

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ТОРЦАХ СТЕНКИ НА ТЕМПЕРАТУРНЫЙ РЕЖИМ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ¹

© 2023 г. Е. П. Валуева*

*Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”,
Красноказарменная ул., д. 14, Москва, 111250 Россия*

**e-mail: ep.valueva@gmail.com*

Поступила в редакцию 30.01.2023 г.

После доработки 10.03.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

Изучено влияние переноса тепла в стенке по направлению движения теплоносителей на эффективность теплообменных аппаратов (ТА), когда торцы стенки не являются теплоизолированными от окружающей их среды. Проведено аналитическое решение задачи для прямого тока при равенстве отношений тепловых эквивалентов теплоносителей β и коэффициентов теплоотдачи α с обеих сторон стенки, разделяющей горячий и холодный теплоносители, и для противотока при условии $\beta = \alpha = 1$. Решение задачи зависит также от числа тепловых единиц переноса Ntu , параметра, характеризующего аксиальную теплопроводность стенки C_A , числа Био Bi , определяющего относительную теплоотдачу от торцов стенки в окружающую среду, температур контактирующей с торцами стенки среды. Влияние аксиальной теплопроводности стенки возрастает с уменьшением параметра C_A . Рассмотрены два случая, при которых температуры окружающей среды принимаются равными температурам на входе и выходе горячего теплоносителя (случай I) и эти же температуры равняются температурам на входе и выходе холодного теплоносителя (случай II). Получено, что при малых числах Био ($Bi < 10^{-3}$) эффективность теплообменного аппарата ε для любых значений C_A в прямоточном ТА практически не отличается от эффективности ТА в отсутствие влияния аксиальной теплопроводности стенки ε_0 , а для противотока при малых C_A эффективность ТА заметно меньше ε_0 и снижается в 2 раза при $Ntu \gg 1$. При больших числах Био ($Bi > 1$) из-за влияния аксиальной теплопроводности стенки можно повысить эффективность использования одного из теплоносителей, при этом температура другого теплоносителя при его движении в теплообменном аппарате изменится незначительно. Результаты расчетов свидетельствуют о том, что для повышения эффективности ТА наиболее оптимальным является использование одинаковых тепловых эквивалентов двух теплоносителей и коэффициентов теплоотдачи с обеих сторон стенки, разделяющей горячий и холодный потоки ($\beta = \alpha = 1$).

Ключевые слова: теплообменный аппарат, эффективность, аксиальная теплопроводность стенки, число тепловых единиц переноса, теплоотдача, число Био

DOI: 10.56304/S0040363623100107

В теплообменных аппаратах продольный перенос тепла в стенке, разделяющей теплоносители, может оказать существенное влияние на тепловые характеристики этих устройств. Интерес к исследованию влияния аксиальной теплопроводности стенки вызван, в частности, начавшимся в 60-х годах прошлого века широким использованием матричных ТА в криогенной и холодильной технике, химической промышленности. Эти ком-

пактные теплообменники обладают высокими коэффициентами теплопередачи, но из-за влияния аксиальной теплопроводности стенки при определенных условиях их эффективность заметно снижается [1]. В [2] проведен обзор выполненных ранее исследований по изучению влияния аксиальной теплопроводности стенки на эффективность теплообменных аппаратов. В дополнение к нему в статье указано еще несколько работ, в которых рассматриваются теплообменные аппараты, применяемые в криогенных технических устройствах.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-29-00188).

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕДЕННЫХ РАНЕЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

Известно, что эффективность теплообменного аппарата ϵ зависит от числа тепловых единиц переноса Ntu и отношения тепловых эквивалентов теплоносителей β . Автором [1] для так называемого сбалансированного течения ($\beta = 1$) в противоточном ТА предложено при расчете ϵ в стандартной зависимости $\epsilon(Ntu)$ использовать величину Ntu_{eff} , в которую вносятся поправки на аксиальную теплопроводность стенки, разделяющей теплоносители. Этот подход применен также в работах [3–5]. В [1, 3] предполагалось, что торцы стенки, разделяющей теплоносители, были теплоизолированными, а в [4] учитывался отвод тепла от холодного торца. Внешняя стенка, обтекаемая горячим теплоносителем, не всегда может быть полностью теплоизолированной, и при расчете эффективности теплообменного аппарата необходимо принимать во внимание возможный подвод тепла от внешней стенки, что сделано в [4]. В этой работе рассмотрена также аксиальная теплопроводность, но только внешней стенки.

Авторы [5] модифицировали соотношения для Ntu_{eff} из [1, 3], причем в них учтено возможное отличие значения параметра β от единицы, а также влияние аксиальной теплопроводности внешней и внутренней стенок. Торцы стенок полагались теплоизолированными. В уравнение теплопроводности для внешней стенки введено отношение теплового потока от внутренней поверхности этой стенки, обтекаемой горячим теплоносителем, к тепловому потоку внешней поверхности (от окружающей среды). Это отношение принято постоянным. Система уравнений, описывающая данную задачу, решалась и численным методом, сведения о котором авторы не привели. Вызывает вопрос тот факт, что зависимости $Ntu_{eff}(Ntu)$, предложенные в работе [5] на основе приближенного подхода к решению задачи, практически совпадают с зависимостями, полученными в результате численного решения.

В [6] рассмотрено плоскопараллельное противоточное движение потоков, разделенных стенкой, с учетом аксиальной теплопроводности этой стенки. К горячему и холодному теплоносителям из окружающей среды подводятся тепловые потоки с заданными постоянными плотностями. Решалась система трех дифференциальных уравнений, осредненных по сечению канала: уравнений энергии для двух теплоносителей и уравнения теплопроводности стенки. Аналитическое решение этой системы получено для трех условий на торцах стенки:

оба торца теплоизолированы;

теплоизолирован только горячий торец, а температура холодного торца равна температуре холодного теплоносителя;

температуры горячего и холодного торцов равны температурам горячего и холодного теплоносителя соответственно.

Задача решена также численно, методом конечных разностей. Результаты аналитического и численного решений практически совпадают. Изучено влияние режимных параметров (в частности, относительной аксиальной теплопроводности стенки, Ntu , β) на параметр, названный авторами относительными тепловыми потерями, обусловленными отличием значения эффективности от единицы и наличием теплового потока на холодном торце стенки. Значение этого параметра было минимальным в отсутствие влияния аксиальной теплопроводности стенки и при $\beta < 1$.

В перечисленных работах, как и во многих других, где рассчитывается эффективность теплообменных аппаратов, моделью течения является плоскопараллельное течение в теплообменнике “труба в трубе”. Такого типа ТА не только являются удобными для моделирования в приближении плоского течения, но и часто используются в химической промышленности, криогенной технике, охлаждающих микроканальных системах [7].

Авторы [8] рассмотрели влияние окружающей среды на выходные характеристики теплообменного аппарата. Использовалась так называемая модель “черного ящика”. Температуры на выходе из ТА рассчитывались по некоторым, полученным в результате экспериментов, зависимостям от температуры теплоносителей на входе в установку и тепловых эквивалентов. Следует заметить, что указанные зависимости, хотя и имеют некоторое теоретическое обоснование, являются чисто эмпирическими и пригодны лишь для условий, при которых проводились эксперименты.

В [2] исследовано влияние аксиальной теплопроводности стенки на распределение температур по длине теплообменного аппарата с параллельным движением теплоносителей и на эффективность ТА. Система одномерных (осредненных по сечению) уравнений энергии для двух теплоносителей и уравнения теплопроводности для стенки решалась методом конечных разностей. Торцы стенки полагались теплоизолированными. В некоторых случаях указанная система может быть решена аналитически. Найдены безразмерный параметр, определяющий влияние аксиальной теплопроводности стенки на эффективность теплообменника, и значение данного параметра, при котором влиянием аксиальной теплопроводности можно пренебречь. Этот параметр пропорционален коэффициенту теплопередачи, термическому сопротивлению стенки и квадрату отношения

длины теплообменного аппарата к толщине стенки трубы.

Помимо параметра, учитывающего влияние аксиальной теплопроводности, решение системы зависит от числа тепловых единиц переноса, отношений тепловых эквивалентов теплоносителей и коэффициентов теплоотдачи со стороны горячего и холодного теплоносителей. Наиболее оптимальным для прямого движения теплоносителей является значение указанных двух отношений, равное единице. При этом эффективность теплообменного аппарата не изменяется по сравнению со случаем отсутствия влияния аксиальной теплопроводности стенки. Для противоточного теплообменника наименьшее влияние аксиальной теплопроводности, уменьшающей его эффективность, достигается при равных значениях отношений тепловых эквивалентов теплоносителей и коэффициентов теплоотдачи со стороны каждого из теплоносителей. На основании проведенных расчетов сделаны оценки, которые показали, что для микроканального теплообменника влияние аксиальной теплопроводности стенки может привести к заметному снижению его эффективности.

Существует мнение, что перенос тепла в стенке в направлении движения теплоносителей оказывает негативное влияние на эффективность теплообменных аппаратов. Действительно, аксиальная теплопроводность стенки понижает эффективность ТА, когда число Био, характеризующее относительную теплоотдачу от торцов стенки в окружающую среду, достаточно мало, но при этом эффективности использования обоих теплоносителей одинаковы. Этот вывод подтверждают результаты расчетов, проведенных в [2].

В данной работе рассматривается случай, когда на торцах стенки выполняются граничные условия второго рода. Решение упомянутой ранее системы уравнений зависит еще от четырех режимных параметров: чисел Био на торцах стенки и безразмерных температур среды, окружающей торцы. Получено аналитическое решение задачи для прямого движения теплоносителей при условии равенства коэффициентов теплоотдачи со стороны горячего и холодного теплоносителей $\alpha = \alpha_1/\alpha_2$ и отношения их тепловых эквивалентов $\beta = W_1/W_2: \alpha = \beta$. Для противоточного движения решение проведено при условии $\beta = \alpha = 1$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решается система осредненных по сечению канала безразмерных уравнений энергии для двух теплоносителей и уравнения теплопроводности в стенке:

$$\frac{dT_1}{dX} - Ntu \frac{1+\alpha}{1+\beta} (T_c - T_1) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{dT_2}{dX} \mp Ntu \frac{\beta(1+\alpha)}{\alpha(1+\beta)} (T_c - T_2) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{d^2T_c}{dX^2} + C_A(1+\alpha) \left[(T_1 - T_c) + \frac{1}{\alpha}(T_2 - T_c) \right] = 0, \quad (3)$$

где $X = x/l$; x – направление движения горячего теплоносителя; l – длина канала; T_i – безразмерная температура горячего, холодного теплоносителя и разделяющей стенки соответственно; $T_i = (t_i - t_{20})/(t_{10} - t_{20})$; t_i – те же температуры в размерном виде; t_{10}, t_{20} – температуры теплоносителей на входе в теплообменный аппарат;

$Ntu = \frac{kS(W_1 + W_2)}{W_1 W_2}$ – число тепловых единиц переноса; $W = Gc_p$ – тепловой эквивалент; G – массовый расход теплоносителя; c_p – удельная изобарная теплоемкость теплоносителя; $S = l\Pi$ – площадь поверхности теплообмена; Π – периметр теплообмена; $k = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ – коэффициент тепло-

передачи (без учета термического сопротивления стенки); α_1, α_2 – коэффициент теплоотдачи на разделяющей стенке со стороны горячего и холодного теплоносителя соответственно;

$\beta = W_1/W_2$; $\alpha = \alpha_1/\alpha_2$; $C_A = kL^2 R_c$; $L = l/\delta$ – относительная длина трубы; δ – толщина стенки; $R_c = \delta/\lambda_c$ – термическое сопротивление плоской стенки; λ_c – теплопроводность стенки; индексы $i = 1, 2$ и “с” относятся к горячему, холодному теплоносителю и стенке соответственно.

В уравнении (2) верхний знак “–” соответствует прямооточному, а нижний знак “+” – противоточному движению теплоносителей.

Граничные условия для уравнений (1)–(3) следующие:

при $X = 0$: $T_1 = 1$, $T_2 = 0$ для прямотока,

$$T_c = T_{\infty 0} + \frac{1}{Bi_0} \frac{dT_c}{dX};$$

при $X = 1$: $T_2 = 0$ (T_1 – не задается)

$$\text{для противотока, } T_c = T_{\infty 1} - \frac{1}{Bi_1} \frac{dT_c}{dX},$$

где число Био $Bi = \alpha_c l/\lambda_c$; α_c – коэффициенты теплоотдачи на торцах стенки; $T_{\infty 0}, T_{\infty 1}$ – температуры среды, окружающей торцы стенки, для прямотока и противотока.

Решение задачи зависит от четырех безразмерных параметров: α, β, Ntu, C_A . Последний параметр учитывает влияние аксиальной теплопроводности стенки на распределение температур по

ходу движения теплоносителей и эффективность теплообменного аппарата:

$$\varepsilon_1 = \frac{Q_1}{\Delta t' W_{\min}}; \quad \varepsilon_2 = \frac{Q_2}{\Delta t' W_{\min}},$$

где $Q_1 = W_1 |t_{10} - t_1''|$, $Q_2 = W_2 |t_{20} - t_2''|$ – тепловая мощность, отдаваемая горячим теплоносителем и получаемая холодным теплоносителем соответственно; $\Delta t' = |t_{10} - t_{20}|$ – разность температур теплоносителей на входе в теплообменный аппарат; t_1'' и t_2'' – температуры теплоносителей на выходе из аппарата.

Условие равенства тепловых мощностей $Q_1 = Q_2$ ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) выполняется, только если торцы стенок теплообменника теплоизолированы. В противном случае решение будет зависеть еще от четырех параметров: чисел Био и температур среды, окружающей торцы стенки.

При решении системы уравнений (1)–(3) получены выражения для эффективности теплообменного аппарата

$$\text{при } X = 1, T_1 = 1: \varepsilon_1 = [1 - T_1(1)] \max\{1, \beta\};$$

при $X_l = 1$ для прямотока и $X_l = 0$ для противотока: $\varepsilon_2 = T_2(X_l) \max\{1, 1/\beta\}$.

При $C_A \rightarrow \infty$ влиянием теплопроводности стенки можно пренебречь. Тогда уравнения (1) и (2) имеют известное решение, приведенное в [2], которое зависит только от параметров β и Ntu .

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В данном разделе рассматриваются аналитические решения для прямоточного и противоточного теплообменного аппарата.

Решение для прямотока

Система уравнений (1)–(3) допускает аналитическое решение только в определенном случае – для прямотока при $\alpha = \beta$ и принимает следующий вид:

$$\frac{dT_1}{dX} - Ntu(T_c - T_1) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{dT_2}{dX} - Ntu(T_c - T_2) = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d^2 T_c}{dX^2} + C_A(1 + \alpha) \left[(T_1 - T_c) + \frac{1}{\alpha}(T_2 - T_c) \right] = 0. \quad (6)$$

Если ввести функции $\theta_1 = T_1 - T_c + (T_2 - T_c)/\alpha$ и $\theta_2 = T_1 - T_2$, то можно записать уравнение (6)

для θ_1 с учетом продифференцированных по X уравнений (4) и (5):

$$\frac{d^2 \theta_1}{dX^2} + Ntu \frac{d\theta_1}{dX} - \frac{C_A(1 + \alpha)^2}{\alpha} \theta_1 = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет следующим:

$$\theta_1 = c_1 \exp(\lambda_1 X) + c_2 \exp(\lambda_2 X),$$

где $\lambda_{1,2} = \frac{-Ntu \pm \sqrt{Ntu^2 + \frac{C_A(1 + \alpha)^2}{\alpha}}}{2}$; c_1 и c_2 – некоторые константы, определяемые из граничных условий на торцах ТА.

Уравнение для θ_2 можно получить как разность (4) и (5):

$$\frac{d\theta_2}{dX} = -Ntu \theta_2.$$

Решение этого уравнения с учетом граничного условия при $X = 1$ и $\theta_2 = 1$ имеет вид

$$\theta_2 = \exp(-Ntu X).$$

Если ввести функции $f_1 = T_1 - T_c$, $f_2 = T_2 - T_c$, $f_1 = (\alpha\theta_1 + \theta_2)/(1 + \alpha)$, $f_2 = \alpha(\theta_1 - \theta_2)/(1 + \alpha)$, то уравнения (4), (5) примут следующий вид:

$$\frac{dT_1}{dX} = -Ntu f_1, \quad \frac{dT_2}{dX} = -Ntu f_2.$$

Решая эти уравнения с граничными условиями при $X = 0$, получаем для T_1, T_2 выражения

$$T_1 = A_1 \exp(\lambda_1 X) + B_1 \exp(\lambda_2 X) + C_1 X + D_1;$$

$$T_2 = A_2 \exp(\lambda_1 X) + B_2 \exp(\lambda_2 X) + C_2 X + D_2,$$

где коэффициенты $A_1 = -c_1 d_1/2$; $A_2 = \alpha A_1$; $B_1 = -c_2 d_2/2$; $B_2 = \alpha B_1$; $C_1 = C_0/\alpha$; $C_2 = -C_0$; $D_1 = C_0 + (c_1 d_1 + c_2 d_2)/2$; $D_2 = C_0 + \alpha(c_1 d_1 + c_2 d_2)/2$; $C_0 = \alpha/(1 + \alpha)$; $d_1 = d/\lambda_1$; $d_2 = d/\lambda_2$; $d = 2C_0 Ntu$.

Используя одно из равенств $T_c = T_1 - f_1 = T_2 - f_2$, можно найти температуру стенки

$$T_c = A_c \exp(\lambda_1 X) + B_c \exp(\lambda_2 X) + D_c,$$

где коэффициенты $A_c = -c_1 C_0(1 + d_1)$; $B_c = -c_2 C_0(1 + d_2)$; $D_c = C_0(1 + c_1 d_1 + c_2 d_2)$.

Константы c_1, c_2 можно определить, решив систему двух алгебраических уравнений, полученных из граничных условий на торцах ТА:

$$c_1 = (b_{11} b_{20} - b_{10} b_2)/b; \quad c_2 = (-b_{11} b_{10} + b_{10} b_1)/b,$$

где коэффициенты $b_{10} = \frac{T_{\infty 0} - 1}{C_0}$; $b_{11} = 1 - \frac{T_{\infty 1}}{C_0}$; $b_{10} = 1 -$

$$-(d + \lambda_1)/Bi_0; \quad b_{20} = 1 - (d + \lambda_2)/Bi_0; \quad b_1 =$$

$$= \left[\frac{d + \lambda_1}{Bi_1 + d_2 + 1} \right] \exp \lambda_2; \quad b_2 = \left[\frac{d + \lambda_2}{Bi_1 + d_2 + 1} \right] \exp \lambda_2;$$

$$b = b_{20} b_1 - b_{21} b_2.$$

В предельном случае при $Bi_0 = Bi_1 \rightarrow 0$ (теплоизолированные торцы стенки), когда $c_1 = c_2 = 0$, что соответствует отсутствию влияния аксиальной теплопроводности стенки, распределение температур по длине и зависимость $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon(Ntu, \beta)$ описываются известными формулами (см. [2]).

Из приведенных выражений следует, что равенство $c_1 = c_2 = 0$ также выполняется при $C_A \gg 1$, т.е. влияние аксиальной теплопроводности становится пренебрежимо малым. Ее максимальное влияние наблюдается при $C_A \ll 1$, если числа Био конечны. При $\alpha = \beta$ для $C_A \ll \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2} \left(\frac{Ntu}{2}\right)^2 \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -Ntu$. Однако, как показали результаты численного решения [2], когда $\alpha \neq \beta$, при $Bi_0 = Bi_1 \rightarrow 0$ эффективность теплообменного аппарата $\varepsilon \rightarrow 0.5$, если $Ntu \rightarrow \infty$ независимо от значений β .

Решение для противотока

Для противотока решение системы уравнений (1)–(3) можно провести при условии $\alpha = \beta = 1$:

$$\frac{dT_1}{dX} - Ntu(T_c - T_1) = 0; \tag{7}$$

$$\frac{dT_2}{dX} + Ntu(T_c - T_2) = 0; \tag{8}$$

$$\frac{d^2T_c}{dX^2} + 2C_A[(T_1 - T_c) + (T_2 - T_c)] = 0. \tag{9}$$

Если ввести функции $\theta_1 = T_1 + T_2 - 2T_c$, $\theta_2 = T_1 - T_2$, то из (7)–(9) можно получить следующие уравнения:

$$\frac{d^2\theta_1}{dX^2} - (4C_A + Ntu^2)\theta_1 = 0; \quad \frac{d\theta_2}{dX} = -Ntu\theta_2.$$

Решением этих уравнений являются функции

$$\theta_1 = c_1 \exp(\lambda X) + c_2 \exp(-\lambda X);$$

$$\theta_2 = \frac{Ntu}{\lambda} [-c_1 \exp(\lambda X) + c_2 \exp(-\lambda X)] + c_3,$$

$$\lambda = \sqrt{Ntu^2 + 4C_A}.$$

При введении функций $f_1 = T_1 - T_c$, $f_2 = T_2 - T_c$; $f_1 = (\theta_1 + \theta_2)/2$, $f_2 = (\theta_1 - \theta_2)/2$ уравнения (7) и (8) принимают следующий вид:

$$\frac{dT_1}{dX} = -Ntuf_1, \quad \frac{dT_2}{dX} = Ntuf_2.$$

После интегрирования этих уравнений с учетом граничных условий (при $X = 0$ температура $T_1 = 1$, при $X = 1$ температура $T_2 = 0$) можно получить:

$$T_1 = A_1 \exp(\lambda X) + B_1 \exp(-\lambda X) + C_1 X + D_1;$$

$$T_2 = A_2 \exp(\lambda X) + B_2 \exp(-\lambda X) + C_2 X + D_2,$$

где коэффициенты $A_1 = c_1 d_1$; $A_2 = c_2 d_2$; $B_1 = c_2 d_2$; $B_2 = c_2 d_1$; $C_1 = C_2 = -c_3 Ntu/2 = C$; $D_1 = 1 - A_1 - B_1$; $D_2 = -[C + A_2 \exp(\lambda) + B_2 \exp(-\lambda)]$; $d_1 = \frac{Ntu}{2\lambda} \times \left(\frac{Ntu}{\lambda} - 1\right)$, $d_2 = \frac{Ntu}{2\lambda} \left(\frac{Ntu}{\lambda} + 1\right)$.

Связь константы c_3 с константами c_1, c_2 можно найти, используя равенство $T_1 - T_2 = \theta_2$:

$$c_3 = 2\{1 + c_1 [d_2 \exp(\lambda) - d_1] + c_2 [d_1 \exp(-\lambda) - d_2]\}/(2 + Ntu).$$

Соотношение для температуры стенки находится при использовании равенства $T_c = (T_1 + T_2 - \theta_1)/2$:

$$T_c = A_c \exp(\lambda X) + B_c \exp(-\lambda X) + C_c X + D_c,$$

где коэффициенты $A_c = (A_1 + A_2 - c_1)/2$; $B_c = (B_1 + B_2 - c_2)/2$; $C_c = C_1 = C_2 = C$; $D_c = (D_1 + D_2)/2$.

Константы c_1, c_2 можно определить, решив систему двух алгебраических уравнений, полученных из граничных условий на торцах стенки:

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = b_1;$$

$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = b_2.$$

Коэффициенты этой системы рассчитываются по следующим выражениям:

$$a_{11} = -1 + g_1 d_1 + d_2 [1 - g_2 \exp(\lambda)] - \{\lambda g_0 + 2g_1 [d_2 \exp(\lambda) - d_1]\}/Bi_0;$$

$$a_{12} = -1 + g_1 d_2 + d_1 [1 - g_2 \exp(-\lambda)] + \{\lambda g_0 - 2g_1 [d_1 \exp(-\lambda) - d_2]\}/Bi_0;$$

$$a_{21} = \exp(\lambda)(-1 + d_1 - g_1 d_2) - 2d_1 g_3 + \{\lambda \exp(\lambda) g_0 + 2g_1 [d_2 \exp(\lambda) - d_1]\}/Bi_1;$$

$$a_{22} = \exp(-\lambda)(-1 + d_2 - g_1 d_1) - 2d_2 g_3 - \{\lambda \exp(-\lambda) g_0 - 2g_1 [d_1 \exp(-\lambda) - d_2]\}/Bi_1;$$

$$b_1 = 2(T_{\infty 0} - g_3) + 2g_1/Bi_0;$$

$$b_2 = 2T_{\infty 1} - g_2 - 2g_1/Bi_1,$$

где $g_0 = (Ntu/\lambda)^2 - 1$; $g_1 = -Ntu/(2 + Ntu)$; $g_2 = 2/(2 + Ntu)$; $g_3 = (1 + Ntu)/(2 + Ntu)$.

Из приведенных выражений следует, что $\lambda \rightarrow \infty$ при $C_A \gg 1$ и для любых чисел Био: $A_1 = A_2 = A_c = B_1 = B_2 = B_c = 0$, $C = -Ntu/(2 + Ntu)$, $D_1 = 1$, $D_2 = -C$, $D_c = (1 + Ntu)/(2 + Ntu)$. Влияние аксиальной теплопроводности стенки в этом случае пренебрежимо мало. В соответствии с имеющимися зависимостями, температуры линейно уменьшаются вдоль канала. Эффективность теплообменного аппарата $\varepsilon \rightarrow 1$ при $Ntu \rightarrow \infty$.

Максимальное влияние аксиальной теплопроводности наблюдается при $C_A \ll 1$. В этом случае выполняются следующие соотношения:

$\lambda = Ntu$, $A_1 = A_c = B_2 = B_c = 0$, $A_2 = c_1$, $B_1 = c_2$, $C = -Ntu[1 + c_1 \exp(\lambda) - c_2]/(2 + Ntu)$, $D_1 = 1 - c_2$, $D_2 = -[C + c_1 \exp(\lambda)]$. Если при этом принять $Bi_0 = Bi_1 \rightarrow 0$, то значения констант будут равны $c_1 = -\exp(-\lambda)/2$, $c_2 = 0.5$. Тогда $C = 0$, $D_c = 0.5$, т.е. температура стенки не меняется вдоль канала $T_c = 0.5$. При больших Ntu температура $T_1(X = 1) \rightarrow 0.5$, $T_2(X = 0) \rightarrow 0.5$. Эффективность теплообменного аппарата $\varepsilon \rightarrow 0.5$ при $Ntu \rightarrow \infty$, что соответствует результатам, полученным в [2].

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты проведены для условий, когда числа Био на обоих торцах стенки равны: $Bi_0 = Bi_1 = Bi$. В теплообменных аппаратах можно организовать движение теплоносителей таким образом, что с торцами стенки будет контактировать только один теплоноситель, который, например, поступает в канал из входной камеры, а выходит из выходной. В этих камерах теплоноситель контактирует с торцами стенки. Таким образом, температуры среды, окружающей торцы, можно принять равными температурам горячего теплоносителя на входе в ТА и на выходе из него. Холодный теплоноситель такого контакта не имеет.

Рассмотрены два случая:

I: $T_{\infty 0} = T_1(X = 0) = 1$, $T_{\infty 1} = T_1(X = 1)$;

II: для прямого тока при $T_{\infty 0} = T_2(X = 0) = 0$, $T_{\infty 1} = T_2(X = 1)$ и для противотока при $T_{\infty 0} = T_2(X = 0)$, $T_{\infty 1} = T_2(X = 1) = 0$.

В случае I температуры окружающей среды принимаются равными температурам горячего теплоносителя на входе в ТА и выходе из него, в случае II аналогичные условия соответствуют холодному теплоносителю. Температуры окружающей среды уже не являются задаваемыми режимными параметрами. Для прямого тока заранее неизвестную температуру $T_{\infty 1}$ в случае I можно найти по равенству $T_{\infty 1} = T_1(X = 1) = f(T_{\infty 1})$, в случае II — по равенству $T_{\infty 1} = T_2(X = 1) = f(T_{\infty 1})$. Аналогичным образом можно определить заранее неизвестные значения температуры окружающей среды для противотока.

Из системы уравнений (1)–(3) следует, что разность между эффективностями теплообменника пропорциональна разности тепловых потоков на торцах стенки

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sim q_1 - q_0,$$

где $q_0 = -\frac{dT_c}{dX}(X = 0)$, $q_1 = -\frac{dT_c}{dX}(X = 1)$.

Результаты расчетов, приведенные далее, показали, что в случае I $q_0 > 0$, $q_1 < 0$, поэтому $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Из окружающей среды происходит подвод тепла,

которое через стенку дополнительно нагревает холодный теплоноситель. В случае II $q_0 < 0$, $q_1 > 0$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Отвод тепла в окружающую среду приводит к более интенсивному охлаждению горячего теплоносителя. При $Bi \rightarrow 0$ (теплоизолированные торцы стенки) $q_1 = q_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, причем эти эффективности могут отличаться от эффективности в отсутствие влияния аксиальной теплопроводности стенки ε_0 .

Для противоточного теплообменника представляет интерес третий случай, в котором температура окружающей среды на входе в теплообменный аппарат (при $X = 0$) равна температуре горячего теплоносителя $T_{\infty 0} = 1$, а при $X = 1$ температура окружающей среды $T_{\infty 1} = 0$. Предварительный анализ показал, что при $Bi \rightarrow 0$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 > \varepsilon_0$. В данной работе этот случай не рассматривается, расчеты для него будут проведены в последующих работах.

Расчеты для прямого тока

Из системы уравнений (1)–(3) следует, что независимо от значений режимных параметров и условий на торцах стенки выполняется следующее равенство:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon_0. \quad (10)$$

Из формулы (10) можно сделать вывод, что если значение одной из эффективностей оказывается ниже ε_0 на $\Delta\varepsilon$, то значение другой эффективности всегда будет выше ε_0 на это значение $\Delta\varepsilon$.

Расчеты показали, что наибольшее влияние аксиальной теплопроводности стенки на температурный режим и эффективность теплообменного аппарата наблюдается при больших числах Био. На рис. 1 приведена зависимость эффективности теплообменного аппарата от параметра, характеризующего относительную аксиальную теплопроводность стенки.

В случае I эффективность использования горячего теплоносителя ε_1 ниже ε_0 — эффективности теплообменника в отсутствие влияния аксиальной теплопроводности стенки, а эффективность использования холодного теплоносителя ε_2 превышает ε_0 .

В случае II наблюдается обратный эффект. Примечательно, что при $\beta = \alpha = 1$ имеется равенство ε_1 в случае I и ε_2 в случае II. При этом ε_1 в случае II равна ε_2 в случае I.

Различия между ε_1 , ε_2 и ε_0 отмечаются даже при очень малых числах Био $Bi = 10^{-3}$, однако для весьма небольших значений параметра $C_A < C_{A0} \approx 0.05$. Значения C_{A0} и $\Delta\varepsilon$ возрастают с увеличением числа Био: так, если $Bi > 1$, то $\Delta\varepsilon$ может достигать значений ε_0 .

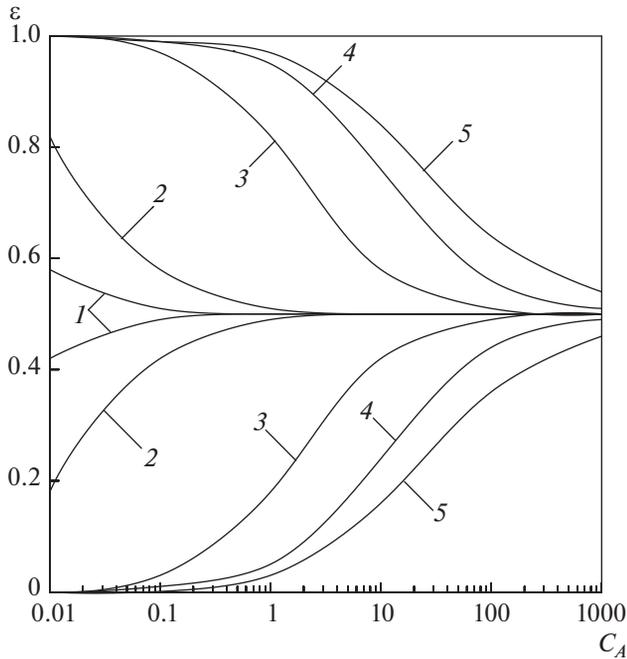


Рис. 1. Влияние аксиальной теплопроводности стенки на эффективность прямоточного теплообменника при $\beta = \alpha = 1$, $Ntu = 8$. Число Био Bi : 1 – 0.001; 2 – 0.01; 3 – 1; 4 – 10; 5 – 100. Верхние кривые: ϵ_1 для случая II, ϵ_2 для случая I; нижние кривые: ϵ_1 для случая I, ϵ_2 для случая II

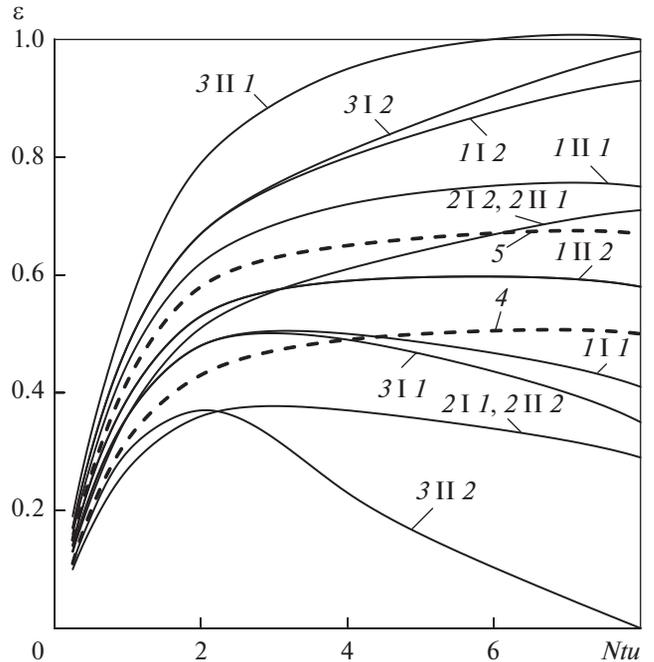


Рис. 3. Зависимость эффективности прямоточного теплообменника от числа тепловых единиц переноса при $C_A = 10$, $Bi = 5$. Первая цифра в обозначениях: 1 – $\beta = \alpha = 0.5$; 2 – $\beta = \alpha = 1$; 3 – $\beta = \alpha = 2$. Последняя цифра в обозначениях: 1 – ϵ_1 ; 2 – ϵ_2 . Римские цифры соответствуют случаям I и II. Штриховые линии: 4 – ϵ_0 для $\beta = 1$; 5 – ϵ_0 для $\beta = 0.5$, 2

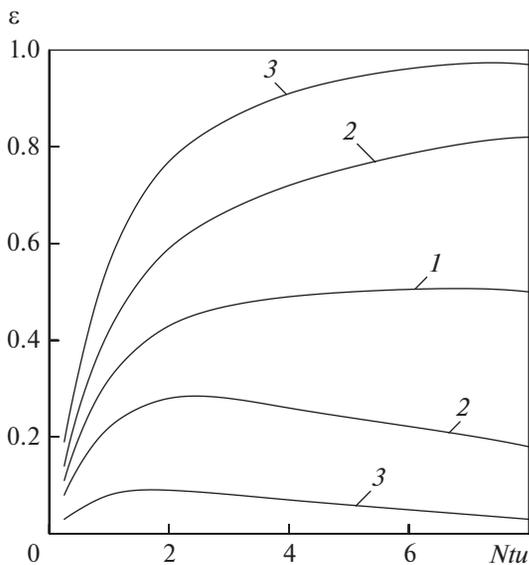


Рис. 2. Зависимость эффективности прямоточного теплообменника от числа тепловых единиц переноса при $\beta = \alpha = 1$, $C_A = 1$. Число Био Bi : 1 – 0.01; 2 – 1; 3 – 100. Верхние кривые: ϵ_1 для случая II, ϵ_2 для случая I; нижние кривые: ϵ_1 для случая I, ϵ_2 для случая II

На рис. 2 представлена зависимость эффективностей использования теплоносителей от числа тепловых единиц переноса для $\alpha = 1$. Известно, что при равенстве коэффициентов теплоотдачи со стороны каждого из теплоносителей обеспечивается максимальный коэффициент теплопередачи, поскольку значение последнего ограничено минимальным значением одного из двух коэффициентов теплоотдачи. Расчеты, результаты которых показаны на рис. 2, проведены для $C_A = 1$. Это значение характерно для микроканальных теплообменных аппаратов [2]. При $Bi \ll 1$ соблюдается равенство эффективностей $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ (кривая 1). При больших числах Био ϵ_1 в случае II и ϵ_2 в случае I почти в 2 раза превышают ϵ_0 (кривая 3), причем это превышение наблюдается уже начиная со сравнительно небольших значений Ntu , свойственных миниатюрным теплообменникам.

Зависимость эффективности прямоточного теплообменника от числа тепловых единиц переноса при значениях коэффициентов $\beta = \alpha$ отличных от единицы показана на рис. 3. Отсутствуют равенства ϵ_1 (в случае I) и ϵ_2 (в случае II), а также ϵ_1 (в случае II) и ϵ_2 (в случае I). При $\alpha < 1$ ϵ_1 в случае I

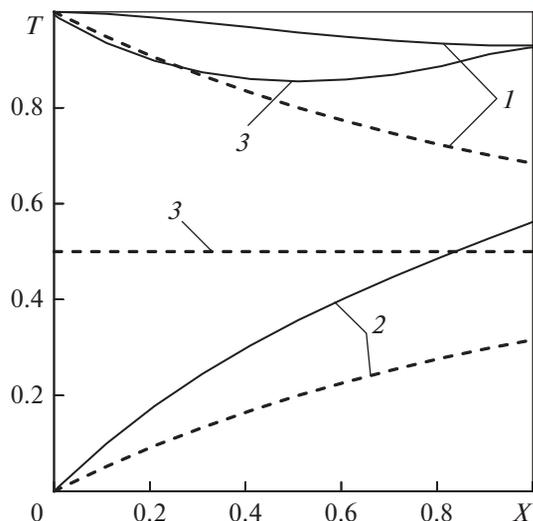


Рис. 4. Изменение температур вдоль канала прямо- точного теплообменника для случая I; $\beta = \alpha = 1$, $C_A = 1$, $Bi = 100$, $Ntu = 1$. Температуры: 1 – T_1 ; 2 – T_2 ; 3 – T_c . Штриховые линии – без влияния аксиальной тепло- проводности стенки

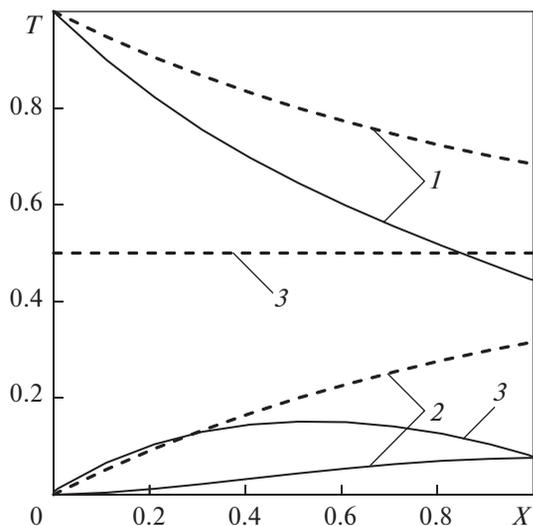


Рис. 5. Изменение температур вдоль канала прямо- точного теплообменника для случая II. Обозначения см. рис. 4

выше ε_2 в случае II, а ε_1 в случае II ниже ε_2 в слу- чае I. При $\alpha > 1$ наблюдается обратный эффект.

В данной работе не предусмотрено подробное исследование влияния отношения тепловых эк- вивалентов на эффективности теплообменников в условиях высокой теплопроводности стенки. Необходимо отметить, что можно наблюдать па- радоксальное, на первый взгляд, явление: значе-

ние одной из эффективностей может превысить единицу, а значение другой эффективности стать отрицательным. Это означает, что горячий тепло- носитель способен дополнительно нагреваться, а холодный еще более охлаждаться, т.е. теплооб- менный аппарат не выполняет своих функций. Таким образом, подтверждается тот факт, что теплообменник работает наиболее эффективно, когда тепловые эквиваленты обоих теплоносителей и коэффициенты теплоотдачи с обеих сторон разделяющей стенки одинаковы.

Распределение температур по длине канала для большого числа Био показано на рис. 4, 5. Температуры на торцах стенки при $X = 0$, $X = 1$ практически равны температурам горячего тепло- носителя в случае I и температурам холодного тепло- носителя в случае II. Как отмечалось ранее, в слу- чае I $-\frac{dT_c}{dX}(X = 0) > 0$, $-\frac{dT_c}{dX}(X = 1) < 0$ (см. рис. 4);

в случае II $-\frac{dT_c}{dX}(X = 0) < 0$, $-\frac{dT_c}{dX}(X = 1) > 0$ (см. рис. 5). В случае I температура горячего тепло- носителя почти не меняется по длине канала, эф- фективность его использования ε_1 стремится к ну- лю, а эффективность использования холодного теплоносителя ε_2 оказывается выше ε_0 . В случае II температура холодного теплоносителя слабо ме- няется по длине и $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_0$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$.

Расчеты для противотока

Как уже отмечалось, для прямотока при усло- вии $\alpha = 1$ выполняется равенство эффективно- стей ε_1 (в случае I) и ε_2 (в случае II), а также ε_1 (в случае II) и ε_2 (в случае I). Это равенство справед- ливо и для противотока. Однако соотношение (10) уже не выполняется, сумма эффективностей ис- пользования теплоносителей зависит от парамет- ров C_A , Bi , Ntu .

На рис. 6 представлена зависимость эффе- ктивности противоточного теплообменника от ак- сиальной теплопроводности стенки при различ- ных числах Био. В отличие от прямотока, при ма- лых числах Био эффективности ε_1 и ε_2 ниже, чем ε_0 . Как показали расчеты, равенство $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, которое должно выполняться при $Bi \rightarrow 0$, достигается лишь при $Bi < 10^{-4}$. На рис. 6 для $Bi = 10^{-3}$ заметно различие ε_1 и ε_2 . При больших числах Био влия- ние аксиальной теплопроводности стенки анало- гично этому влиянию для прямотока (см. рис. 1). Эффективности ε_1 в случае II и ε_2 в случае I суще- ственно превышают ε_0 , а эффективности ε_2 в слу- чае II и ε_1 в случае I снижаются по сравнению с ε_0 . При больших значениях параметра $C_A > C_{A\infty}$ эф- фективности $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_0$, причем, как и для прямо- тока, значение $C_{A\infty}$ возрастает с увеличением Ntu .

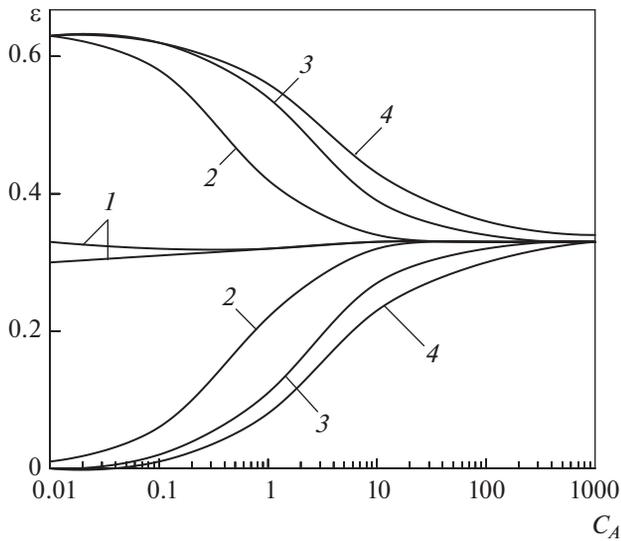


Рис. 6. Влияние аксиальной теплопроводности стенки на эффективность противоточного теплообменника при $\beta = \alpha = 1$, $Ntu = 1$ ($\epsilon_0 = 0.33$). Число Био Bi : 1 – 0.001; 2 – 1; 3 – 10; 4 – 100. Верхние кривые: ϵ_1 для случая II, ϵ_2 для случая I; нижние кривые: ϵ_1 для случая I, ϵ_2 для случая II

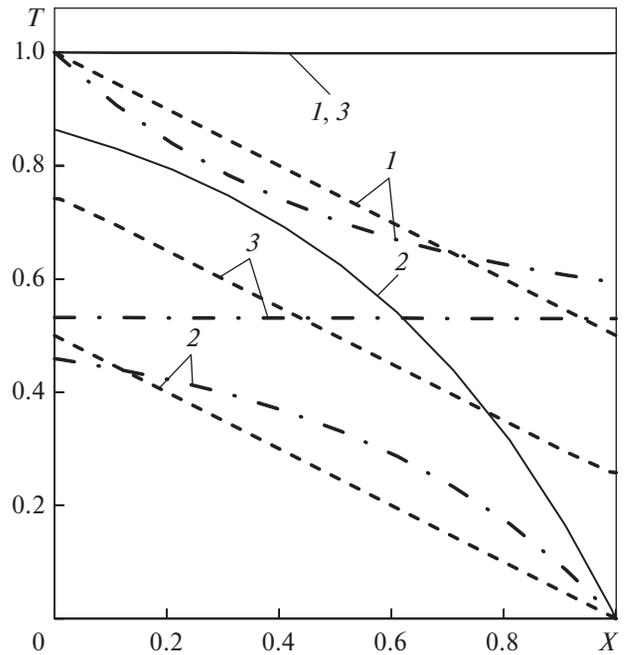


Рис. 8. Изменение температур вдоль канала противоточного теплообменника для случая I; $\beta = \alpha = 1$, $C_A = 1$, $Ntu = 2$. Температуры: 1 – T_1 ; 2 – T_2 ; 3 – T_c . Сплошные линии – $Bi = 100$, штрихпунктирные линии – $Bi = 0.001$, штриховые линии – без влияния аксиальной теплопроводности стенки

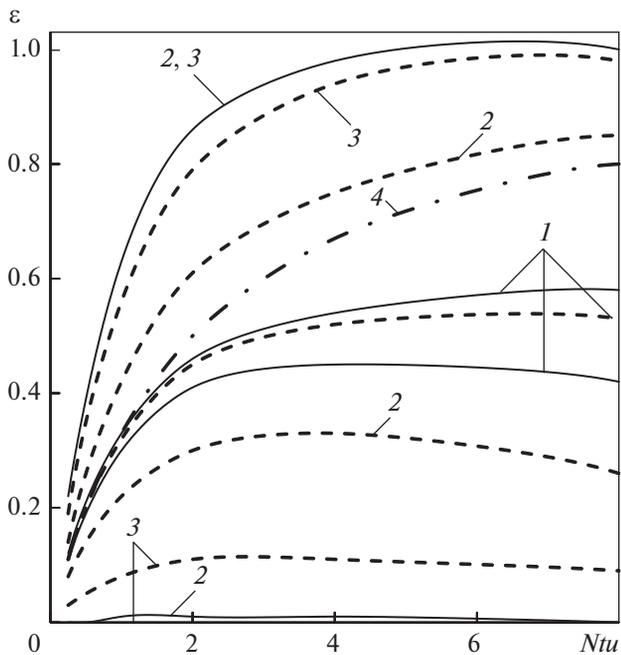


Рис. 7. Зависимость эффективности прямоточного теплообменника от числа тепловых единиц переноса при $\beta = \alpha = 1$, $C_A = 1$. Число Био Bi : 1 – 0.001; 2 – 1; 3 – 100; 4 – ϵ_0 . Верхние кривые: ϵ_1 для случая II, ϵ_2 для случая I; нижние кривые: ϵ_1 для случая I, ϵ_2 для случая II. Сплошные линии – при $C_A = 0.01$, штриховые линии – при $C_A = 1$

Зависимости эффективностей от числа тепловых единиц переноса, представленные на рис. 7, подобны аналогичным зависимостям для прямого течения (см. рис. 2). Как видно на рис. 7, при очень малых значениях параметра C_A ($C_A = 0.01$) число Био начиная со значения $Bi = 1$ слабо влияет на эффективность. При больших значениях числа Био ($Bi = 100$) изменение C_A в диапазоне $C_A = 0.01 - 1.00$ также несущественно влияет на ϵ_1 и ϵ_2 . Следует отметить, что кривые 1 на рис. 7, построенные для $C_A = 0.01$, $Bi = 10^{-3}$, заметно расходятся. Совпадение этих кривых, соответствующих ϵ_1 и ϵ_2 , следует из проведенного ранее теоретического анализа и наблюдается при существенно меньших числах Био, а именно при $Bi = 10^{-5}$.

На рис. 8 показаны зависимости распределения температур по длине канала для случая I. В отсутствие влияния аксиальной теплопроводности стенки все температуры меняются линейно. Примечательно, что даже для небольших чисел Био ($Bi = 10^{-3}$) наблюдаются отклонения температур теплоносителей от линейных зависимостей, а температура стенки устанавливается постоянной по всей длине канала ($T_c = 0.5$), за исключением малых областей вблизи торцов (эти области на рисунке не показаны). При больших

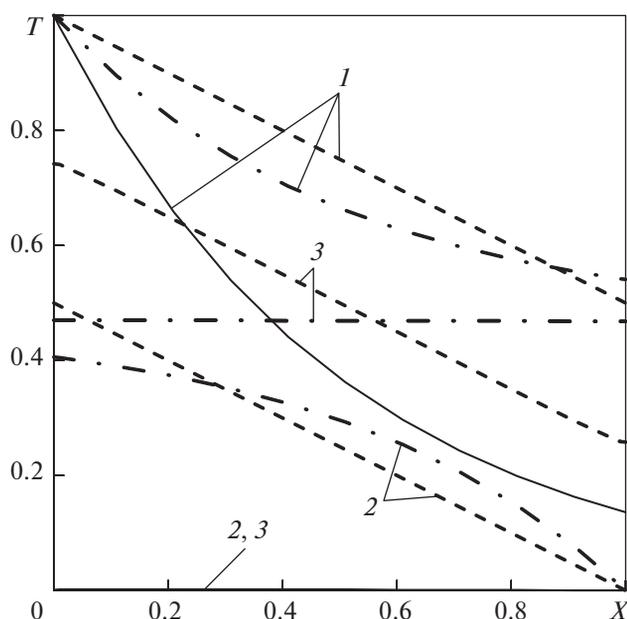


Рис. 9. Изменение температур вдоль канала противоточного теплообменника для случая II. Обозначения см. рис. 8

числах Био температура горячего теплоносителя не меняется по длине канала, эффективность его использования ε_1 стремится к нулю. Температура стенки устанавливается равной температуре горячего теплоносителя. Эффективность использования холодного теплоносителя ε_2 оказывается выше ε_0 .

Изменения температур по длине канала для случая II показаны на рис. 9. Под влиянием аксиальной теплопроводности стенки возникают эффекты, противоположные описанным выше для случая I.

ВЫВОДЫ

1. Путем организации движения теплоносителей на входе в теплообменный аппарат и на выходе из него можно значительно повысить эффективность использования горячего или холодного теплоносителя. Для этого требуется выполнение следующих условий. Во-первых, влияние аксиальной теплопроводности стенки должно быть значительным. Это вполне осуществимо для микроканальных теплообменников, как показали оценки, проведенные в [2]. Кроме того, для снижения значений параметра C_A , характеризующего влияние аксиальной теплопроводности, можно увеличить толщину стенки. Во-вторых, необходимо, чтобы число Био, определяющее относительную теплоотдачу от торцов стенки в окружающую среду, было достаточно велико ($Bi > 1$). Такие значения числа Био вполне достижимы. Например, для микрока-

нального теплообменника с параметрами $l = 0.4$ м, $\lambda_c = 20$ Вт/(м·К), $\alpha = 5 \times 10^3$ Вт/(м²·К), $Bi = 100$.

2. При малых числах Био ($Bi < 10^{-3}$) для прямого тока эффективность теплообменного аппарата при любых C_A не отличается от эффективности в отсутствие влияния аксиальной теплопроводности стенки ε_0 . Для противотока при малых C_A эффективности заметно меньше ε_0 .

3. Если целью использования теплообменного аппарата является охлаждение горячего теплоносителя, то во входную и выходную камеры должен поступать холодный теплоноситель. Горячий теплоноситель будет дополнительно охлаждаться путем отвода тепла в окружающую среду от торцов стенки благодаря ее аксиальной теплопроводности. При этом температура холодного теплоносителя практически не изменится, и его можно будет использовать в дальнейших процессах охлаждения.

4. Если целью является нагрев холодного теплоносителя, то во входную и выходную камеры должен поступать горячий теплоноситель; температура холодного теплоносителя практически не изменится. Тепловая энергия, необходимая для нагрева холодного теплоносителя, благодаря теплопроводности стенки поступает из окружающей торцы стенки среды.

5. Наиболее оптимальным является использование одинаковых тепловых эквивалентов двух теплоносителей и коэффициентов теплоотдачи с обеих сторон разделяющей стенки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kroeger P.G.** Performance deterioration in high effectiveness heat exchangers due to axial heat conduction effects // *Adv. Cryog. Eng.* 1967. V. 12. P. 363–372.
2. **Валуева Е.П., Зюкин В.С.** Влияние теплопроводности вдоль оси канала на температурный режим и эффективность теплообменных аппаратов с параллельным движением теплоносителей // *Теплоэнергетика.* 2019. № 9. С. 60–70. <https://doi.org/10.1134/S0040363619090078>
3. **Venkatathnam G., Pradeep Narayanan S.** Performance of a counter flow heat exchanger with longitudinal heat conduction through the wall separating the fluid streams from the environment // *Cryogenics.* 1999. V. 39. P. 43–52.
4. **Pradeep Narayanan S., Venkatathnam G.** Performance of a counterflow heat exchanger with heat loss through the wall at the cold end // *Cryogenics.* 1999. V. 39. No. 1. P. 43–52. [https://doi.org/10.1016/S0011-2275\(98\)00123-4](https://doi.org/10.1016/S0011-2275(98)00123-4)
5. **Raju L.R., Nandi T.K.** Effective NTU of a counterflow heat exchanger with unbalanced flow and longitudinal heat conduction through fluid separating and outer walls // *Appl. Therm. Eng.* 2017. V. 112. P. 1172–1177. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2016.10.200>

6. **Aminuddin M., Zubair S.M.** Analytical solutions to counter-flow heat exchanger subjected to external heat flux and axial conduction // *Int. J. Refrig.* 2017. V. 74. P. 22–37.
<https://doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2016.10.011>
7. **Mathew B., Hegab H.** Application of effectiveness-NTU relationship to parallel flow microchannel heat exchangers subjected to external heat transfer // *Int. J. Therm. Sci.* 2010. V. 49. No. 1. P. 76–85.
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2009.06.014>
8. **Geczi G., Kicsiny R., Korzenszky P.** Modified effectiveness and linear regression based models for heat exchangers under heat gain/loss to the environment // *Heat Mass Transfer.* 2019. V. 55. P. 1167–1179.
<https://doi.org/10.1007/s00231-018-2495-z>

The Effect of Boundary Conditions on the Wall Ends on Temperature Conditions and Effectiveness of Heat Exchangers with Parallel Flow of Heat Carriers

E. P. Valueva*

National Research University Moscow Power Engineering Institute, Moscow, 111250 Russia

**e-mail: ep.valueva@gmail.com*

Abstract—The effect of heat conduction through the wall along the flow of heat carriers on the effectiveness of heat exchangers (HEs) when the wall ends are not thermally insulated from the environment has been investigated. An analytical solution of the problem for cocurrent flow of heat carriers was obtained for the same ratios of thermal equivalents of the heat carriers β and heat-transfer coefficients α on both sides of the wall separating hot and cold heat carriers and for a counter flow at $\beta = \alpha = 1$. The solution to the problem depends on the number of heat-transfer units Ntu , parameter C_A describing the axial wall heat conduction, the Biot number Bi , which determines relative heat transfer from the wall ends to the environment, and temperatures of the fluid in contact with the wall ends. The effect of axial wall heat conduction becomes more pronounced with decreasing parameter C_A . Two cases are examined: case I with surrounding fluid temperatures assumed as equal to the inlet and outlet temperatures of the hot heat carrier and case II with surrounding fluid temperatures assumed as equal to the inlet and outlet temperatures of the cold heat carrier. The results obtained demonstrate that, at low Biot numbers ($Bi < 10-3$), the effectiveness of a heat exchanger ϵ for any values of C_A in a cocurrent HE hardly differs at all from the effectiveness of the HE in the absence of the axial wall heat conduction effect, ϵ_0 , and for a counter flow at low C_A the HE effectiveness is noticeably less than ϵ_0 and decreases by two times at $Ntu \gg 1$. At high Biot numbers ($Bi > 1$), the effect of axial wall conduction can increase the effectiveness of either heat carrier, while the temperature of the other heat carrier will change slightly during its flow through the heat exchanger. The predictions indicate that the best way for increasing the HE effectiveness is to employ the same thermal equivalents of two heat carriers and heat-transfer coefficients on both sides of the wall separating the hot and the heat carriers ($\beta = \alpha = 1$).

Keywords: heat exchanger, effectiveness, wall axial heat conduction, number of heat-transfer units, heat transfer, Biot number