

ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВ
ОГРАНИЧЕННОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ
ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ
С СУММАРНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ¹

© 2023 г. Д. Н. Ибрагимов^{а,*}, А. Н. Сиротин^{а,**}

^аМосковский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*e-mail: rikk.dan@gmail.com

**e-mail: asirotin2@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.03.2023 г.

После доработки 28.04.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

Рассматривается задача построения множеств достижимости, т.е. множеств терминальных состояний, в которые можно перевести систему из начала координат за фиксированное время, и 0-управляемости, т.е. множеств начальных состояний, из которых систему можно перевести в начало координат за фиксированное время, для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление. Доказано представление множеств достижимости и 0-управляемости в виде линейных преобразований суперэллипсоидальных множеств конечной и бесконечной размерности. Предложен конструктивный метод описания искомым множеств на основе аппарата опорных полуплоскостей, в том числе и для предельных множеств достижимости и управляемости. В случае евклидовых пространств описание получено в явном виде. Приведены примеры. Для трехмерной системы управления движением спутника на околокруговой орбите произведено моделирование множеств достижимости.

DOI: 10.31857/S0002338823050086, EDN: OHKBDH

Введение. При исследовании динамических систем зачастую приходится учитывать различные ограничения, наложенные на управляющие воздействия, что приводит к тому, что далеко не все терминальные состояния являются достижимыми из заданного начального даже за бесконечное время. В результате классических условий управляемости Калмана оказывается недостаточно, чтобы сделать вывод о достижимости того или иного терминального состояния. В связи с чем представляется актуальной разработка методов, позволяющих формировать конструктивное описание множеств достижимости, т.е. множеств терминальных состояний, в которые можно перевести систему из начала координат, и 0-управляемости, т.е. множеств начальных состояний, из которых систему можно перевести в начало координат, за конечное число шагов, а также оценки предельных множеств достижимости и 0-управляемости [1]. Процедура построения произвольных множеств управляемости, для которых терминальное состояние не фиксировано, может быть за счет сдвига системы координат сведена к задаче построения множеств 0-управляемости. Множества 0-управляемости и достижимости могут быть использованы в ряде задач оптимального управления для формирования позиционного управления для систем с дискретным временем [2–4].

На данный момент известны результаты построения множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограничениями на функцию управления в смысле l_∞ -нормы. В частности, доказано, что в случае линейных ограничений на управление множества достижимости и 0-управляемости за конечное число шагов представляют собой многогранники [2]. Для их предельных аналогов сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности [5], а в ряде частных случаев предложены конструктивные методы формирования внешних оценок на основе аппарата опорных полупространств [6, 7] или принципа максимума [8]. Также к новым результатам относится описание предельных множеств достижи-

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-71-01014).

мости и 0-управляемости в виде многогранников для систем с ограничениями на функцию управления в смысле l_1 -нормы [9].

Однако для более общего случая l_p -нормы с произвольным значением параметра $p \in (1; +\infty)$ известные результаты являются неприменимы, что связано в первую очередь со строгой выпуклостью ограничений и невозможностью представления искомого множества в полиэдральной форме. Напротив, эффективным оказывается их описание на основе аппарата суперэллипсоидальных множеств конечной [10, 11] и бесконечной размерностей, что тесно связано со строго выпуклым анализом [12, 13], выпуклым программированием [14], теорией нормированных пространств [15] и линейных операторов [16].

В статье изучаются вопросы построения множеств достижимости и 0-управляемости с суммарным ограничением на управление в смысле l_p -нормы. Удаётся в явном виде описать опорное полупространство и точку касания для произвольного множества достижимости или 0-управляемости за конечное или бесконечное число шагов. Это позволяет применить аппарат полиэдральной аппроксимации [17–19] для описания внутренних и внешних оценок искомого множества в виде многогранников и использовать их для решения различных задач управления дискретными системами.

В разд. 1 производится постановка задачи. В разд. 2 изучаются различные свойства образов конечномерных и бесконечномерных суперэллипсоидальных множеств при линейном отображении в \mathbb{R}^n . В разд. 3 доказывается, что каждое множество 0-управляемости и достижимости представимо в виде образа суперэллипсоидального множества при линейном невырожденном преобразовании, что позволяет сформулировать их свойства на основе результатов разд. 2 и конструктивно описать опорную гиперплоскость для произвольного опорного вектора. Существенным является доказательство необходимых и достаточных условий ограниченности предельных множеств достижимости и 0-управляемости. В разд. 4 для частного случая евклидовых пространств описание множеств достижимости и 0-управляемости построено явно в виде эллипсоидальных множеств. В разд. 5 приведены примеры, демонстрирующие полученные теоретические результаты. В разд. 6 рассмотрена система управления движением спутника на околокруговой орбите, для которой построены множества достижимости на основе разработанных методов.

1. Постановка задачи. Рассматривается линейная система с дискретным временем и ограниченным скалярным управлением:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(0) &= x_0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |u(k)|^p \leq 1, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}$ – скалярное управление, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ – матрицы системы, $p \in (1; +\infty)$ – параметр, определяющий тип суммарного ограничения на управление.

В ряде случаев будет использовано предположение о том, что система (1.1) управляема по Калману, т.е. выполнено условие

$$\text{rank}(b|Ab|\dots|A^{n-1}b) = n. \quad (1.2)$$

Хотя некоторые свойства будут также справедливы и для систем (1.1), не удовлетворяющих (1.2).

Обозначим для произвольного $N \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathcal{Y}_p(N)$ множество достижимости системы (1.1), т.е. множество тех состояний, в которые можно перевести систему (1.1) за N шагов из 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{Y}_p(N) = \begin{cases} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} bu(k), \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)|^p \leq 1 \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Аналогично для произвольного $N \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathcal{X}_p(N)$ обозначим множество 0-управляемости системы (1.1), т.е. множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (1.1) за N шагов в 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}_p(N) = \begin{cases} \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : -A^N x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} b u(k), \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)|^p \leq 1 \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Цель статьи — построить множества (1.3) и (1.4) и описать их свойства. В том числе интерес представляют предельные свойства множеств (1.3) и (1.4), т.е. необходимо изучить свойства предельных множеств $\mathcal{Y}_{p,\infty}, \mathcal{X}_{p,\infty} \subset \mathbb{R}^n$ достижимости и 0-управляемости системы (1.1) соответственно. Здесь $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ — множество тех состояний, в которые можно перевести систему (1.1) за конечное число шагов из 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{Y}_{p,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}_p(N). \quad (1.5)$$

Аналогично $\mathcal{X}_{p,\infty}$ — множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (1.1) за конечное число шагов в 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}_{p,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_p(N). \quad (1.6)$$

2. Дополнительные построения. Предельные множества $\mathcal{X}_{p,\infty}$ и $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ могут быть представлены с точностью до замыкания в виде проекции шара из нормированного пространства l_p на конечномерное подпространство \mathbb{R}^n . Пространство числовых последовательностей l_p и норма в нем определяются следующим образом [15, разд. 1, §2, Гл. III]:

$$l_p = \left\{ (u_1, u_2, \dots) : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p < \infty \right\}, \quad p \in (1; +\infty),$$

$$\|u\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}.$$

Числа p и q являются двойственными по Гельдеру:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Пространство \mathbb{R}^N будем полагать евклидовым, наделенным скалярным произведением по формуле:

$$(x, y) = x^T y = \sum_{i=1}^N x_i y_i.$$

Линейную, выпуклую и коническую оболочки произвольного множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ обозначим через $\text{Lin } \mathcal{U}$, $\text{conv } \mathcal{U}$ и $\text{cone } \mathcal{U}$ соответственно. Под $\dim \mathcal{U}$, $\partial \mathcal{U}$, $\text{int } \mathcal{U}$ и $\overline{\mathcal{U}}$ будем понимать размерность, множество граничных точек, множество внутренних точек и замыкание \mathcal{U} . Для произвольного линейного подпространства $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^N$ обозначим через \mathbb{L}^\perp его ортогональное дополнение, т.е. множество всех векторов из \mathbb{R}^N , ортогональных каждому вектору из \mathbb{L} . Также для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$ под $\ker A \subset \mathbb{R}^N$ будем понимать ее ядро:

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^N : Ax = 0\}.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_p(N) \subset \mathbb{R}^N$ суперэллипсоидальное множество размерности N :

$$\mathcal{E}_p(N) = \left\{ u \in \mathbb{R}^N : \left(\sum_{i=1}^N |u_i|^p \right)^{1/p} \leq 1 \right\}.$$

Для произвольной последовательности $\{b_N\}_{N \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ и произвольного $N \in \mathbb{N}$ определим матрицу $B_N = (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^{n \times N}$ и множество $\mathcal{U}_p(B_N) \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{U}_p(B_N) = \left\{ \sum_{j=1}^N u_j b_j : (u_1, \dots, u_N)^T \in \mathcal{E}_p(N) \right\}.$$

Л е м м а 1. Пусть $p_2 > p_1 > 1$. Тогда

$$\mathcal{U}_{p_1}(B_N) \subset \mathcal{U}_{p_2}(B_N).$$

Доказательство леммы 1 и всех последующих утверждений приведено в Приложении.

По построению $\mathcal{U}_p(B_N) \subset \mathbb{R}^n$ представляет собой образ $\mathcal{E}_p(N)$ при воздействии линейного отображения $B_N : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{U}_p(B_N) = B_N \mathcal{E}_p(N). \quad (2.1)$$

Л е м м а 2. $\mathcal{U}_p(B_N)$ – выпуклое, замкнутое и ограниченное множество. Если $\text{rank } B_N = n$, то $\mathcal{U}_p(B_N)$ строго выпукло.

Лемма 2 является следствием более общего свойства выпуклых множеств: при любом линейном преобразовании относительно внутренние точки выпуклого множества преобразуются в относительно внутренние точки образа выпуклого множества. В случае если линейное отображение является сюръекцией (т.е. описывается матрицей полного ранга), а исходное множество имеет непустую внутренность, то относительно внутренние точки заменяются в утверждении на внутренние [12, теорема 6.6].

Вектор $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ называется опорным к выпуклому множеству $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in \partial \mathcal{U}$ [13, 1.8, Гл. 1], если

$$\mathcal{U} \subset \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n : (f, \tilde{x}) \leq (f, x) \}, \quad (f, x) = \sup_{\tilde{x} \in \mathcal{U}} (f, \tilde{x}).$$

Нормальным конусом $\mathcal{N}(x, \mathcal{U})$ выпуклого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in \partial \mathcal{U}$ называется множество всех векторов, опорных к \mathcal{U} в x :

$$\mathcal{N}(x, \mathcal{U}) = \left\{ f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \sup_{\tilde{x} \in \mathcal{U}} (f, \tilde{x}) = (f, x) \right\}.$$

Для произвольной внутренней точки $x \in \text{int } \mathcal{U}$ нормальный конус представляет собой пустое множество:

$$\mathcal{N}(x, \mathcal{U}) = \emptyset.$$

Согласно определению нормального конуса, справедлив критерий принадлежности некоторой точки $x \in \mathcal{U}$ внутренней выпуклого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$: включение $x \in \text{int } \mathcal{U}$ верно тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}(x, \mathcal{U}) = \emptyset$.

Л е м м а 3. Пусть $\text{rank } B_N = n$. Тогда для любого $x \in \partial \mathcal{U}_p(B_N)$ верно, что:

$$1) \dim \mathcal{N}(x, \mathcal{U}_p(B_N)) = 1;$$

2) для произвольного $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ справедливы соотношения

$$f \in \mathcal{N}(x^*(f), \mathcal{U}_p(B_N)),$$

$$x^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N (f, b_i)^q\right)^{1/p}} \sum_{i=1}^N b_i (f, b_i)^{q-1} \text{sign}(f, b_i).$$

Леммы 1–3 определяют основные свойства множеств достижимости (1.3) и 0-управляемости (1.4), такие, как строгая выпуклость, гладкость границы и монотонность. Более того, при помощи леммы 3 можно восстановить произвольную точку на границе множества и гиперплоскость, опорную к множеству в данной точке, чего достаточно для построения сколь угодно точных внутренних и внешних полиэдральных оценок исследуемого множества [17]. Однако в случае описания предельных множеств достижимости и 0-управляемости данные утверждения оказываются неэффективны. Принципиальным вопросом в изучении множеств (1.5) и (1.6) являются необходимые и достаточные условия их ограниченности.

Пусть $\mathcal{E}_p(\infty)$ – шар радиуса 1 с центром в 0 в l_p :

$$\mathcal{E}_p(\infty) = \left\{ u \in l_p : \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^p \right)^{1/p} \leq 1 \right\}.$$

Рассмотрим последовательность векторов $B' = (b_1, b_2, \dots)$ из \mathbb{R}^n в качестве линейного оператора $B' : l_p \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$B' u = \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j.$$

Вообще говоря, оператор B' может быть определен не на всем пространстве l_p . Через $\mathcal{D}_{B'} \subset l_p$ обозначим множество всех векторов, на которых B' определен. В ряде случаев будет существенно наличие свойства сюръекции B' , для выполнения которого достаточно предположить аналогичное условию (1.2) равенство

$$\text{rank}(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) = n. \tag{2.2}$$

Последовательность B' можно рассмотреть в качестве упорядоченного набора n числовых последовательностей $y^i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots)$, $i = \overline{1, n}$:

$$B' = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Поэтому B' является элементом пространства $\mathbb{R}^\infty \times \dots \times \mathbb{R}^\infty$. Исследование ограниченности оператора B' связано со свойствами последовательностей y^1, \dots, y^n , его формирующих. В частности, важен класс всех B' , удовлетворяющих представлению (2.3), в котором для каждого $i = \overline{1, n}$ справедливо условие $y^i \in l_q$. Такой класс обозначим через l_q^n , а через $\mathcal{U}_p(B')$ – образ шара $\mathcal{E}_p(\infty)$ при воздействии отображения B' :

$$\mathcal{U}_p(B') = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j : u \in \mathcal{E}_p(\infty) \cap \mathcal{D}_{B'} \right\}. \tag{2.4}$$

Лемма 4. Допустим, что $\mathcal{U}_p(B')$ определяется соотношениями (2.4). Тогда множество $\mathcal{U}_p(B')$ ограничено тогда и только тогда, когда верно включение $B' \in l_q^n$.

Лемма 5. Пусть $B' \in l_q^n$. Тогда справедливо включение

$$\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)} \subset \mathcal{U}_p(B').$$

В общем случае множества $\mathcal{U}_p(B')$ и $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$ не совпадают. Покажем это на следующем примере.

Пример 1. Пусть $n = 1$, $B' = (b_1, b_2, \dots) \in l_q$ – произвольная нефинитная последовательность. Рассмотрим $x = \|B'\|_{l_q}$. Тогда

$$(B')^{-1}(\{x\}) = \left\{ u \in l_p : \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j = \|B'\|_{l_q} \right\} \subset l_p.$$

В силу неравенства Гельдера гиперплоскость $(B')^{-1}(\{x\})$ является опорной к $\mathcal{E}_p(\infty)$. Так как $\mathcal{E}_p(\infty)$ представляет собой строго выпуклое множество, то существует единственная точка касания $\tilde{u} \in (B')^{-1}(\{x\}) \cap \mathcal{E}_p(\infty)$:

$$\tilde{u} = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q/p}} (|b_1|^{q-1} \text{sign} b_1, |b_2|^{q-1} \text{sign} b_2, \dots).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j &= \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q/p}} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{q-1} b_j \text{sign} b_j = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q/p}} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q = \|B'\|_{l_q}^{q-q/p} = \|B'\|_{l_q}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{u}_j|^p &= \left(\frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q/p}} \right)^p \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{q-1} |\text{sign} b_j|^p = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^q} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{q-p} = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^q} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q = 1, \\ \{\tilde{u}\} &= (B')^{-1}(x) \cap \mathcal{E}_p(\infty). \end{aligned}$$

Тогда $x \in \mathcal{U}_p(B')$, но при этом не существует $N \in \mathbb{N}$, такого, что $x \in \mathcal{U}_p(B_N)$, так как последовательности B' и \tilde{u} по построению не являются финитными. Окончательно получим, что

$$\mathcal{U}_p(B') \neq \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Существенным в примере 1 является свойство строгой выпуклости множества $\mathcal{E}_p(\infty)$, из которого следует единственность точки касания любой опорной к $\mathcal{E}_p(\infty)$ гиперплоскости. Аналогичные рассуждения для $p \in \{1, \infty\}$ некорректны.

Результат примера 1 справедлив для произвольного $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 6. Пусть

$$B' = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots \end{pmatrix} \in l_q^n.$$

Тогда для всех $i = \overline{1, n}$, таких, что $y^i \in l_q$ не финитна, верно включение

$$\begin{aligned} \tilde{x} = B' \tilde{u} &\in \mathcal{U}_p(B') \setminus \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N), \\ \tilde{u} &= \frac{1}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}} (|b_{i1}|^{q-1} \text{sign} b_{i1}, |b_{i2}|^{q-1} \text{sign} b_{i2}, \dots). \end{aligned}$$

Следствие 1. Пусть справедливы предположения леммы 6. Тогда равенство

$$\mathcal{U}_p(B') = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$$

верно тогда и только тогда, когда последовательности $y^1, \dots, y^n \in l_q$ финитны.

Л е м м а 7. Допустим, что $B' \in l_q^n$. Тогда равенство

$$\text{int} \mathcal{U}_p(B') = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$$

верно тогда и только тогда, когда для всех $N \in \mathbb{N}$

$$\dim \text{Lin}\{b_N, b_{N+1}, \dots\} = n.$$

Л е м м а 8. Пусть выполнено условие (2.2), $B' \in l_q^n$. Тогда для любого $x \in \partial \mathcal{U}_p(B')$ верно, что:

1) $\dim \mathcal{N}(x, \mathcal{U}_p(B')) = 1$;

2) для произвольного $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ справедливы соотношения

$$f \in \mathcal{N}(x^*(f), \mathcal{U}_p(B')),$$

$$x^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |f, b_i|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=1}^{\infty} b_i |f, b_i|^{q-1} \text{sign}(f, b_i).$$

Лемма 4 определяет необходимые и достаточные условия того, чтобы предельное множество $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$ оказалось ограниченным. Следствие 1 и лемма 7 вместе предлагают необходимые и достаточные условия, которые надо наложить на последовательность B' , чтобы данное предельное множество оказалось замкнутым или открытым. При этом лемма 5 гарантирует, что с точностью до замыкания оно будет совпадать с $\mathcal{U}_p(B')$, а лемма 8 позволяет восстановить произвольную точку на границе этого множества и гиперплоскость, опорную к нему в данной точке, чего достаточно для построения внутренних и внешних полиэдральных аппроксимаций $\mathcal{U}_p(B')$.

3. Свойства множеств достижимости и 0-управляемости. На основе результатов разд. 0 имеется возможность описать структуру множеств достижимости (1.3) и 0-управляемости (1.4).

Л е м м а 9. Пусть семейства множеств $\{\mathcal{Y}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{\mathcal{X}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ для системы (1.1) определяются соотношениями (1.3) и (1.4) соответственно, $N \in \mathbb{N}$. Тогда:

1) если $B_N = (b, Ab, \dots, A^{N-1}b) \in \mathbb{R}^{n \times N}$, то справедливо равенство

$$\mathcal{Y}_p(N) = \mathcal{U}_p(B_N);$$

2) если $\det A \neq 0$, $B_N = (A^{-1}b, A^{-2}b, \dots, A^{-N}b) \in \mathbb{R}^{n \times N}$, то верно равенство

$$\mathcal{X}_p(N) = \mathcal{U}_p(B_N).$$

Т е о р е м а 1. Пусть семейства множеств $\{\mathcal{Y}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{\mathcal{X}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ для системы (1.1) определяются, согласно (1.3) и (1.4) соответственно: Тогда:

1) если $N_2 > N_1$, то $\mathcal{Y}_p(N_1) \subset \mathcal{Y}_p(N_2)$;

2) если $p_2 > p_1$, то $\mathcal{Y}_{p_1}(N) \subset \mathcal{Y}_{p_2}(N)$, $N \in \mathbb{N}$;

3) $\mathcal{Y}_p(N)$ – выпуклое, замкнутое и ограниченное множество;

4) если выполнено условие (1.2) и $N \geq n$, то для любых $x \in \partial \mathcal{Y}_p(N)$ и $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ верны соотношения:

$$\dim \mathcal{N}(x, \mathcal{Y}_p(N)) = 1,$$

$$f \in \mathcal{N}(y^*(f), \mathcal{Y}_p(N)),$$

$$y^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{N-1} |f, A^i b|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=0}^{N-1} A^i b |f, A^i b|^{q-1} \text{sign}(f, A^i b);$$

5) если $\det A \neq 0$, то пункты 1–4 также справедливы и для семейства множеств $\{\mathcal{X}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$. В п. 4 граничная точка $x^*(f) \in \partial \mathcal{X}_p(N)$ определяется соотношениями

$$f \in \mathcal{N}(x^*(f), \mathcal{X}_p(N)),$$

$$x^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N |f, A^{-i} b|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=1}^N A^{-i} b |f, A^{-i} b|^{q-1} \text{sign}(f, A^{-i} b).$$

Жордановым базисом матрицы A называется набор линейно независимых векторов $h_1, \dots, h_n \subset \mathbb{R}^n$, который задает преобразование подобия матрицы A в ее вещественную жорданову каноническую форму [20, разд. 3.4, Гл. 3]. Такой базис единственен с точностью до ненулевых множителей и порядка векторов h_1, \dots, h_n , и каждый базисный вектор соответствует некоторой жордановой клетке, т.е. некоторому собственному значению матрицы A . Если разбить элементы жорданова базиса на три множества по критерию того, соответствуют ли они собственному значению матрицы A большему, равному или меньшему 1 по модулю, то получится определить следующие три инвариантных подпространства:

$$\mathbb{L}_{<1} = \text{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| < 1\},$$

$$\mathbb{L}_{=1} = \text{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| = 1\},$$

$$\mathbb{L}_{>1} = \text{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| > 1\}.$$

Теорема 2. Пусть множество $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ определяется соотношением (1.5). Тогда $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда

$$b \in \mathbb{L}_{<1}.$$

Если $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ ограничено и справедливо условие (1.2), то:

- 1) $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ строго выпукло;
- 2) для любых $x \in \partial \mathcal{Y}_{p,\infty}$

$$\dim \mathcal{N}(x, \mathcal{Y}_{p,\infty}) = 1;$$

- 3) для любых $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ верны соотношения:

$$f \in \mathcal{N}(y^*(f), \mathcal{Y}_{p,\infty}),$$

$$y^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{\infty} |f, A^i b|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=0}^{\infty} A^i b |f, A^i b|^{q-1} \text{sign}(f, A^i b);$$

- 4) опорная функция $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ имеет вид

$$s(f, \mathcal{Y}_{p,\infty}) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |f, A^i b|^q\right)^{1/q}.$$

Теорема 3. Пусть множество $\mathcal{X}_{p,\infty}$ определяется соотношением (1.6). Тогда $\mathcal{X}_{p,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда

$$\det A \neq 0, \quad b \in \mathbb{L}_{>1}.$$

Если $\mathcal{X}_{p,\infty}$ ограничено и справедливо условие (1.2), то:

- 1) $\mathcal{X}_{p,\infty}$ строго выпукло;
- 2) для любых $x \in \partial \mathcal{X}_{p,\infty}$

$$\dim \mathcal{N}(x, \mathcal{X}_{p,\infty}) = 1;$$

- 3) для любых $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ верны соотношения:

$$f \in \mathcal{N}(y^*(f), \mathcal{X}_{p,\infty}),$$

$$x^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |f, A^{-i}b|^q \right)^{1/p}} \sum_{i=1}^{\infty} A^{-i}b |f, A^{-i}b|^{q-1} \text{sign}(f, A^{-i}b);$$

- 4) опорная функция $\mathcal{X}_{p,\infty}$ имеет вид

$$s(f, \mathcal{X}_{p,\infty}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f, A^{-i}b|^q \right)^{1/q}.$$

Следствие 2. Пусть множества $\mathcal{Y}_{p,\infty}, \mathcal{X}_{p,\infty}$ определяются соотношениями (1.5) и (1.6) соответственно. Тогда:

- 1) если все собственные значения матрицы A меньше по модулю, чем 1, то $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ ограничено;
- 2) если все собственные значения матрицы A больше по модулю, чем 1, то $\mathcal{X}_{p,\infty}$ ограничено.

Хотя теоремы 2 и 3 предлагают необходимые и достаточные условия ограниченности множеств (1.5) и (1.6), использование данных утверждений может быть затруднено в связи с необходимостью построения жорданова базиса A . В свою очередь следствие 2, будучи лишь достаточным условием ограниченности, позволяет обойтись исключительно вычислением собственных значений матрицы A . Также применение теорем 2 и 3 для построения опорных полупространств к множествам (1.5) и (1.6) проблематично в общем случае, так как требует вычисления точной суммы ряда. С другой стороны, теоремы 2 и 3 определяют опорные функции множеств (1.5) и (1.6) в случае их ограниченности явным образом.

4. Частный случай евклидовых пространств. Рассмотрим случай $p = 2$. Данное допущение позволяет описать множества $\mathcal{U}_2(B_N)$ и $\mathcal{U}_2(B')$ в терминах скалярного произведения. С учетом (2.1) и (2.4) верно равенство $\mathcal{U}_2(B_N) = (B_N, 0, \dots) \mathcal{E}_2(\infty)$, откуда в силу леммы 9 следует, что каждое из множеств (1.3)–(1.6) является линейным преобразованием шара $\mathcal{E}_2(\infty) \subset l_2$, что позволяет явным образом описать их структуру.

Лемма 10. Пусть справедливо (2.2), $N \geq n$, $H_N = (B_N B_N^T)^{-1}$. Тогда верно представление

$$\mathcal{U}_2(B_N) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_N x) \leq 1\}.$$

С учетом леммы 9 лемма 10 позволяет описать множества достижимости $\mathcal{Y}_2(N)$ и 0-управляемости $\mathcal{X}_2(N)$ системы (1.1), удовлетворяющей условию (1.2), явно в виде эллипсоидальных множеств для любого $N \geq n$. Также процедуру их построения благодаря лемме 9 можно проводить рекуррентно.

Лемма 11. Пусть $\det A \neq 0$, выполнено условие (1.2) и $N \geq n$. Тогда существуют положительно определенные и симметрические матрицы $H_{\mathcal{X},N}, H_{\mathcal{Y},N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такие, что

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_2(N) &= \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{\mathcal{Y},N} x) \leq 1\}, \\ \mathcal{X}_2(N) &= \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{\mathcal{X},N} x) \leq 1\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$H_{\mathcal{Y},N+1} = (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},N} A^{-1} - \frac{(A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},N} A^{-1} b b^T (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},N} A^{-1}}{1 + b^T (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},N} A^{-1} b},$$

$$H_{\mathcal{X},N+1} = A^T H_{\mathcal{X},N} A - \frac{A^T H_{\mathcal{X},N} b b^T H_{\mathcal{X},N} A}{1 + b^T H_{\mathcal{X},N} b}.$$

Согласно леммам 9 и 5, множества (1.5) и (1.6) в случае их ограниченности, необходимые и достаточные условия которой определяются теоремами 2 и 3, с точностью до замыкания совпадают с образом шара $\mathcal{E}_2(\infty) \subset l_2$ при некотором линейном преобразовании, т.е. являются эллипсоидальными множествами. При этом их структура может быть вычислена в результате решения алгебраического дискретного уравнения Риккати [21].

Т е о р е м а 4. Пусть $\det A \neq 0$ и выполнено условие (1.2). Тогда:

1) если $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ ограничено, то

$$\overline{\mathcal{Y}_{2,\infty}} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{\mathcal{Y},\infty} x) \leq 1\},$$

где положительно определенная и симметрическая матрица $H_{\mathcal{Y},\infty} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяет матричному уравнению

$$H_{\mathcal{Y},\infty} = (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},\infty} A^{-1} - (b^T (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},\infty} A^{-1})^T (1 + b^T (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},\infty} A^{-1} b)^{-1} (b^T (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},\infty} A^{-1});$$

2) если $\mathcal{X}_{2,\infty}$ ограничено, то

$$\overline{\mathcal{X}_{2,\infty}} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{\mathcal{X},\infty} x) \leq 1\},$$

где положительно определенная и симметрическая матрица $H_{\mathcal{X},\infty} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяет матричному уравнению

$$H_{\mathcal{X},\infty} = A H_{\mathcal{X},\infty} A - (b^T H_{\mathcal{X},\infty} A)^T (1 + b^T H_{\mathcal{X},\infty} b)^{-1} (b^T H_{\mathcal{X},\infty} A).$$

5. Примеры. В данном разделе приведены примеры множеств 0-управляемости и достижимости для различных систем. В качестве иллюстраций множеств используются их внутренние полиэдральные оценки, построенные на основе п. 4, 5 теоремы 1:

$$\text{conv}\{y^*(f_1), \dots, y^*(f_m)\} \subset \mathcal{Y}_p(N), f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

В случае $pn = 2$ искомые множества будут построены точно при помощи лемм 10 и 11.

П р и м е р 2. Рассмотрим систему (1.1) размерности $n = 2$ со следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 \cos(2) & 0.9 \sin(2) \\ -0.9 \sin(2) & 0.9 \cos(2) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

На базе п. 4 теоремы 1 построим множества достижимости для различных значений $N \in \mathbb{N}$ и $p \in (1; +\infty)$. Графически результаты проиллюстрированы на рис. 1–4.

П р и м е р 3. Рассмотрим систему (1.1) размерности $n = 2$ со следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Согласно п. 4 теоремы 1, построим множества достижимости для различных значений $N \in \mathbb{N}$ и $p \in (1; +\infty)$. Графически результаты представлены на рис. 5–8.

П р и м е р 4. С учетом леммы 9 и условий (5.1) на рис. 1–4 приведены множества 0-управляемости системы (1.1) с матрицами

$$A = \frac{10}{9} \begin{pmatrix} \cos(2) & -\sin(2) \\ \sin(2) & \cos(2) \end{pmatrix}, \quad b = \frac{10}{9} \begin{pmatrix} \cos(2) - \sin(2) \\ \cos(2) + \sin(2) \end{pmatrix}.$$

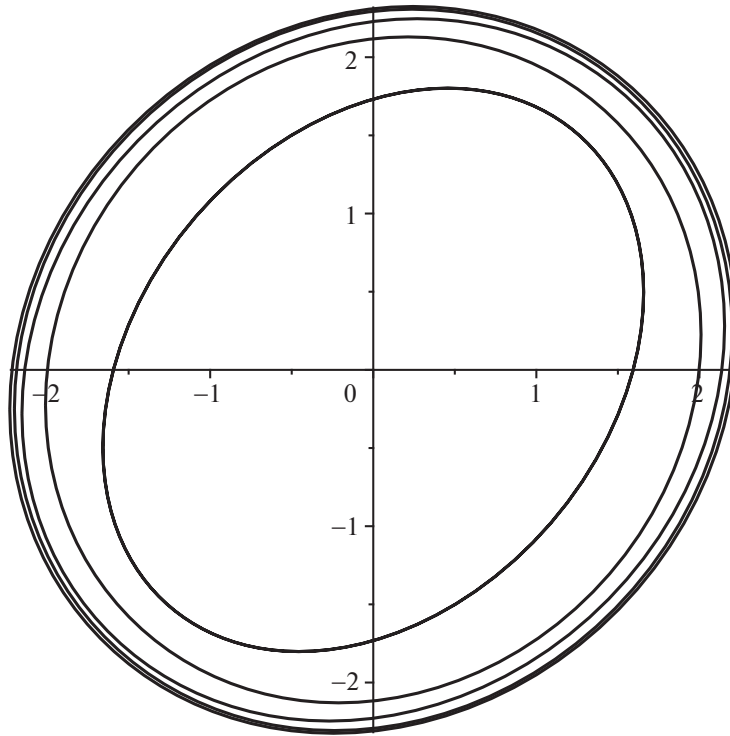


Рис. 1. Множества $\mathcal{U}_2(N)$ для системы (1.1), (5.1), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Аналогично, в силу леммы 9 и условий (5.2), на рис. 5–8 изображены множества 0-управляемости системы (1.1) с матрицами

$$A = \frac{100}{81} \begin{pmatrix} 0.9 & -1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\frac{100}{81} \\ \frac{20}{9} \end{pmatrix}.$$

6. Система управления спутником. Рассмотрим систему управления движением спутника, расположенного на околокруговой орбите, представленную в [22]. Предполагается, что коррекция орбиты осуществляется посредством двигателей импульсной тяги. Корректирующие импульсы направлены по касательной к траектории движения и исполняются без ошибок через равные промежутки времени. На энергетические ресурсы двигателей наложены суммарные ограничения.

Круговая орбита, на которой должен находиться спутник, описывается значениями радиуса орбиты r_0 , радиальной скорости v_{R0} и трансверсальной скорости v_{T0} . Обозначим отклонения реальных значений радиуса орбиты и составляющих скорости от номинальных параметров движения следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta r &= r - r_0, \\ \Delta v_R &= v_R - v_{R0}, \\ \Delta v_T &= v_T - v_{T0}. \end{aligned}$$

Линеаризованная система дифференциальных уравнений, представляющая движение спутника, согласно [22], имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r} &= \Delta v_R, \\ \Delta \dot{v}_R &= \Delta r + 2\Delta v_T, \\ \Delta \dot{v}_T &= -\Delta v_R. \end{aligned} \tag{6.1}$$

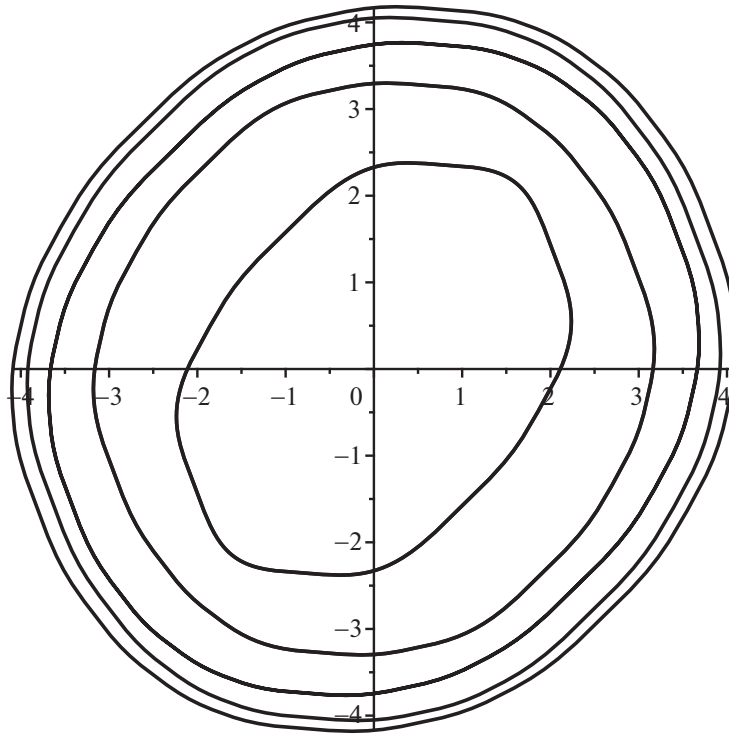


Рис. 2. Множества $\mathcal{U}_4(N)$ для системы (1.1), (5.1), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Поскольку управление подается импульсно через равные промежутки времени $t_0 > 0$, то можно рассматривать в качестве наблюдаемых параметров системы вектор состояния $x(k) = (\Delta r(kt_0), \Delta v_R(kt_0), \Delta v_T(kt_0))^T$ в моменты времени kt_0 , т.е. непосредственно перед выполнением $(k+1)$ -го корректирующего импульса, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Данное предположение позволяет решить систему линейных дифференциальных уравнений (6.1) явно и перейти к конечно-разностным соотношениям вида (1.1) с матрицами системы:

$$A = \begin{pmatrix} -\cos t_0 + 2 & \sin t_0 & -2 \cos t_0 + 2 \\ \sin t_0 & \cos t_0 & 2 \sin t_0 \\ \cos t_0 - 1 & -\sin t_0 & 2 \cos t_0 - 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \cos t_0 + 2 \\ 2 \sin t_0 \\ 2 \cos t_0 - 1 \end{pmatrix}.$$

Для исследования на ограниченность предельных множеств управляемости и достижимости построим жорданов базис матрицы A и вычислим ее собственные значения:

$$h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = e^{\pm it_0}.$$

Отсюда следует, что $b \in \mathbb{L}_{=1} = \mathbb{R}^3$, и, согласно теоремам 2 и 3, рассматриваемая система управления обладает неограниченными предельными множествами достижимости и управляемости. Если предположить, что на мощность корректирующих импульсов наложены суммарные квадратичные ограничения, т.е. $p = 2$, то возможно построить множество достижимости, согласно леммам 9 и 10. При выборе $N = 20$ и $t_0 = 0.25$ множество $\mathcal{U}_2(20)$, изображенное на рис. 9, представляет собой эллипсоид, описываемый следующей матрицей квадратичной формы:

$$H_{20} = \begin{pmatrix} 0.1210 & -0.0151 & 0.1686 \\ -0.0151 & 0.0247 & -0.0217 \\ 0.1686 & -0.0217 & 0.2486 \end{pmatrix}.$$

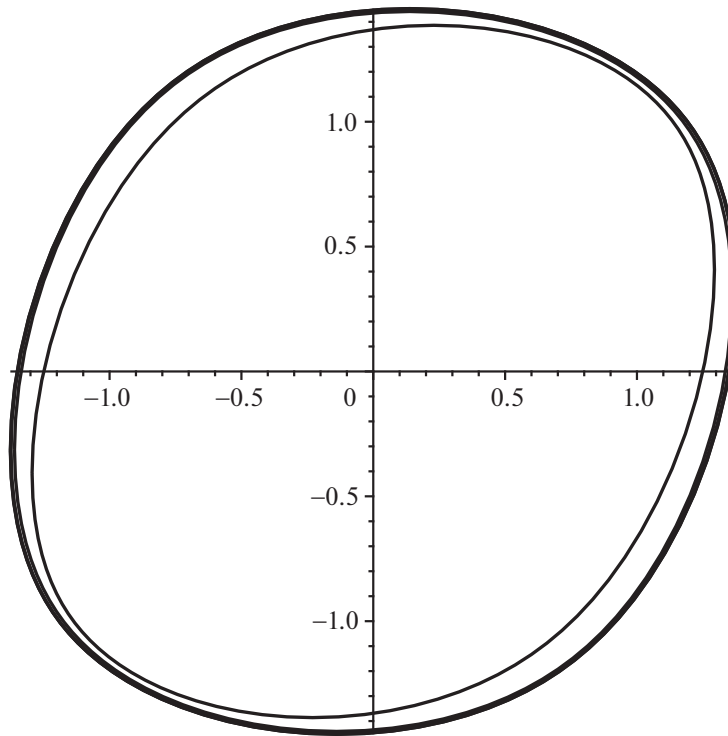


Рис. 3. Множества $\mathcal{U}_{4/3}(N)$ для системы (1.1), (5.1), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Заключение. Обсуждаются некоторые свойства множеств достижимости и 0-управляемости для стационарной линейной дискретной системы с суммарным ограничением на управление.

Представлены общие свойства образов суперэллипсоидальных множеств при линейных преобразованиях. В частности, получено конструктивное описание этих множеств через аппарат опорных полупространств в виде леммы 3. Сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности, замкнутости или открытости предельных множеств достижимости и 0-управляемости (леммы 4–7).

Продемонстрировано, что множества достижимости и 0-управляемости за конечное число шагов могут быть описаны в виде образа суперэллипсоидального множества при фиксированном линейном преобразовании, а их предельные аналоги представляют собой с точностью до замыкания образ шара из l_p при линейном отображении в \mathbb{R}^n . Данный факт позволяет воспользоваться общими свойствами для описания множеств достижимости и 0-управляемости. Приведено точное описание множеств достижимости и 0-управляемости в виде эллипсоидальных множеств.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для произвольных $x \in \mathbb{R}^n$ и выпуклого тела $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$, содержащего 0 в качестве внутренней точки, обозначим через $\mu(x, \mathcal{U})$ функционал Минковского [15, разд. 3, §2, Гл. III]:

$$\mu(x, \mathcal{U}) = \inf\{t > 0 : x \in t\mathcal{U}\}.$$

Произвольное замкнутое выпуклое тело $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$, содержащее 0 в качестве внутренней точки, в силу теоремы Минковского [15, теорема 3, разд. 3, §2, Гл. III] допускает представление

$$\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x, \mathcal{U}) \leq 1\}. \quad (\text{П.1})$$

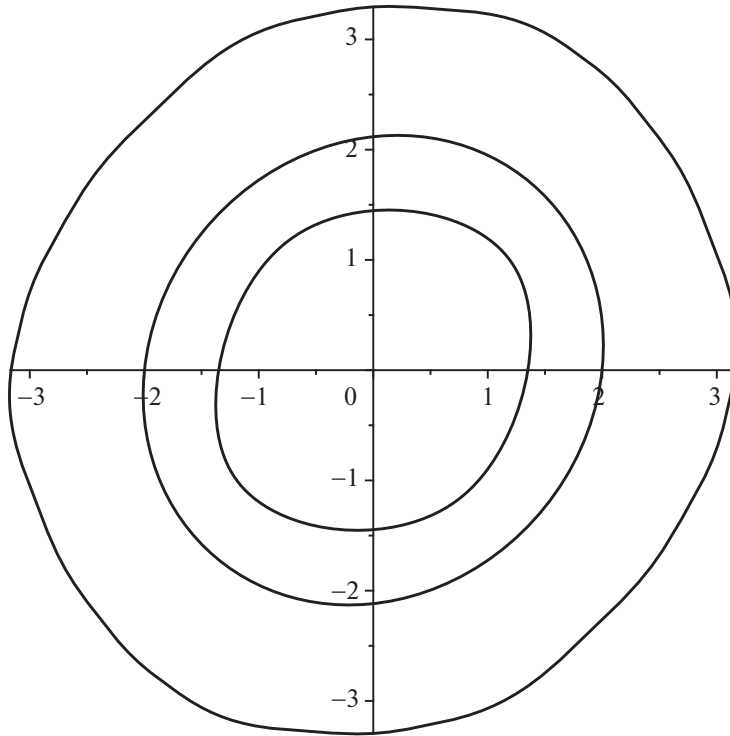


Рис. 4. Множества $\mathcal{U}_{4/3}(8)$, $\mathcal{U}_2(8)$, $\mathcal{U}_4(8)$ для системы (1.1), (5.1)

Лемма 12. Пусть $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклые и компактные тела, содержащие 0 в качестве внутренней точки. Включение $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ верно тогда и только тогда, когда для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\mu(x, \mathcal{U}_1) \geq \mu(x, \mathcal{U}_2).$$

Доказательство леммы 12. Пусть $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда по определению функционала Минковского

$$x \in \mu(x, \mathcal{U}_1)\mathcal{U}_1 \subset \mu(x, \mathcal{U}_1)\mathcal{U}_2,$$

$$\mu(x, \mathcal{U}_1) \geq \inf\{t > 0 : x \in t\mathcal{U}_2\} = \mu(x, \mathcal{U}_2).$$

Допустим, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\mu(x, \mathcal{U}_1) \geq \mu(x, \mathcal{U}_2).$$

Тогда в силу (П.1)

$$\mathcal{U}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x, \mathcal{U}_1) \leq 1\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x, \mathcal{U}_2) \leq 1\} = \mathcal{U}_2.$$

Лемма 12 доказана.

Лемма 13. Пусть $p_2 > p_1 > 0$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ верно неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_1} \right)^{1/p_1} \geq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_2} \right)^{1/p_2}.$$

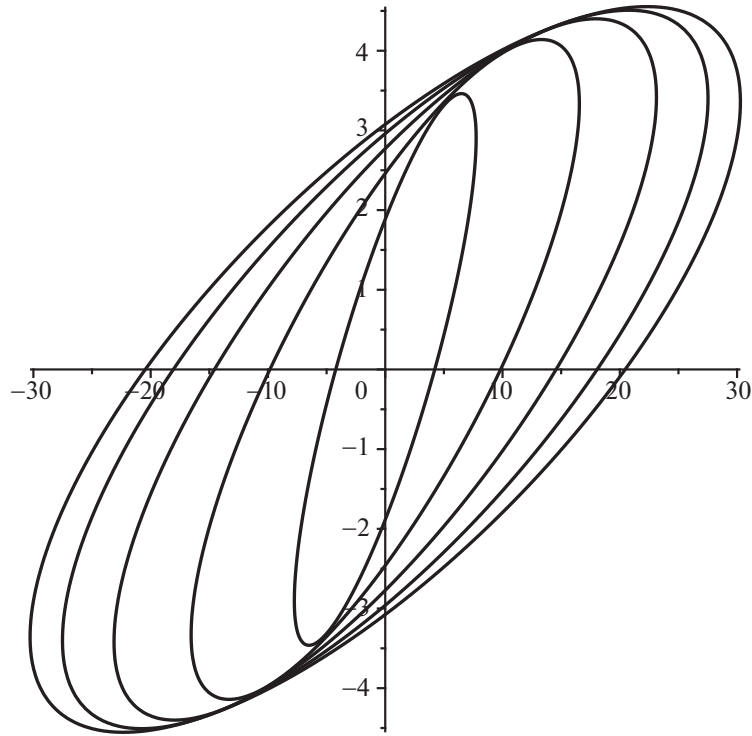


Рис. 5. Множества $\mathcal{U}_2(N)$ для системы (1.1), (5.2), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Доказательство леммы 13. Для произвольного $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ рассмотрим функцию $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(p) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Функция f на области определения является непрерывно дифференцируемой. Тогда для доказательства леммы 13 достаточно показать, что $f'(p) \leq 0$ для всех $p > 0$. Обозначим через $\overline{\ln|t|}$ функцию следующего вида:

$$\overline{\ln|t|} = \begin{cases} \ln|t|, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(p) &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\exp \left\{ \frac{1}{p} \ln \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) \right\} \right) = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{p} \ln \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) \right\} \left(-\frac{1}{p^2} \ln \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) + \frac{\sum_{i=1}^n (|x_i|^p \overline{\ln|x_i|})}{p \sum_{i=1}^n |x_i|^p} \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p-1} \frac{1}{p^2} \left(-\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) \ln \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) + \sum_{i=1}^n (|x_i|^p \overline{\ln|x_i|^p}) \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p-1} \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^n \left[|x_i|^p \left(\overline{\ln|x_i|^p} - \ln \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right) \right) \right] \leq 0, \end{aligned}$$

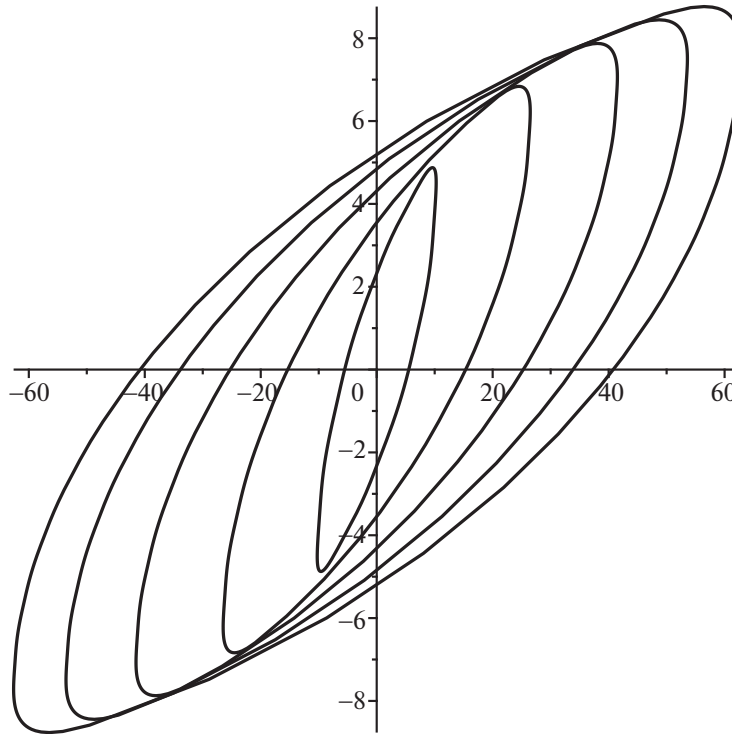


Рис. 6. Множества $\mathcal{U}_4(N)$ для системы (1.1), (5.2), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

так как для всех $i = \overline{1, n}$

$$\overline{\ln|x_i|^p} \leq \ln \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right).$$

Лемма 13 доказана.

Доказательство леммы 1. В силу леммы 13 для каждого $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^N |u_j|^{p_1} \right)^{1/p_1} \geq \left(\sum_{j=1}^N |u_j|^{p_2} \right)^{1/p_2}.$$

Поскольку для произвольного $p \in (1; +\infty)$

$$\mu(u, \mathcal{E}_p(N)) = \left(\sum_{j=1}^N |u_j|^p \right)^{1/p},$$

то, согласно лемме 12, верно включение $\mathcal{E}_{p_1}(N) \subset \mathcal{E}_{p_2}(N)$. С учетом представления (2.1) также справедливо включение $\mathcal{U}_{p_1}(B_N) \subset \mathcal{U}_{p_2}(B_N)$.

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $x^1, x^2 \in \mathcal{U}_p(B_N)$, $\lambda \in (0; 1)$. В силу (2.1) существуют $u^1, u^2 \in \mathcal{E}_p(N)$, такие, что $x^1 = B_N u^1$, $x^2 = B_N u^2$. Поскольку $\mathcal{E}_p(N)$ выпукло, то $\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2 \in \mathcal{E}_p(N)$. С учетом (2.1)

$$\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 = B_N(\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2) \in B_N \mathcal{E}_p(N) = \mathcal{U}_p(B_N),$$

т.е. $\mathcal{U}_p(B_N)$ выпукло.

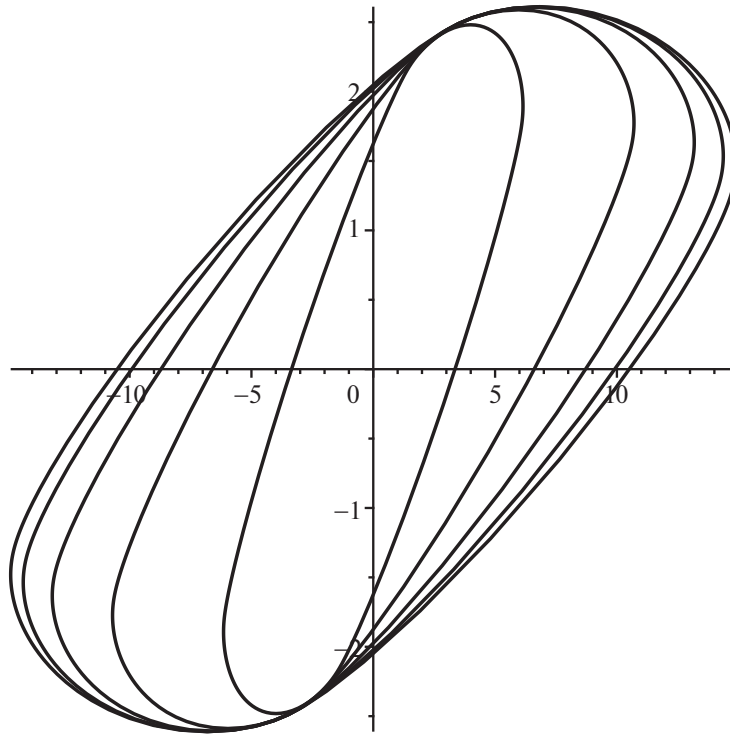


Рис. 7. Множества $\mathcal{U}_{4/3}(N)$ для системы (1.1), (5.2), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Предположим, что $\text{rank} B_N = n$. Поскольку при $p \in (1; +\infty)$ множество $\mathcal{E}_p(N)$ строго выпукло, то $\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2 \in \text{int } \mathcal{U}$, т.е. существует открытый шар $O_\varepsilon(\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2) \subset \mathcal{E}_p(N)$. Тогда в силу (2.1)

$$B_N O_\varepsilon(\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2) \subset \mathcal{U}_p(B_N).$$

Так как $\text{rank} B_N = n$, существует открытый шар

$$O_\delta(B_N(\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2)) \subset B_N O_\varepsilon(\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2) \subset \mathcal{U}_p(B_N),$$

т.е. $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in \text{int } \mathcal{U}_p(B_N)$. Следовательно, $\mathcal{U}_p(B_N)$ по определению строго выпуклое.

Замкнутость и ограниченность следует из того факта, что по определению $\mathcal{U}_p(B_N)$ представляет собой образ замкнутого и ограниченного множества $\mathcal{E}_p(N)$ под действием непрерывного линейного отображения $B_N : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ [15, разд. 2, §5, Гл. IV].

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Как показано в [4], лемма 5 для произвольного выпуклого и компактного множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$, линейного ограниченного оператора $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ и точки $u \in \mathcal{U}$ справедливо равенство

$$\mathcal{N}(Au, A\mathcal{U}) = (A^T)^{-1}(\mathcal{N}(u, \mathcal{U})) \cup (\ker A^T \setminus \{0\}).$$

Если в данном равенстве положить $A = B_N$, $\mathcal{U} = \mathcal{E}_p(N)$, то получим соотношения

$$\mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) = (B_N^T)^{-1}(\mathcal{N}(u, \mathcal{E}_p(N))) \cup (\ker B_N^T \setminus \{0\}). \tag{П.2}$$

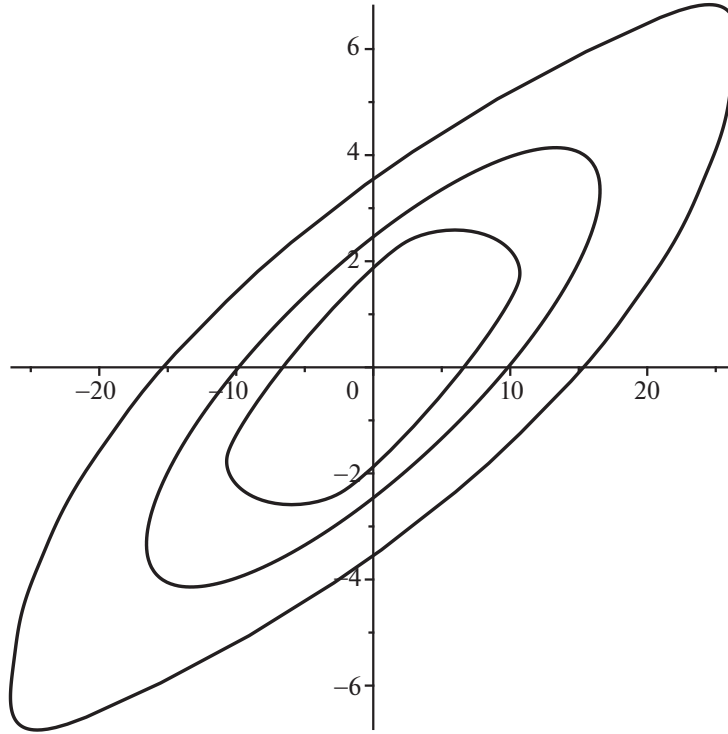


Рис. 8. Множества $\mathcal{U}_{4/3}(8)$, $\mathcal{U}_2(8)$, $\mathcal{U}_4(8)$ для системы (1.1), (5.2)

Так как при $p \in (1; +\infty)$ функционал Минковского множества $\mathcal{E}_p(N)$ является гладкой функцией по первому аргументу:

$$\mu(u, \mathcal{E}_p(N)) = \left(\sum_{j=1}^N |u_j|^p \right)^{1/p},$$

то нормальный конус множества $\mathcal{E}_p(N)$ в любой граничной точке $u \in \partial \mathcal{E}_p(N)$ представляет собой коническую оболочку градиента функционала Минковского в точке u [12, теорема 25.6]:

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{E}_p(N)) = \text{cone} \{ \nabla_u \mu(u, \mathcal{E}_p(N)) \} \setminus \{0\} = \left\{ \alpha \left(|u_1|^{p-1} \text{sign} u_1 \dots |u_N|^{p-1} \text{sign} u_N \right)^T : \alpha > 0 \right\}.$$

С учетом того, что $\text{rank} B_N = n$ и $\ker B_N^T = \{0\}$, в силу (П.2) верны равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) &= (B_N^T)^{-1}(\{ \alpha (|u_1|^{p-1} \text{sign} u_1 \dots |u_N|^{p-1} \text{sign} u_N)^T : \alpha > 0 \}) = \\ &= \bigcup_{\alpha > 0} (B_N^T)^{-1}(\{ \alpha (|u_1|^{p-1} \text{sign} u_1 \dots |u_N|^{p-1} \text{sign} u_N)^T \}) = \\ &= \text{cone} \{ f \in \mathbb{R}^n : B_N^T f = (|u_1|^{p-1} \text{sign} u_1 \dots |u_N|^{p-1} \text{sign} u_N)^T \} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Поскольку $\text{rank} B_N = \text{rank} B_N^T = n$, то уравнение

$$B_N^T f = \left(|u_1|^{p-1} \text{sign} u_1 \dots |u_N|^{p-1} \text{sign} u_N \right)^T$$

имеет либо одно, либо нуль решений. Иначе говоря,

$$\dim \mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) \leq 1.$$

При этом в случае $B_N u \in \partial \mathcal{U}_p(B_N)$ с учетом определения нормального конуса справедлива нижняя оценка:

$$\mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) \neq \emptyset, \quad \dim \mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) \geq 1.$$

Отсюда следует первое утверждение леммы 3.

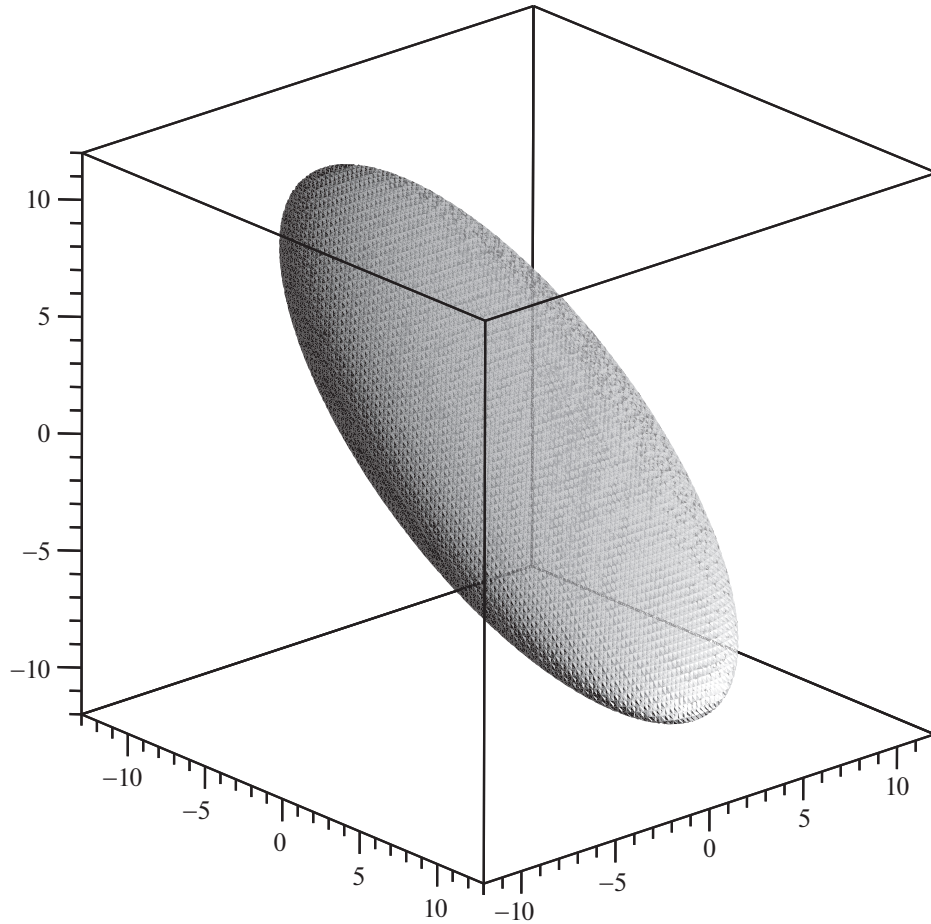


Рис. 9. Множество $\mathcal{U}_2(20)$ для системы управления движением спутника

Для доказательства второго утверждения леммы 3, согласно определению опорного вектора, достаточно показать, что $x^*(f)$ является точкой максимума (f, x) при условии $x \in \mathcal{U}_p(B_N)$.

Учитывая, что

$$B_N^T f = ((f, b_1) \dots (f, b_N))^T,$$

получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \arg \max_{x \in \mathcal{U}_p(B_N)} (f, x) &= B_N \arg \max_{u \in \mathcal{E}_p(N)} (f, B_N u) = B_N \arg \max_{u \in \mathcal{E}_p(N)} (B_N^T f, u) = \\ &= \frac{(b_1 \dots b_N)}{\left(\sum_{i=1}^N |(f, b_i)|^q \right)^{1/p}} \begin{pmatrix} |(f, b_1)|^{q-1} \text{sign}(f, b_1) \\ \vdots \\ |(f, b_N)|^{q-1} \text{sign}(f, b_N) \end{pmatrix} = x^*(f). \end{aligned}$$

Второе утверждение леммы 3 доказано.

Доказательство леммы 4. Представим B' следующим образом:

$$B' u = \left((y^1, u), \dots, (y^n, u) \right)^T, \quad u \in l_p,$$

где y^1, \dots, y^n – некоторые линейные функционалы.

Пусть верно включение $B' \in l_q^n$. В силу [15, разд. 3, §3, Гл. IV] для всех $i = \overline{1, n}$ функционалы $y^i : l_p \rightarrow \mathbb{R}$ являются ограниченными и определенными на всем l_p , т.е.

$$\sup_{\|u\|_{l_p} \leq 1} |(y^i, u)| = C_i < \infty, \quad \mathcal{D}_{B'} = l_p.$$

Отсюда, согласно определению ограниченного оператора [15, разд. 2, §5, Гл. IV], следует ограниченность множества $\mathcal{U}_p(B')$ в \mathbb{R}^n в смысле нормы

$$\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1, n}} |x_i|.$$

Поскольку \mathbb{R}^n – конечномерное пространство, то все нормы в нем эквивалентны [15, разд. 3, Гл. III], а следовательно, $\mathcal{U}_p(B')$ ограничено в \mathbb{R}^n в смысле любой нормы.

Пусть $B' \notin l_q^n$, что равносильно существованию $j = \overline{1, n}$, такого, что $y^j \notin l_q$. Согласно [15, разд. 3, §2, Гл. IV], y^j не является ограниченным функционалом в l_p , что с учетом [15, разд. 2, §1, Гл. IV] предполагает его неограниченность на $\mathcal{E}_p(\infty)$. Тогда найдется последовательность $\{u^{(N)}\}_{N \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_p(\infty)$, на которой функционал y^j определен, но при этом неограничен, т.е. для всех $C > 0$ можно подобрать число $N_C \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|(y^j, u^{(N_C)})| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} y_k^j u_k^{(N_C)} \right| > 2C.$$

С другой стороны, в силу сходимости ряда существует $K_C \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\left| \sum_{k=K_C+1}^{\infty} y_k^j u_k^{(N_C)} \right| < C.$$

Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^{K_C} y_k^j u_k^{(N_C)} \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{\infty} y_k^j u_k^{(N_C)} \right| - \left| \sum_{k=K_C+1}^{\infty} y_k^j u_k^{(N_C)} \right| > C. \quad (\text{П.3})$$

Пусть

$$\tilde{u}^{(M)} = (u_1^{(N_M)}, \dots, u_{K_M}^{(N_M)}, 0, \dots).$$

Тогда верно включение $\{\tilde{u}^{(M)}\}_{M \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}_p(\infty) \cap \mathcal{D}_{B'}$, так как для каждого $M \in \mathbb{N}$ последовательность $\tilde{u}^{(M)}$ финитна. Однако с учетом (П.3) справедливы соотношения

$$\|B' \tilde{u}^{(M)}\|_\infty = \max_{i=\overline{1, n}} |(y^i, \tilde{u}^{(M)})| \geq |(y^j, \tilde{u}^{(M)})| = \left| \sum_{k=1}^{K_M} y_k^j u_k^{(N_M)} \right| > M.$$

Поскольку $\{B' \tilde{u}^{(M)}\}_{M \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_p(B')$, согласно (2.4), то множество $\mathcal{U}_p(B')$ неограничено в смысле нормы $\|\cdot\|_\infty$, а следовательно, неограничено в \mathbb{R}^n в смысле любой нормы в силу их эквивалентности.

Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. Пусть $x \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$, т.е. существует $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, такой, что $x \in \mathcal{U}_p(B_{\tilde{N}})$. Откуда в силу (2.1) существует $(u_1, \dots, u_{\tilde{N}})^T \in \mathcal{E}_p(\tilde{N})$, удовлетворяющий равенству

$$x = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} u_j b_j.$$

Но тогда $(u_1, \dots, u_{\tilde{N}}, 0, \dots) \in \mathcal{E}_p(\infty)$, что в силу (2.4) равносильно включению $x \in \mathcal{U}_p(B')$. Отсюда следует, что

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N) \subset \mathcal{U}_p(B').$$

Поскольку по условию $B' : l_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ является ограниченным оператором, то с учетом (2.4) множество $\mathcal{U}_p(B')$ замкнуто, так как является образом замкнутого множества $\mathcal{E}_p(\infty)$. Тогда

$$\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)} \subset \overline{\mathcal{U}_p(B')} = \mathcal{U}_p(B').$$

Произвольный $x \in \mathcal{U}_p(B')$ – предельная точка множества $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$. Согласно (2.4), найдется $u = (u_1, u_2, \dots) \in \mathcal{E}_p(\infty)$, такой, что $x = B'u$. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ определим $u^{(N)} \in \mathbb{R}^n$:

$$u^{(N)} = (u_1, \dots, u_N)^T.$$

По построению $u^{(N)} \in \mathcal{E}_p(N)$. Тогда в силу (2.1) верно включение

$$\{B_N u^{(N)}\}_{N \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N) \subset \mathbb{R}^n.$$

При этом в смысле любой нормы в \mathbb{R}^n с учетом неравенства Гельдера справедливы соотношения

$$\|B'u - B_N u^{(N)}\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k u_k \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|b_k\| |u_k| \leq \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \|b_k\|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{1/p} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Сходимость выполняется, потому что оба сомножителя являются остатками сходящихся рядов [23, разд. 4, §1, Гл. III], где ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|b_k\|^q$ сходится, поскольку $B' \in l_q^n$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p$ сходится, так как $u \in \mathcal{E}_p(\infty)$. Получаем

$$\mathcal{U}_p(B') \subset \overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)}.$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 6. Пусть $y^i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots) \in l_q$ не финитна для некоторого $i = \overline{1, n}$. Вычислим норму $\tilde{u} \in l_p$:

$$\|\tilde{u}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{|b_{ij}|^{q-1} \text{sign} b_{ij}}{\|y^i\|_q^{q/p}} \right|^p \right)^{1/p} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}|^{qp(1-1/q)} \right)^{1/p}}{\|y^i\|_q^{q/p}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}|^q \right)^{1/q \cdot q/p}}{\|y^i\|_q^{q/p}} = 1.$$

Тогда по определению $\tilde{u} \in \mathcal{E}_p(\infty)$ и в силу (2.4)

$$\tilde{x} \in \mathcal{U}_p(B').$$

Рассмотрим следующую гиперплоскость:

$$\mathcal{H}_i = \left\{ u \in l_p : \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} u_j = \|y^i\|_q \right\} \subset l_p.$$

По построению

$$\tilde{x}_i = (y^i, \tilde{u}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|b_{ij}|^{q-1} b_{ij} \text{sign} b_{ij}}{\|y^i\|_q^{q/p}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|b_{ij}|^q}{\|y^i\|_q^{q/p}} = \|y^i\|_q^{q-q/p} = \|y^i\|_q.$$

В силу неравенства Гельдера [15, разд. 2, §1, Гл. IV]

$$\max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} (y^i, u) \leq \max_{\|u\|_p \leq 1} \|y^i\|_q \|u\|_p \leq \|y^i\|_q = (y^i, \tilde{u}).$$

Тогда гиперплоскость \mathcal{H}_i является опорной к множеству $\mathcal{E}_p(\infty)$ в точке $\tilde{u} \in \partial \mathcal{E}_p(\infty)$. Так как $\mathcal{E}_p(\infty)$ представляет собой строго выпуклое множество при $p \in (1; +\infty)$, то \tilde{u} – единственная точка касания [4, лемма 3]:

$$\{\tilde{u}\} = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{E}_p(\infty).$$

Другими словами, для любой $u \in \mathcal{E}_p(\infty) \setminus \{\tilde{u}\}$ верно неравенство $(B'u)_i = (y_i, u) < (y_i, \tilde{u}) = \tilde{x}_i$. Следовательно, $\tilde{x} \in \mathcal{U}_p(B')$ имеет единственный прообраз при отображении B' , но при этом не существует $N \in \mathbb{N}$, такого, что $x \in \mathcal{U}_p(B_N)$, так как последовательности y^i и \tilde{u} по условию не являются финитными. Окончательно получим, что

$$\tilde{x} \notin \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Лемма 6 доказана.

Доказательство следствия 1. Доказательство следствия 1 вытекает непосредственно из леммы 6 и того факта, что в случае финитности всех $y^1, \dots, y^n \in l_q$ существует $N_0 \in \mathbb{N}$, такой, что

$$\mathcal{U}_p(B_{N_0}) = \mathcal{U}_p(B_N) = \mathcal{U}_p(B'), \quad N \geq N_0.$$

Лемма 14 ([3]). Для любого $f \in l_q \setminus \{0\}$ вектор

$$u^* = \frac{1}{\|f\|_q^{q/p}} (|f_1|^{q-1} \text{sign} f_1, |f_2|^{q-1} \text{sign} f_2, \dots)$$

является единственным решением оптимизационной задачи

$$(f, u) \rightarrow \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)}.$$

Доказательство леммы 7. Рассмотрим произвольный

$$\tilde{x} \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Пусть для всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено условие $\dim \text{Lin}\{b_N, b_{N+1}, \dots\} = n$. Тогда существует $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что $\tilde{x} \in \mathcal{U}_p(B_{\tilde{N}})$, что в силу (2.1) и (2.4) эквивалентно существованию $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{\tilde{N}}, 0, \dots) \in \mathcal{E}_p(\infty)$, такого, что верно равенство

$$\tilde{x} = B_{\tilde{N}} (\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{N}})^T = B' \tilde{u}.$$

Рассмотрим произвольный $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда с учетом леммы 14

$$\max_{x \in \mathcal{U}_p(B')} (f, x) = \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} (f, B'u) = \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j) u_j = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j)^q \right)^{1/q},$$

$$u^* = \arg \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j) u_j = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j)^q \right)^{1/p}} \left(|(f, b_1)|^{q-1} \text{sign}(f, b_1), |(f, b_2)|^{q-1} \text{sign}(f, b_2), \dots \right).$$

При этом u^* – единственная точка максимума, т.е. для всех $u \in \mathcal{E}_p(\infty) \setminus \{u^*\}$ верны соотношения

$$(f, B'u^*) = \sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j) u_j^* > \sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j) u_j = (f, B'u). \quad (\text{П.4})$$

Следовательно, не существует $u \in \mathcal{E}_p(\infty) \setminus \{u^*\}$, такого, что $B'u^* = B'u$. Равенство $B'u^* = B'\tilde{u}$ верно тогда и только тогда, когда $u^* = \tilde{u}$. Это эквивалентно следующим условиям:

$$(f, b_j) = 0, \quad j > \tilde{N},$$

$$f \in \text{Lin}^\perp \{b_{\tilde{N}+1}, b_{\tilde{N}+2}, \dots\},$$

что в силу условия $f \neq 0$ равносильно неравенствам

$$\begin{aligned} \dim \text{Lin}^\perp \{b_{\tilde{N}+1}, b_{\tilde{N}+2}, \dots\} &\geq 1, \\ \dim \text{Lin} \{b_{\tilde{N}+1}, b_{\tilde{N}+2}, \dots\} &< n. \end{aligned}$$

Получили противоречие. Иначе говоря, равенство $u^* = \tilde{u}$ невозможно, что с учетом (П.4) и определения нормального конуса означает, что для всех $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathcal{U}_p(B')} (f, x) &= (f, B' u^*) > (f, B' \tilde{u}) = (f, \tilde{x}), \\ \mathcal{N}(\tilde{x}, \mathcal{U}_p(B')) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Тогда из определения нормального конуса $\tilde{x} \in \text{int } \mathcal{U}_p(B')$, т.е.

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N) \subset \text{int } \mathcal{U}_p(B'),$$

что с учетом леммы 5 приводит к равенству

$$\text{int } \mathcal{U}_p(B') = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Пусть существует $N \in \mathbb{N}$, такой, что

$$\dim \text{Lin} \{b_{N+1}, b_{N+2}, \dots\} < n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dim \text{Lin}^\perp \{b_{N+1}, b_{N+2}, \dots\} &\geq 1, \\ \text{Lin}^\perp \{b_{N+1}, b_{N+2}, \dots\} \setminus \{0\} &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Выберем произвольный $f \in \text{Lin}^\perp \{b_{N+1}, b_{N+2}, \dots\} \setminus \{0\}$ и построим $u^* \in \mathcal{C}_p(\infty)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j)^q \right)^{1/p}} \left((f, b_1)^{q-1} \text{sign}(f, b_1), (f, b_2)^{q-1} \text{sign}(f, b_2), \dots \right) = \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^N (f, b_j)^q \right)^{1/p}} \left((f, b_1)^{q-1} \text{sign}(f, b_1), \dots, (f, b_N)^{q-1} \text{sign}(f, b_N), 0, \dots \right). \end{aligned}$$

В силу леммы 14

$$(f, B' u^*) = \max_{u \in \mathcal{C}_p(\infty)} \sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j) u_j = \max_{u \in \mathcal{C}_p(\infty)} (f, B' u) = \max_{x \in \mathcal{U}_p(B')} (f, x).$$

Поскольку с учетом (2.4) $B' u^* \in \mathcal{U}_p(B')$, то, согласно определению нормального конуса, $f \in \mathcal{N}(B' u^*, \mathcal{U}_p(B'))$, откуда следует, что

$$B' u^* \in \partial \mathcal{U}_p(B').$$

Однако по построению u^* финитна и $B' u^* \in \mathcal{U}_p(B_N)$. Тогда

$$\begin{aligned} B' u^* &\in \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N) \setminus \text{int } \mathcal{U}_p(B'), \\ \text{int } \mathcal{U}_p(B') &\neq \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N). \end{aligned}$$

Лемма 7 доказана.

Доказательство леммы 8. В силу [15, разд. 3, §2, Гл. IV] $B' : l_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ является линейным и ограниченным оператором. Согласно [4], лемма 5, для строго выпуклого множества $\mathcal{E}_p(\infty)$ и произвольного $u \in \mathcal{E}_p(\infty)$ верно равенство

$$\mathcal{N}(B'u, B'\mathcal{E}_p(\infty)) = (B'^*)^{-1}(\mathcal{N}(u, \mathcal{E}_p(\infty))) \cup (\ker B'^* \setminus \{0\}),$$

где через $B'^* : \mathbb{R}^n \rightarrow l_q$ обозначен оператор, сопряженный к B' [15, разд. 5, §5, Гл. IV]. В силу (2.2) справедливо условие $\ker B'^* = \{0\}$. Так же, как продемонстрировано в [4], пример 1,

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{E}_p(\infty)) = \text{cone}\{(|u_1|^{p-1}\text{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\text{sign}u_2, \dots)\} \setminus \{0\}.$$

Тогда с учетом представления (2.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(B'u, \mathcal{U}_p(B')) &= (B'^*)^{-1}\left(\left\{\alpha(|u_1|^{p-1}\text{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\text{sign}u_2, \dots) : \alpha > 0\right\}\right) = \\ &= \bigcup_{\alpha > 0} (B'^*)^{-1}\left(\left\{\alpha(|u_1|^{p-1}\text{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\text{sign}u_2, \dots)\right\}\right) = \\ &= \text{cone}\{f \in \mathbb{R}^n : B'^* f = (|u_1|^{p-1}\text{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\text{sign}u_2, \dots)\} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Поскольку справедливо условие (2.2), уравнение

$$B'^* f = (|u_1|^{p-1}\text{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\text{sign}u_2, \dots)$$

имеет либо одно, либо нуль решений, т.е.

$$\dim \mathcal{N}(B'u, \mathcal{U}_p(B')) \leq 1.$$

При этом в случае $B'u \in \partial \mathcal{U}_p(B')$ с учетом определения нормального конуса справедлива нижняя оценка:

$$\mathcal{N}(B'u, \mathcal{U}_p(B')) \neq \emptyset,$$

$$\dim \mathcal{N}(B'u, \mathcal{U}_p(B')) \geq 1.$$

Отсюда следует первое утверждение леммы 8.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \arg \max_{x \in \mathcal{U}_p(B')} (f, x) &= B' \arg \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} (f, B'u) = B' \arg \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} (B'^* f, u) = \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |(f, b_i)|^q\right)^{1/p}} B' \left(|(f, b_1)|^{q-1} \text{sign}(f, b_1), |(f, b_2)|^{q-1} \text{sign}(f, b_2), \dots \right). \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство обусловлено леммой 14.

С учетом определения B' второе утверждение леммы 8 доказано.

Доказательство леммы 9. Доказательство леммы вытекает непосредственно из определений (1.3), (1.4) и определения множеств $\mathcal{E}_p(N)$ и $\mathcal{U}_p(B_N)$.

Доказательство теоремы 1. Пункт 1 следует из определения множеств достижимости (1.3) и управляемости (1.4) пункт 2 – из лемм 1 и 9, пункт 3 – из леммы 2, пункт 4 – из лемм 2 и 3 и п. 1 леммы 9. Аналогично пункт 5 вытекает из тех же лемм при использовании п. 2 леммы 9.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим ограниченность $\mathcal{Y}_{p,\infty}$. Пусть $h_1, \dots, h_n \subset \mathbb{R}^n$ – жорданов базис матрицы A , а вектор b допускает разложение $b = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n$. Обозначим че-

рез $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ невырожденную матрицу, задающую преобразование подобия A к ее вещественной жордановой форме [20, разд. 3.4, Гл. 3]:

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix}, \quad (\text{П.5})$$

где каждый блок J_i соответствует либо вещественному собственному значению $\lambda_i \in \mathbb{R}$ матрицы A и имеет вид

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad (\text{П.6})$$

либо соответствует паре комплексно-сопряженных собственных значений $re^{\pm i\varphi} \in \mathbb{C}$ матрицы A и имеет вид

$$J_i = \begin{pmatrix} r_i A_{\varphi_i} & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_i A_{\varphi_i} & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r_i A_{\varphi_i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_i A_{\varphi_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}. \quad (\text{П.7})$$

Заметим, что в случае (П.7) n_i четное. Также в силу представления (П.5) включения $(b, Ab, A^2b, \dots) \in l_q^n$ и $(S^{-1}b, JS^{-1}b, J^2S^{-1}b, \dots) \in l_q^n$ равносильны.

Согласно определению жорданова базиса, $S^{-1}b = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$. Сгруппируем координаты вектора $S^{-1}b$ в соответствии с размерностями и расположением жордановых клеток в разложении (П.5) и введем следующие обозначения:

$$S^{-1}b = (\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,n_1}, \dots, \alpha_{m,1}, \dots, \alpha_{m,n_m})^T, \\ J^k S^{-1}b = (\alpha_{1,1}(k), \dots, \alpha_{1,n_1}(k), \dots, \alpha_{m,1}(k), \dots, \alpha_{m,n_m}(k))^T, \quad k \in \mathbb{N}.$$

С учетом разложения (П.5) для любых $i = \overline{1, m}$ верно соотношение

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix} = J_i^k \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i} \end{pmatrix}.$$

1. В случае (П.6) для всех $k \geq n_i - 1$ справедливо представление

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & C_k^2 \lambda_i^{k-2} & \cdots & C_k^{n_i-1} \lambda_i^{k-n_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{n_i-2} \lambda_i^{k-n_i+2} \\ 0 & 0 & \lambda_i^k & \cdots & C_k^{n_i-3} \lambda_i^{k-n_i+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k \end{pmatrix},$$

где здесь и везде далее через C_k^j обозначено число сочетаний из k по j :

$$C_k^j = \frac{k!}{(k-j)!j!}.$$

Получим представление

$$\alpha_{i,j}(k) = \sum_{l=j}^{n_i} \alpha_{i,l} C_k^{l-j} \lambda_i^{k-l+j}, \quad j = \overline{1, n_i}.$$

Если $|\lambda_i| < 1$ и $k > 2(n_i - 1)$, то также справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\alpha_{i,j}(k)| &\leq \sum_{l=j}^{n_i} |\alpha_{i,l}| C_k^{l-j} |\lambda_i|^{k-l+j} \leq \sum_{l=1}^{n_i} |\alpha_{i,l}| C_k^{n_i-1} |\lambda_i|^{k-n_i+1} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{l=1}^{n_i} |\alpha_{i,l}|}{(n_i - 1)! (k - n_i + 1)!} |\lambda_i|^{k-n_i+1} \leq \frac{\sum_{l=1}^{n_i} |\alpha_{i,l}|}{(n_i - 1)!} k^{n_i-1} |\lambda_i|^{k-n_i+1}. \end{aligned}$$

Откуда с учетом определения пространства l_q и критериев сходимости числовых рядов [23, разд. 4, §1, Гл. III] следует, что $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \dots) \in l_q$.

Пусть $|\lambda_i| \geq 1$ и существует $j = \overline{1, n_i}$, такой, что $\alpha_{i,j} \neq 0$. Без ограничения общности будем полагать, что $j = n_i$ или $\alpha_{i,j+1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$. Тогда

$$\alpha_{i,j}(k) = \alpha_{i,j} \lambda_i^k,$$

т.е. $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \dots) \notin l_q$.

Если $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$, то при любых значениях $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_{i,j}(k) = 0, \quad j = \overline{1, n_i},$$

т.е. $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \dots) = 0 \in l_q$.

Получаем, что в случае (П.6) включение

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,1} & \alpha_{i,1}(1) & \alpha_{i,1}(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{i,n_i} & \alpha_{i,n_i}(1) & \alpha_{i,n_i}(2) & \dots \end{pmatrix} \in l_q^{n_i}$$

справедливо тогда и только тогда, когда либо $|\lambda_i| < 1$, либо $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$.

2. В случае (П.7) учтем, что n_i четное, и введем обозначения

$$\tilde{n}_i = \frac{n_i}{2}, \quad \tilde{\alpha}_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,2j-1} \\ \alpha_{i,2j} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha}_{i,j}(k) = \begin{pmatrix} \alpha_{i,2j-1}(k) \\ \alpha_{i,2j}(k) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, \tilde{n}_i}.$$

Для всех $k \geq \tilde{n}_i - 1$ справедливо представление

$$J_i^k = \begin{pmatrix} r_i^k A_{k\varphi} & C_k^1 r_i^{k-1} A_{(k-1)\varphi} & C_k^2 A_{(k-2)\varphi} r_i^{k-2} & \dots & C_k^{\tilde{n}_i-1} r_i^{k-\tilde{n}_i+1} A_{(k-\tilde{n}_i+1)\varphi} \\ 0 & r_i^k A_{k\varphi} & C_k^1 r_i^{k-1} A_{(k-1)\varphi} & \dots & C_k^{\tilde{n}_i-2} r_i^{k-\tilde{n}_i+2} A_{(k-\tilde{n}_i+2)\varphi} \\ 0 & 0 & r_i^k A_{k\varphi} & \dots & C_k^{\tilde{n}_i-3} r_i^{k-\tilde{n}_i+3} A_{(k-\tilde{n}_i+3)\varphi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_i^k A_{k\varphi} \end{pmatrix},$$

Следовательно, получим представление

$$\tilde{\alpha}_{i,j}(k) = \sum_{l=j}^{\tilde{n}_i} C_k^{l-j} r_i^{k-l+j} A_{(k-l+j)\varphi} \tilde{\alpha}_{i,l}, \quad j = \overline{1, \tilde{n}_i}.$$

Если $r_i < 1$ и $k > 2(\tilde{n}_i - 1)$, то также справедливы оценки

$$\begin{aligned} \max\{|\alpha_{i,2j-1}(k)|, |\alpha_{i,2j}(k)|\} &\leq \|\tilde{\alpha}_{i,j}(k)\| \leq \sum_{l=j}^{\tilde{n}_i} \|A_{(k-l+j)\varphi} \tilde{\alpha}_{i,l}\| C_k^{l-j} r_i^{k-l+j} \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^{\tilde{n}_i} \|\tilde{\alpha}_{i,l}\| C_k^{\tilde{n}_i-1} r_i^{k-\tilde{n}_i+1} \leq \frac{\sum_{l=1}^{\tilde{n}_i} \|\tilde{\alpha}_{i,l}\|}{(\tilde{n}_i - 1)! (k - \tilde{n}_i + 1)!} r_i^{k-\tilde{n}_i+1} \leq \frac{\sum_{l=1}^{\tilde{n}_i} \|\tilde{\alpha}_{i,l}\|}{(\tilde{n}_i - 1)!} k^{\tilde{n}_i-1} r_i^{k-\tilde{n}_i+1}. \end{aligned}$$

Откуда с учетом определения пространства l_q и критериев сходимости числовых рядов [23, разд. 4, §1, Гл. III] следует, что $(\alpha_{i,2j-1}, \alpha_{i,2j-1}(1), \alpha_{i,2j-1}(2), \dots) \in l_q$ и $(\alpha_{i,2j}, \alpha_{i,2j}(1), \alpha_{i,2j}(2), \dots) \in l_q$.

Пусть $r_i \geq 1$ и существует $j = \overline{1, \tilde{n}_i}$, такой, что $\|\tilde{\alpha}_{i,j}\| \neq 0$. Без ограничения общности будем полагать, что $j = \tilde{n}_i$ или $\|\tilde{\alpha}_{i,j+1}\| = \dots = \|\tilde{\alpha}_{i,\tilde{n}_i}\| = 0$. Тогда

$$\|\tilde{\alpha}_{i,j}(k)\| = \|A_{k\varphi} \tilde{\alpha}_{i,j}\| r_i^k = \|\tilde{\alpha}_{i,j}\| r_i^k,$$

т.е. $(\|\tilde{\alpha}_{i,j}\|, \|\tilde{\alpha}_{i,j}(1)\|, \|\tilde{\alpha}_{i,j}(2)\|, \dots) \notin l_q$. Отсюда с учетом неравенства Минковского следует, что хотя бы одна последовательность $(\alpha_{i,2j-1}, \alpha_{i,2j-1}(1), \alpha_{i,2j-1}(2), \dots)$ или $(\alpha_{i,2j}, \alpha_{i,2j}(1), \alpha_{i,2j}(2), \dots)$ не принадлежит l_q .

Если $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$, то при любых значениях $r_i \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_{i,j}(k) = 0, \quad j = \overline{1, n_i},$$

т.е. $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \dots) = 0 \in l_q$.

Получаем, что в случае (П.7) включение

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,1} & \alpha_{i,1}(1) & \alpha_{i,1}(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{i,n_i} & \alpha_{i,n_i}(1) & \alpha_{i,n_i}(2) & \dots \end{pmatrix} \in l_q^{n_i}$$

справедливо тогда и только тогда, когда либо $r_i < 1$, либо $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$.

Окончательно, включения $(b, Ab, A^2b, \dots) \in l_q^n$ и $(S^{-1}b, JS^{-1}b, J^2S^{-1}b, \dots) \in l_q^n$, равносильные, согласно (П.5), справедливы тогда и только тогда, когда $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$ для всех $i = \overline{1, m}$, которые соответствуют собственным значениям матрицы A по модулю не меньшим 1, т.е. $b \in \mathbb{L}_{<1}$. В силу лемм 4, 5 и п. 1 леммы 9 данный факт эквивалентен ограниченности $\mathcal{Y}_{p,\infty}$.

С учетом определения (1.5) и леммы 5 множество $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ с точностью до замыкания совпадает с $\mathcal{U}_p(B')$, если $B' = (b, Ab, A^2b, \dots)$. Тогда остальные свойства $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ следуют из леммы 8. А выражение для опорной функции вытекает непосредственно из ее определения:

$$s(f, \mathcal{Y}_{p,\infty}) = \sup_{x \in \mathcal{Y}_{p,\infty}} (f, x) = (f, y^*(f)) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} (f, A^i b)^q \right)^{1/q}.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим вопросы ограниченности $\mathcal{X}_{p,\infty}$. Если $\det A = 0$, то у матрицы A существует собственный вектор $h \in \mathbb{R}^n$, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$. Тогда, согласно (1.4) верно включение $\text{Lin}\{h\} \subset \mathcal{X}_p(1)$, что с учетом (1.6) приводит к включению $\text{Lin}\{h\} \subset \mathcal{X}_{p,\infty}$, откуда следует, что $\mathcal{X}_{p,\infty}$ неограничено. Если $\det A \neq 0$, то существует матрица A^{-1} , собственные значения которой взаимнообратны собственным значениям A [20, Гл. I]. Отсюда ясно, что доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2, если заменить A на A^{-1} .

Доказательство следствия 2. Доказательство следствия 2 вытекает из теорем 2, 3 и того факта, что $\det A \neq 0$ тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A отличны от нуля [20, утверждение 1.1.7].

Обозначим через $H^* : l_2 \rightarrow l_2$ оператор, сопряженный к линейному и ограниченному оператору $H : l_2 \rightarrow l_2$ [15, разд. 6, §5, Гл. IV].

Лемма 15. Пусть линейные и ограниченные операторы $H_{11} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $H_{12} : \mathbb{R}^n \rightarrow l_2$, $H_{22} : l_2 \rightarrow l_2$, такие, что $H : l_2 \rightarrow l_2$ является линейным, ограниченным, положительно определенным и самосопряженным оператором, где

$$Hu = (H_{11}(u_1, \dots, u_n) + H_{12}^*(u_{n+1}, u_{n+2}, \dots), H_{12}(u_1, \dots, u_n) + H_{22}^*(u_{n+1}, u_{n+2}, \dots)),$$

$$Pu = (u_1, \dots, u_n)^T,$$

$$\mathcal{U} = \{u \in l_2 : (u, Hu) \leq 1\}.$$

Тогда

$$P^0u = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, (H_{11} - H_{12}^* H_{22}^{-1} H_{12})x) \leq 1\}.$$

Доказательство леммы 15. В силу положительной определенности и самосопряженности оператора H оператор H_{22} также является положительно определенным и самосопряженным. Тогда $(u, H_{22}u) > 0$ для всех $u \in l_2 \setminus \{0\}$, H_{22} обратим [16, разд. 4, гл. X]. Рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned} P^0u &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in l_2 : ((x_1, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots), H(x_1, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots)) \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in l_2 : (x, H_{11}x) + 2(H_{12}x, u) + (u, H_{22}u) \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \min_{u \in l_2} ((x, H_{11}x) + 2(H_{12}x, u) + (u, H_{22}u)) \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \min_{u \in l_2} ((x, H_{11}x) - (H_{22}^{-1} H_{12}x, H_{12}x) + (u + H_{22}^{-1} H_{12}x, H_{22}(u + H_{22}^{-1} H_{12}x))) \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{11}x) - (x, H_{12}^* H_{22}^{-1} H_{12}x) \leq 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x, (H_{11} - H_{12}^* H_{22}^{-1} H_{12})x) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Лемма 15 доказана.

Доказательство леммы 10. Для случая $N > n$ выберем $B' = (B_N, 0, \dots) : l_p \rightarrow \mathbb{R}^n$, определим матрицу $\hat{B}_N = (b_{n+1}, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^{n \times (N-n)}$ и оператор $\tilde{B} : l_p \rightarrow l_p$:

$$\tilde{B}u = (B'u, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots).$$

В силу (2.2) оператор \tilde{B} обратим. Тогда

$$\tilde{B} \mathcal{E}_2(N) = \{u \in l_2 : (\tilde{B}^{-1}u, \tilde{B}^{-1}u) \leq 1\} = \{u \in l_2 : (u, (\tilde{B}^{-1})^* \tilde{B}^{-1}u) \leq 1\}.$$

Поскольку

$$\tilde{B}^{-1}u = (B_n^{-1}(u_1, \dots, u_n) - B_n^{-1}B(u_{n+1}, u_{n+2}, \dots), u_{n+1}, u_{n+2}, \dots),$$

где $B = (0, 0, \dots)$ для $N = n$ и $B = (\hat{B}_N, 0, \dots)$ для $N > n$, положительно определенный и самосопряженный оператор $H = (\tilde{B}^{-1})^* \tilde{B}^{-1}$ допускает представление, описанное в лемме 15:

$$\begin{aligned} H_{11} &= (B_n^{-1})^T B_n^{-1} = H_n, \\ H_{12} &= -B^*(B_n^{-1})^T B_n^{-1} = -B^* H_n, \\ H_{22} &= B^*(B_n^{-1})^T B_n^{-1} B + I = B^* H_n B + I. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно лемме 15, представление множества $\mathcal{U}_2(B_N)$ для случая $N = n$ следует непосредственно. Для случая $N > n$ при учете того, что в силу финитности последовательности B справедливо соотношение

$$Bu = \hat{B}_N (u_{n+1} \dots u_N)^T,$$

вытекает представление

$$\mathcal{U}_2(B_N) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, (H_n - H_n \hat{B}_N (\hat{B}_N^T H_n \hat{B}_N + I)^{-1} \hat{B}_N^T H_n)x) \leq 1\}.$$

При этом, согласно тождеству Шермана–Моррисона–Вудбери [24, §5.1, Гл. 5], верно равенство

$$H_n - H_n \hat{B}_N (\hat{B}_N^T H_n \hat{B}_N + I)^{-1} \hat{B}_N^T H_n = (B_N B_N^T)^{-1} = H_N.$$

Лемма 10 доказана.

Л е м м а 16. Пусть $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симметрическая и положительно определенная матрица, $b \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – эллипсоид:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x \leq 1\}.$$

Тогда

$$\mathcal{Y} = \left\{ \alpha_1 b + \alpha_2 x : x \in \mathcal{X}_{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \leq 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^T \left(H - \frac{Hbb^T H}{1 + b^T Hb} \right) x \leq 1 \right\}.$$

Доказательство леммы 16. По построению \mathcal{Y} является выпуклым множеством и $0 \in \text{int } \mathcal{Y}$. Построим функционал Минковского $\mu(y, \mathcal{Y})$. Согласно определению, вычисление функционала Минковского сводится к решению следующих эквивалентных оптимизационных задач:

$$\begin{aligned} \mu(y, \mathcal{Y}) &= \min\{\gamma > 0 : y = \alpha_1 b + \alpha_2 x, x^T Hx = 1, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \gamma^2\} = \\ &= \min\{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} : \alpha_2 x = \alpha_1 b - y, (\alpha_2 x)^T H(\alpha_2 x) = \alpha_2^2\} = \\ &= \min\{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} : (\alpha_1 b - y)^T H(\alpha_1 b - y) = \alpha_2^2\} = \min_{\alpha_1 \in \mathbb{R}} \sqrt{\alpha_1^2 + (\alpha_1 b - y)^T H(\alpha_1 b - y)} = \\ &= \min_{\alpha_1 \in \mathbb{R}} \sqrt{\alpha_1^2 (1 + b^T Hb) - 2\alpha_1 b^T Hy + y^T Hy} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{b^T Hy}{1 + b^T Hb} \right)^2 (1 + b^T Hb) - 2 \frac{b^T Hy}{1 + b^T Hb} b^T Hy + y^T Hy} = \\ &= \sqrt{y^T Hy - \frac{y^T Hbb^T Hy}{1 + b^T Hb}} = \sqrt{y^T \left(H - \frac{y^T Hbb^T Hy}{1 + b^T Hb} \right) y}. \end{aligned}$$

С учетом (П.1)

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n : \mu(y, \mathcal{Y}) \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R}^n : (\mu(y, \mathcal{Y}))^2 \leq 1\}.$$

Лемма 16 доказана.

Доказательство леммы 11. Представления (4.1) корректны в силу лемм 9 и 10. С учетом (2.1) справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_2(N+1) &= \left\{ \sum_{k=0}^N A^k b u_k : \sum_{k=0}^N u_k^2 \leq 1 \right\} = \left\{ u_0 b + A \sum_{k=0}^{N-1} A^k b u_{k+1} : u_0^2 + \sum_{k=1}^N u_k^2 \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ u_0 b + \alpha x : x \in A \mathcal{Y}_2(N), u_0^2 + \alpha^2 \leq 1 \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : (y, H_{y, N+1} y) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство обусловлено леммой 16 и равенством

$$A \mathcal{Y}_2(N) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y}_2, N} A^{-1} x) \leq 1\}.$$

В силу леммы 9 описание $\mathcal{X}_2(N+1)$ строится аналогично при замене A на A^{-1} и b на $A^{-1}b$.

Лемма 11 доказана.

Доказательство теоремы 4. Представление $\overline{\mathcal{Y}}_{2, \infty}$ и $\overline{\mathcal{X}}_{2, \infty}$ в форме эллипсоидальных множеств в случае их ограниченности следует из леммы 15 с учетом леммы 9 и предположения (1.2).

Согласно лемме 9, и представлению (2.4), верны равенства

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{Y}}_{2, \infty} &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} A^k b u_k : \sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 \leq 1 \right\} = \left\{ u_0 b + A \sum_{k=0}^{\infty} A^k b u_{k+1} : u_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ u_0 b + \alpha x : x \in A \overline{\mathcal{Y}}_{2, \infty}, u_0^2 + \alpha^2 \leq 1 \right\}, \\ \overline{\mathcal{X}}_{2, \infty} &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} b u_k : \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \leq 1 \right\} = \left\{ u_1 A^{-1} b + A^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} b u_{k+1} : u_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty} u_k^2 \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ u_1 A^{-1} b + \alpha x : x \in A^{-1} \overline{\mathcal{X}}_{2, \infty}, u_1^2 + \alpha^2 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Откуда в силу леммы 16 следуют представления для $H_{\mathcal{Y}, \infty}$ и $H_{\mathcal{X}, \infty}$ через соответствующие алгебраические дискретные уравнения Риккати.

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 256 с.
2. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // *АиТ.* 2015. № 9. С. 3–30.
3. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ.* 2017. № 10. С. 3–32.
4. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ.* 2019. № 3. С. 3–25.
5. *Сиротин А.Н., Формальский А.М.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // *АиТ.* 2003. № 12. С. 17–32.
6. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* Метод построения и оценивания асимптотических множеств управляемости двумерных линейных дискретных систем с ограниченным управлением // *Электрон. журн. Тр. МАИ.* 2022. № 126. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>.
7. *Костоусова Е.К.* О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в “расширенном” пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // *Вычислительные технологии.* 2004. Т. 9. № 4. С. 54–72.
8. *Gayek J.E., Fisher M.E.* Approximating Reachable Sets for n-Dimensional Linear Discrete Systems // *IMA J. Mathematical Control and Information.* 1987. V. 4. № 2. P. 149–160.
9. *Ибрагимов Д.Н., Осокин А.В., Сиротин А.Н., Сыпало К.И.* О свойствах предельных множеств управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и l_1 -ограничениями // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2022. № 4. С. 3–21.
10. *Tobler W.R.* Superquadrics and Angle-Preserving Transformations // *IEEE-CGA.* 1981. V. 1. № 1. P. 11–23.
11. *Tobler W.R.* The Hyperelliptical and Other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections // *J. Geophysical Research.* 1973. V. 78. № 11. P. 1753–1759.
12. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 471 с.
13. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 440 с.
14. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. Cambridge: Cambridge university press, 2004. 716 p.
15. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012. 570 с.
16. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966. 663 с.
17. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Вычислительный центр РАН, 2010. 119 с.
18. *Sonnevend G.* Asymptotically Optimal, Sequential Methods for the Approximation of Convex, Compact Sets in R^n in the Hausdorff Metrics // *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai.* 1980. V. 35. № 2. P. 1075–1089.
19. *Gainanov D.N., Chernavin P.F., Rasskazova V.A.* Convex Hulls in Solving Multiclass Pattern Recognition Problem // *Lecture Notes in Computer Science.* 2020. V. 12096. P. 390–401.
20. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 667 с.
21. *Lancaster P., Rodman L.* The Algebraic Riccati Equation. Oxford: Clarendon Press, 1995. 477 p.
22. *Мальшев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т.* Спутниковые системы мониторинга. Анализ, синтез и управление. М.: МАИ, 2000. 568 с.
23. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. I. М.: Наука, 1981. 544 с.
24. *Householder A.S.* The Theory of Matrices in Numerical Analysis. Waltham: Blaisdell, 1964. 257 p.