $p_0 = \det \mathbf{A} = k_0^{n-1}$  и, кроме того,

$$p_1 = -C_{y1} v \mu + \tilde{\chi} + h_n \quad \text{при} \quad n = 1$$

и

$$p_1 = \mu_0^{n-1} (-C_{y1} v \mu + \tilde{\chi} + h_n) + \mu_n \mu_0^{n-2} (h_n + h_0(2n-3)) \quad \text{при} \quad n > 1.$$

Формулы для остальных коэффициентов  $p_i$  достаточно громоздки при  $n > 1$  и здесь не приводятся.

Из выражения для свободного члена видно, что при  $k_0 \neq 0$  характеристический полином не имеет нулевых корней и поэтому возможна только потеря устойчивости колебательного типа. Заметим также, что если скорость потока достаточно велика, так что

$$v > v_2(\tilde{\chi}) = \frac{\mu_n (h_n + h_0(2n-3)) \operatorname{sgn}(n-1)}{\mu_0 C_{y1} \mu} + \frac{\tilde{\chi} + h_n}{C_{y1} \mu},$$

то  $p_1 < 0$  и имеет место неустойчивость.

Видно, что  $v_1(\tilde{\chi}) \leq v_2(\tilde{\chi})$ , причем равенство достигается только в случае  $n = 1$ . Соответственно существует такое  $v_1(0) \leq v_0 \leq v_2(0)$ , что при  $\tilde{\chi} = 0$  и  $v < v_0$  равновесие асимптотически устойчиво, а при  $v > v_0$  — неустойчиво.

Рассмотрим ситуацию, когда коэффициенты демпфирования пружин, плотность среды и коэффициент электромеханического взаимодействия малы:

$$h_0 \sim h_n \sim \chi \sim \mu, \quad \mu \ll 1. \quad (2.2)$$

Предположим, кроме того, что

$$C_{y1} \sim 1, \quad C_{y3} \sim \mu^{-1}, \quad C_{y5} \sim \mu^{-2}. \quad (2.3)$$

Будем считать, что остальные параметры являются величинами порядка единицы. Введем вспомогательный малый параметр  $\varepsilon = \sqrt{\mu}$  и найдем периодические решения системы следующего вида:

$$y_i = \varepsilon a_i \sin \omega t + \varepsilon^3 b_i \cos \omega t, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad y_n = \varepsilon a_n \sin \omega t. \quad (2.4)$$

Воспользовавшись методом гармонического баланса, составим уравнения для определения неизвестных коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$  и частоты  $\omega$ :

$$-\mu_i a_i \omega^2 + (k_i + k_{i+1}) a_i - k_i a_{i-1} - k_{i+1} a_{i+1} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad -\mu_n a_n \omega^2 + a_n - a_{n-1} = 0,$$

$$-\mu_i \mu b_i \omega^2 + (h_i + h_{i+1}) \omega a_i - h_i \omega a_{i-1} - h_{i+1} \omega a_{i+1} + (k_i + k_{i+1}) \mu b_i - k_i \mu b_{i-1} - k_{i+1} \mu b_{i+1} = 0, \quad (2.5)$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad -\frac{5\mu^3 \omega^5 C_{y5}}{8\nu^3} a_n^5 - \frac{3\mu^2 \omega^3 C_{y3}}{4\nu} a_n^3 - \mu \omega \nu C_{y1} a_n - h \omega a_{n-1} + h \omega a_n + \frac{\chi \omega}{r+1} a_n - \mu b_{n-1} = 0.$$

Здесь принято  $a_0 = b_0 = b_n = 0$ .

Первые  $n - 1$  уравнений системы (2.5) образуют замкнутую систему линейных уравнений относительно величин  $a_i$ ,  $i = 1, n - 1$ . Разрешив ее и подставив результат в  $n$ -е уравнение (2.5), как нетрудно видеть, получим уравнение относительно частоты  $\omega$ , не содержащее величины  $a_n$ . Из структуры уравнений ясно также, что это уравнение будет совпадать с уравнением на собственные частоты рассматриваемой системы в случае, когда все силы, кроме потенциальных, равны нулю. Отметим, что величины  $b_i$  не зависят от скорости потока  $v$ , поскольку она входит только в последнее уравнение (2.5).

Таким образом, величины  $\omega$ , найденные из этого уравнения (левая часть которого представляет собой полином степени  $n$  от  $\omega^2$ ), зависят только от параметров  $\mu_0$ ,  $\mu_n$  и  $k_0$ . Соответственно частоты циклов рассматриваемого типа не будут изменяться, в частности, при изменении параметров  $v$  и  $r$  (или  $\tilde{\chi}$ ).

Для каждого положительного значения  $\omega$  из уравнений с номерами  $n + 1, \dots, 2n - 1$  системы (2.5) можно найти коэффициенты  $b_1, \dots, b_{n-1}$  и подставить эти величины в последнее уравнение (2.5). В результате получим биквадратное уравнение относительно  $a_n$ , имеющее следующую структуру:

$$-\frac{5\mu^3\omega^5C_{y5}}{8v^3}a_n^4 - \frac{3\mu^2\omega^3C_{y3}}{4v}a_n^2 + \tilde{\chi}\omega - \mu C_{y1}\omega v + X = 0. \quad (2.6)$$

Здесь  $X$  имеет порядок  $\mu$  и зависит от частоты  $\omega$  и параметров системы, но не зависит от величин  $\tilde{\chi}$  и  $v$ .

Будем считать, что  $C_{y1} > 0$ ,  $C_{y3} > 0$ ,  $C_{y5} < 0$  (такая ситуация имеет место, в частности, для параллелепипеда, исследованного в [8]).

В случае, когда у характеристического полинома имеется пара корней с нулевой вещественной частью, свободный член в левой части (2.6) равен нулю. Заметим, что этот член зависит от  $\tilde{\chi}$  и  $v$  линейно. Таким образом, он может обратиться в нуль при изменении одного из этих параметров только один раз, поэтому смена характера устойчивости при этом может произойти лишь однажды (разумеется, при условии, что соблюдаются соотношения (2.2), (2.3)). Отметим, что с увеличением  $\tilde{\chi}$  свободный член возрастает, а с ростом  $v$  — убывает.

Выберем такую скорость потока, что при  $\tilde{\chi} = 0$  имеет место неустойчивость (например,  $v > v_2(0)$ ). При достаточно больших значениях  $\tilde{\chi}$  (таких, что выбранное значение  $v$  меньше  $v_1(\tilde{\chi})$ ) равновесие асимптотически устойчиво. Следовательно, при некотором значении  $\tilde{\chi}_*$  происходит потеря устойчивости, и вещественная часть одной из пар комплексно-сопряженных корней характеристического полинома обращается в ноль (поскольку потеря устойчивости, как было отмечено выше, может быть только колебательной). Пусть модуль мнимой части этой пары корней при  $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_*$  равен  $\omega_*$ . В этой ситуации имеет место бифуркация Андронова—Хопфа, так что уравнение (2.6) должно иметь нулевой корень.

При  $\tilde{\chi} < \tilde{\chi}_*$  свободный член (2.5) отрицателен, поэтому это уравнение имеет единственный положительный корень. Этому корню отвечает некоторый цикл рассматриваемого типа с частотой  $\omega_*$  (назовем его цикл 1). При  $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_*$  происходит бифуркация Андронова—Хопфа, и из равновесия рождается цикл (цикл 2). Но характер устойчивости равновесия меняется с неустойчивости на асимптотическую устойчивость, поэтому цикл 2 является отталкивающим (за исключением вырожденных случаев, требующих отдельного рассмотрения). При величинах  $\tilde{\chi}$ , больших  $\tilde{\chi}_*$ , но достаточно близких к этому значению, уравнение (2.5) имеет два положительных корня, так что в системе имеется два цикла данного типа. Очевидно, что при некотором  $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_{**} > \tilde{\chi}_*$  дискриминант уравнения (2.6) обратится в нуль. При этом циклы 1 и 2 сольются. Соответственно цикл 1 в общем случае должен быть притягивающим. При дальнейшем увеличении  $\tilde{\chi}$  дискриминант уравнения (2.6) станет отрицательным, так что циклы рассматриваемого типа с частотой  $\omega_*$  исчезнут.

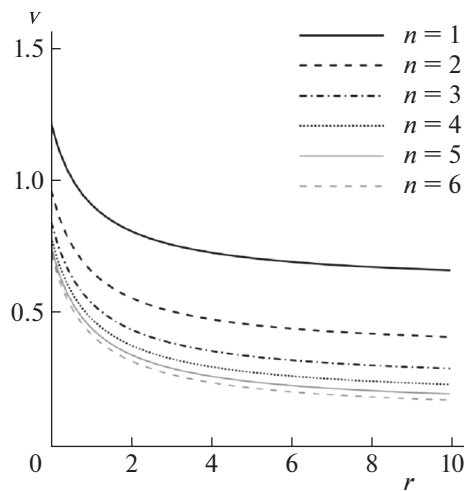


Рис. 3. Границы области устойчивости в зависимости от числа тел в цепочке

Таким образом, бифуркация Андронова–Хопфа является субкритической. С точки зрения отбора энергии потока, это представляется благоприятным ввиду расширения диапазона значений скорости, в котором существует притягивающий цикл. Заметим, что для тел с другими аэродинамическими характеристиками (например, такими, что  $C_{y3} < 0$ ) бифуркация будет суперкритической и эволюция циклов при изменении параметра  $\tilde{\chi}$  окажется несколько иной.

**3. Численное моделирование.** Проведем численное исследование влияния параметров системы на устойчивость положения равновесия и на характеристики циклов. При расчетах будем варьировать количество тел  $n$ , скорость потока  $v$  и нагрузочное сопротивление  $r$ , а для остальных безразмерных параметров будем использовать следующие значения:

$$k_0 = 0.7, \quad \mu = h = h_0 = \chi = 0.01.$$

На рис. 3 представлены границы области неустойчивости тривиального равновесия на плоскости параметров  $(r, v)$  для систем с различным числом тел (область неустойчивости расположена выше соответствующей кривой).

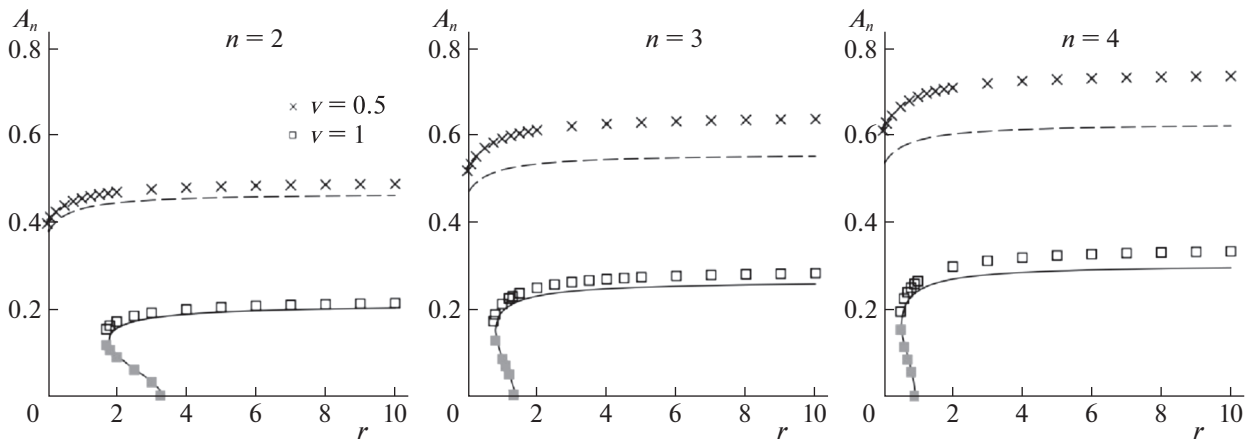
Видно, что с увеличением внешнего сопротивления (т.е. с уменьшением нагрузки) критическое значение скорости, при котором происходит потеря устойчивости, монотонно уменьшается. Кроме того, монотонное уменьшение критической скорости происходит с ростом количества тел в системе. Таким образом, увеличение количества тел в цепочке позволяет расширить диапазон скоростей потока, в котором равновесие неустойчиво и можно ожидать существования колебательных режимов.

Заметим, что для любого  $n$  существуют такие значения  $v^*$  и  $v^{**}$  скорости потока (такие, что  $v^* < v^{**}$ ), что при  $v < v^*$  равновесие асимптотически устойчиво при всех  $r$ , а при  $v > v^{**}$  — неустойчиво при всех  $r$ . Для всех  $v$  из интервала  $(v^*, v^{**})$  равновесие неустойчиво для всех  $r$ , больших некоторого критического значения  $r_c$ , и асимптотически устойчиво при  $r < r_c$ .

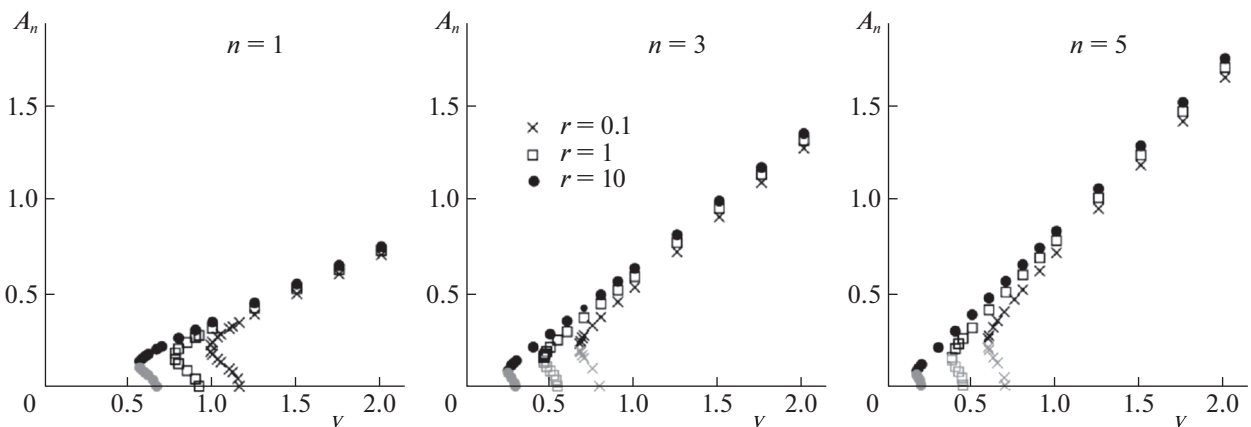
Для изучения влияния параметров на характеристики периодических движений, возникающих в системе, было проведено численное интегрирование безразмерных уравнений движения (1.8). На рис. 4 представлены зависимости амплитуды колебаний параллелепипеда от величины сопротивления  $r$  при разных значениях скорости потока и разном числе тел в цепочке. Неустойчивые циклы обозначены серыми квадратами. Линиями изображены приближенные решения, полученные из системы (2.5).

Как следует из рис. 4, при достаточно малых значениях  $v$  и  $r$  периодические решения отсутствуют. Однако увеличение скорости потока приводит к тому, что циклы существуют при всех значениях сопротивления. Потеря устойчивости (в тех случаях, когда она имеет место) оказывается “жесткой”. Отметим также, что амплитуда параллелепипеда на притягивающих циклах монотонно растет с ростом  $r$ , стремясь к некоторому предельному значению, зависящему от скорости потока (это нетрудно видеть и из уравнения (2.6)).





**Рис. 4.** Амплитуда колебаний параллелепипеда в зависимости от нагрузочного сопротивления для разного числа тел в цепочке и разных скоростей потока



**Рис. 5.** Амплитуда колебаний параллелепипеда в зависимости от скорости потока для разного числа звеньев в цепочке и разных значений сопротивления

Таким образом, качественные выводы, полученные на основе приближенных уравнений для периодических движений, отражают особенности поведения периодических решений, найденных путем численного интегрирования уравнений движения.

В то же время приближенное решение дает несколько заниженное значение амплитуды по сравнению с результатами численного интегрирования уравнений движения. Это рассогласование возрастает с увеличением скорости потока и числа тел в цепочке. Данное обстоятельство, по-видимому, связано с тем, что при сравнительно больших  $v$  и  $n$  необходимо учитывать члены следующего порядка малости.

Зависимость амплитуды  $A_n$  колебаний параллелепипеда от скорости потока для цепочек, состоящих из 1, 3 и 5 тел, и разных величин сопротивления приведена на рис. 5. Притягивающие циклы изображены черным цветом, отталкивающие — серым. Амплитуда колебаний параллелепипеда увеличивается с увеличением количества тел в цепочке, что представляется вполне естественным.

Отметим, что вне достаточно узкого интервала вблизи значения скорости потока, при котором происходит слияние притягивающего и отталкивающего циклов, амплитуда колебаний параллелепипеда на притягивающем цикле практически линейно растет с увеличением скорости (это согласуется, в частности, с результатами [6]).

**4. Средняя мощность и регулирование нагрузки.** Одной из важнейших характеристик ветроэнергетической установки является средняя за период мощность, которую она может вырабатывать. В данном случае будем рассчитывать эту мощность (безразмерную) по следующей формуле:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T v^2 r dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{y_n'}{r+1} \right)^2 r dt. \quad (4.1)$$

Здесь  $T$  – период колебаний.

Добиться максимизации мощности при фиксированной скорости потока можно за счет надлежащего регулирования величины нагрузочного сопротивления. Такой подход представляется достаточно перспективным для малых ветроэнергетических установок различных типов (например, [27]).

Поскольку  $P_{av} = 0$  при  $r = 0$  и  $P_{av} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , то существует значение сопротивления (обозначим его  $r_{opt}$ ), при котором мощность достигает максимума. Оценим величину  $r_{opt}$ . Из (2.4) и (3.1) имеем

$$P_{av} = \frac{1}{2} \frac{\mu \omega^2 a_n^2 r}{(r+1)^2}.$$

Обозначим  $a_n^2 = z$ . Продифференцировав (2.6) по  $r$ , получим

$$-\frac{5\mu^3 \omega^5 C_{y5}}{4v^3} z z_r' - \frac{3\mu^2 \omega^3 C_{y3}}{4v} z_r' - \frac{\chi \omega}{(r+1)^2} = 0.$$

Отсюда

$$z_r' = \frac{4\chi v}{(r+1)^2 \mu^2 \omega^2} \left( -5C_{y5} \frac{\mu \omega^2}{v^2} z - 3C_{y3} \right)^{-1}. \quad (4.2)$$

Для притягивающего цикла (который отвечает большему из корней (2.6)) имеем  $z_r' > 0$ . Нетрудно показать, используя аналогичные выкладки и соображения, что  $z_r'' < 0$ .

Продифференцируем теперь  $P_{av}$  по  $r$ :

$$\frac{dP_{av}}{dr} = \frac{\mu \omega^2}{2(r+1)^2} \left( z_r' r + z \frac{1-r}{1+r} \right).$$

Отсюда видно, что максимум  $P_{av}$  достигается при  $r = r_{opt} > 1$ . При этом чем меньше  $z_r'|_{r=1}$ , тем ближе оптимальное значение сопротивления  $r_{opt}$  к 1 (т.е. к внутреннему сопротивлению катушки).

Из (2.6) следует, что при больших значениях  $v$  имеем  $z \sim v^2$ , а из (4.2) вытекает, что  $z_r' \sim v$ . Поэтому с ростом скорости потока величина  $r_{opt}$  будет уменьшаться, стремясь к 1.

Вычислим теперь  $P_{av}$ , используя результаты численного интегрирования уравнений движения системы при разных значениях параметров  $r$ ,  $n$  и  $v$ . Результаты расчетов приведены на рис. 6.

Рисунок 6 показывает, что величина  $r_{opt}$  практически не зависит от количества тел в цепочке. Кроме того, она достаточно слабо зависит от скорости потока и близка к единице, причем ее отличие от единицы уменьшается с ростом  $v$ .

При этом для всех рассмотренных значений скорости потока разница между  $P_{av}(r_{opt}) = P_{max}$  и  $P_{av}(r)$  на интервале  $1 \leq r \leq 1.25$  не превышает 2% от  $P_{max}$ . Поэтому для практических целей, по-видимому, можно полагать  $r_{opt} = 1$ .

На рис. 7 представлена зависимость  $P_{max}$  от числа тел в цепочке при разных скоростях потока ( $v = 1, 2, 3$ ).

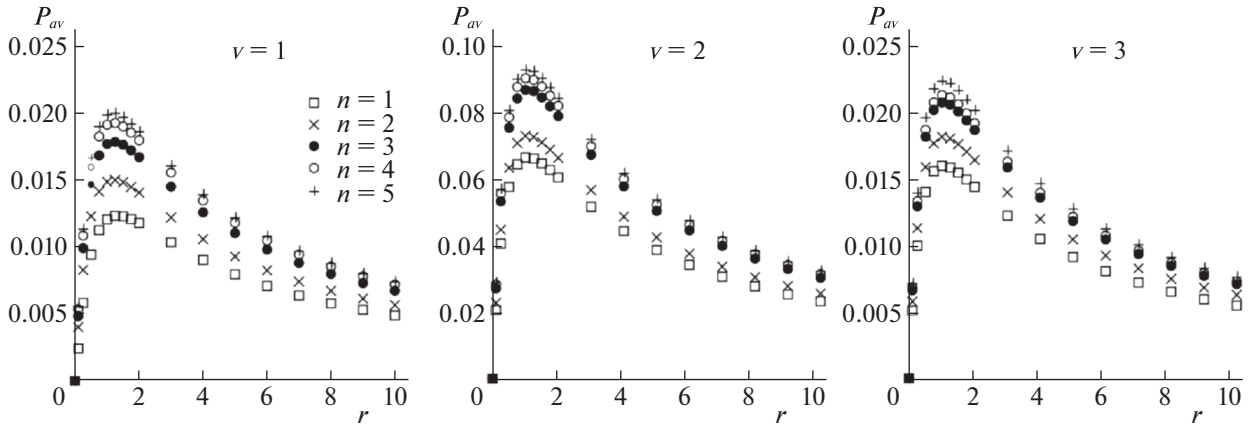


Рис. 6. Средняя за период мощность в зависимости от нагрузочного сопротивления при разных значениях  $n$  и  $v$

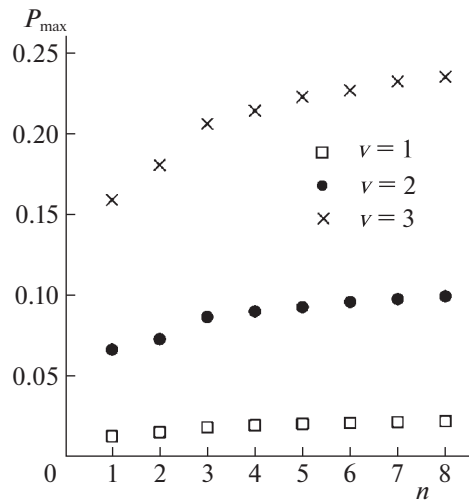


Рис. 7. Максимальная мощность в зависимости от числа тел в цепочке для разных значений скорости потока

Из рис. 7 следует, что система с тремя телами позволяет получить существенный выигрыш по мощности (порядка 50% для  $v = 1$  и 30% для  $v = 3$ ) по сравнению с системой с одним телом. Однако при дальнейшем увеличении  $n$  рост  $P_{max}$  заметно замедляется. Поэтому использовать длинные цепочки нецелесообразно (особенно в связи с возможными техническими сложностями, связанными с поддержанием работы длинной цепочки).

С учетом вышеизложенного регулирование нагрузочного сопротивления, направленное на максимизацию  $P_{av}$ , по-видимому, целесообразно осуществлять следующим образом. Если скорость потока находится в диапазоне от  $v^*$  до  $v^{**}$  и система уже совершает колебания, то следует выбирать сопротивление равным  $\max(r_{opt}, r_c)$ , где  $r_c$  – значение сопротивления, при котором равновесие теряет устойчивость. Если  $v > v^{**}$ , то можно задавать  $r = r_{opt}$ .

Чтобы обеспечить как можно более быстрый переход в колебательный режим из состояния покоя в случае, когда  $v^* < v < v^{**}$ , следует выбрать максимально возможное значение  $r$  (например, разомкнуть цепь). После того, как система выйдет на режим, нужно уменьшить сопротивление до указанного выше значения.

**Заключение.** Проведено исследование динамики ветроэнергетической установки, работающей за счет галолирующих колебаний цепочки тел в потоке среды. Проанализировано влияние числа тел в цепочке, скорости потока и нагрузочного сопротивления на выходную мощность. Показано, что увеличение числа тел в цепочке позволяет уменьшить критическую скорость по-

тока, при которой в системе возникают колебания, а также повысить максимальную вырабатываемую мощность. Предложена схема регулирования нагрузочного сопротивления для получения максимальной мощности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Den Hartog J.P.* Transmission Line Vibration Due to Sleet // *Trans. AIEE.* 1932. V. 51. P. 1074–1086.
2. *Parkinson G.V., Brooks N.P.H.* On the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders // *ASME. J. Appl. Mech.* 1961. V. 28. № 2. P. 252–258.  
<https://doi.org/10.1115/1.3641663>
3. *Parkinson G.V., Smith J.D.* The Square Prism as an Aeroelastic Non-Linear Oscillator // *The Quarterly J. Mechanics and Applied Mathematics.* 1964. V. 17. № 2. P. 225–239.  
<https://doi.org/10.1093/qjmam/17.2.225>
4. *Luo S.C., Chew Y.T., Ng Y.T.* Hysteresis Phenomenon in the Galloping Oscillation of a Square Cylinder // *J. Fluids & Struct.* 2003. V. 18. № 1. P. 103–118.  
[https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(03\)00084-7](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(03)00084-7)
5. *Barrero-Gil A., Sanz-Andrés A., Alonso G.* Hysteresis in Transverse Galloping: The Role of the Inflection Points // *J. Fluids & Struct.* 2009. V. 25. № 6. P. 1007–1020.  
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2009.04.008>
6. *Люсин В.Д., Рябинин А.Н.* О галопировании призмы в потоке газа или жидкости // *Тр. ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова.* 2010. Вып. 53 (337). С. 79–84.
7. *Bearman P.W., Gartshore I.S., Maull D.J., Parkinson G.V.* Experiments on Flow-Induced Vibration of a Square-Section Cylinder // *J. Fluids & Struct.* 1987. V. 1. № 1. P. 19–34.  
[https://doi.org/10.1016/s0889-9746\(87\)90158-7](https://doi.org/10.1016/s0889-9746(87)90158-7)
8. *Sarioglu M., Akansu Y.E., Yavuz T.* Flow Around a Rotatable Square Cylinder-Plate Body // *AIAA Journal.* 2006. V. 44. № 5. P. 1065–1072.  
<https://doi.org/10.2514/1.18069>
9. *Gao G.-Z., Zhu L.-D.* Nonlinear Mathematical Model of Unsteady Galloping Force on a Rectangular 2: 1 Cylinder // *J. Fluids & Struct.* 2017. V. 70. P. 47–71.  
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.01.013>
10. *Abdel-Rohman M.* Design of Tuned Mass Dampers for Suppression of Galloping in Tall Prismatic Structures // *J. Sound & Vibr.* 1994. V. 171. № 3. P. 289–299.  
<https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1121>
11. *Gattulli V., Di Fabio F., Luongo A.* Simple and Double Hopf Bifurcations in Aeroelastic Oscillators with Tuned Mass Dampers // *J. Franklin Institute.* 2001. V. 338. P. 187–201.  
[https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(00\)00077-6](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(00)00077-6)
12. *Selwanis M.M., Franzini G.R., Beguin C., Gosselin F.P.* Wind Tunnel Demonstration of Galloping Mitigation with a Purely Nonlinear Energy Sink // *J. Fluids & Struct.* 2021. V. 100. P. 103169.  
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.103169>
13. *Barrero-Gil A., Alonso G., Sanz-Andres A.* Energy Harvesting from Transverse Galloping // *J. Sound & Vibr.* 2010. V. 329. P. 2873–2883.  
<https://doi.org/10.1016/J.JSV.2010.01.028>
14. *Dai H.L., Abdelkefi A., Javed U., Wang L.* Modeling and Performance of Electromagnetic Energy Harvesting from Galloping Oscillations // *Smart Mater. & Struct.* 2015. V. 24. № 4. P. 045012.  
<https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/4/045012>
15. *Hemon P., Amandolese X., Andrienne T.* Energy Harvesting from Galloping of Prisms: A Wind Tunnel Experiment // *J. Fluids & Struct.* 2017. V. 70. P. 390–402.  
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.02.006>
16. *Javed U., Abdelkefi A., Akhtar I.* An Improved Stability Characterization for Aeroelastic Energy Harvesting Applications // *Comm. in Nonlin. Sci. & Num. Simul.* 2016. V. 36. P. 252–265.  
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.12.001>
17. *Tan T., Yan Z.* Analytical Solution and Optimal Design for Galloping-Based Piezoelectric Energy Harvesters // *Appl. Phys. Lett.* 2016. V. 109. P. 253902.  
<https://doi.org/10.1063/1.4972556>
18. *Wang K.F., Wang B.L., Gao Y., Zhou J.Y.* Nonlinear Analysis of Piezoelectric Wind Energy Harvesters with Different Geometrical Shapes // *Arch. Appl. Mech.* 2020. V. 90. P. 721–736.  
<https://doi.org/10.1007/s00419-019-01636-8>
19. *Zhao D., Hu X., Tan T., Yan Zh., Zhang W.* Piezoelectric Galloping Energy Harvesting Enhanced by Topological Equivalent Aerodynamic Design // *Energy Conv. & Manag.* 2020. V. 222. P. 113260.  
<https://doi.org/10.1016/j.enconman.2020.113260>

20. *Zhang M., Abdelkefi A., Yu H., Ying X., Gaidai O., Wang J.* Predefined Angle of Attack and Corner Shape Effects on the Effectiveness of Square-Shaped Galloping Energy Harvesters // *Applied Energy*. 2021. V. 302. P. 117522. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2021.117522>
21. *Vicente-Ludlam D., Barrero-Gil A., Velazquez A.* Enhanced Mechanical Energy Extraction from Transverse Galloping Using a Dual Mass System // *J. Sound & Vibr.* 2015. V. 339. P. 290–303. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.11.034>
22. *Karlicic D., Cajic M., Adhikari S.* Dual-Mass Electromagnetic Energy Harvesting from Galloping Oscillations and Base Excitation // *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. Pt. C: J. Mech. Eng. Sci.* 2021. V. 235. № 20. P. 4768–4783. <https://doi.org/10.1177/0954406220948910>
23. *Селюцкий Ю.Д.* Динамика ветроэнергетической установки с двумя подвижными массами, использующей эффект галопирования // *Изв. РАН. МТТ*. 2023. № 2. С. 55–69. <https://doi.org/10.31857/S0572329922100117>
24. *Dosaev M.* Interaction Between Internal and External Friction in Rotation of Vane with Viscous Filling // *Appl. Math. Mod.* 2019. V. 68. P. 21–28. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.002>
25. *Wang Q., Goosen J., Van Keulen F.* A Predictive Quasi-Steady Model of Aerodynamic Loads on Flapping Wings // *J. Fluid Mech.* 2016. V. 800. P. 688–719. <https://doi.org/10.1017/jfm.2016.413>
26. *Abohamer M.K., Awrejcewicz J., Starosta R., Amer T.S., Bek M.A.* Influence of the Motion of a Spring Pendulum on Energy-Harvesting Devices // *Appl. Sci.* 2021. V. 11. P. 8658. <https://doi.org/10.3390/app11188658>
27. *Климина Л.А.* Метод формирования авторотаций в управляемой механической системе с двумя степенями свободы // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2020. № 6. С. 3–14.