ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКА, 2023, № 11, с. 76–81

ТЕПЛО- И МАССООБМЕН, СВОЙСТВА РАБОЧИХ ТЕЛ И МАТЕРИАЛОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СТЕНКИ ТРУБЫ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ПЕРИМЕТРУ КОЭФФИЦИЕНТАХ ТЕПЛООТДАЧИ[1]

В. А. Кудинов[a], Е. В. Котова[a], *, Р. М. Клеблеев[a], Т. Е. Гаврилова[a], Е. В. Стефанюк[a]

[a] *Самарский государственный технический университет, Молодогвардейская ул., д. 244, г. Самара, 443100 Россия*

**e-mail: larginaevgenya@mail.ru*

Поступила в редакцию 24.04.2023 г.
После доработки 22.05.2023 г.
Принята к публикации 01.06.2023 г.

На основе определения дополнительной функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса получено приближенное аналитическое решение нестационарной двумерной задачи теплопроводности для бесконечного полого цилиндра при граничных условиях третьего рода с переменными в окружном направлении коэффициентами теплоотдачи. Дополнительная функция описывает изменение температуры во времени в одной конкретной точке пространственной переменной. При ее использовании можно свести решение исходного дифференциального уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения, из которого находятся собственные числа краевой задачи. То есть излагается другая концепция определения собственных чисел исходя из временного уравнения относительно дополнительной функции, в отличие от классических методов, где собственные числа находятся при решении краевой задачи Штурма – Лиувилля для области пространственной переменной. Назначение дополнительных граничных условий – выполнение искомым решением уравнения в граничных точках. Показано, что выполнение уравнения в граничных точках приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области. Дополнительные граничные условия выводятся при использовании исходного дифференциального уравнения и основных граничных условий. Многократно дифференцируя уравнение по пространственной переменной, а граничные условия – по времени, путем сопоставления получаемых соотношений можно найти любое количество дополнительных граничных условий. Точность решения уравнения внутри рассматриваемой области зависит от числа приближений, а следовательно, и от количества используемых дополнительных граничных условий. Полученное таким образом приближенное аналитическое решение отличается простотой конструкции, удобной для применения в инженерных приложениях.

Ключевые слова: граничные условия третьего рода, переменные коэффициенты теплоотдачи, интегральный метод теплового баланса, дополнительные функции, дополнительные граничные условия, приближенное аналитическое решение

DOI: 10.56304/S0040363623110085

Математические постановки нестационарных задач теплопроводности с граничными условиями третьего рода обычно формулируются при постоянных во времени и по пространственной переменной коэффициентах теплоотдачи. Однако в технике довольно часто встречаются задачи по определению температурного состояния цилиндрических конструкций с коэффициентами теплоотдачи, переменными в окружном направлении. Подобные задачи возникают, например, при поперечном омывании труб, в результате которого ламинарное течение среды в лобовой и боковой частях канала круглого сечения может смениться на турбулентное в хвостовой части потока. Коэффициенты теплоотдачи в этих случаях находятся по приближенным эмпирическим критериальным зависимостям [1, 2]. Имея аналитическое решение подобной задачи и используя экспериментальные данные по температуре омывающей среды, путем решения обратной задачи теплопроводности можно уточнить коэффициенты теплоотдачи. С помощью уточненных данных контролируется и оптимизируется работа теплообменных устройств. Подобные задачи необходимо также решать и применительно к внутренним поверхностям обогреваемых труб, расположенных

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России в рамках государственного задания Самарскому государственному техническому университету (тема № FSSE-2023-0003).

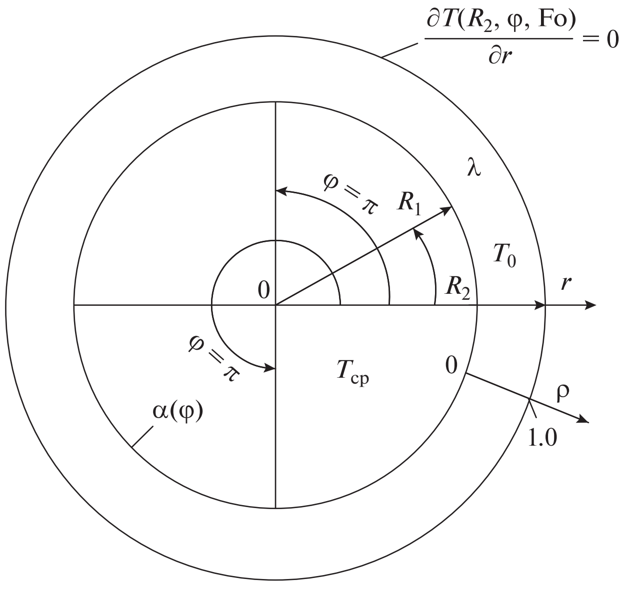

Рис. 1. Схема системы координат $0 < r < R$, $0 < \rho < 1$ при $r = R_2$, $\rho = 1$

горизонтально, при течении в них пароводяных смесей. При этом вертикальное перемещение пара приводит к переменности коэффициентов теплоотдачи в окружном направлении. Получение точных аналитических решений таких задач затруднено ввиду их двумерности и переменности граничных условий [3–6]. Например, метод, основанный на использовании преобразования Фурье и интегрального преобразования Ханкеля [4], может быть выбран для решения данной задачи. Однако решение представляется в форме двойного ряда, и к тому же оно содержит функции Бесселя первого и второго родов n-го порядка. Реализация такого метода в инженерных приложениях и особенно в тех случаях, когда аналитическое решение применяется при решении обратных задач, затруднительно. В связи с этим проблема получения их (задач) приближенных аналитических решений является актуальной. В работах [5, 6] на основе совместного использования интегральных преобразований Лапласа и ортогонального метода Бубнова – Галеркина получено приближенное аналитическое решение краевой задачи. Однако оно найдено лишь в первом приближении. Увеличение числа приближений сопровождается необходимостью разрабатывать системы координатных функций, точно удовлетворяющих переменным граничным условиям в любом приближении, что весьма сложно.

В настоящей работе рассматривается метод нахождения решения, основанный на использовании дополнительных функций и дополнительных граничных условий [7]. Преимущества данного метода – его простота и универсальность, что связано с получением решения не исходного дифференциального уравнения в частных производных, а некоторого осредненного по пространственным переменным уравнения (интеграла теплового баланса), поэтому процесс интегрирования уравнения по этим переменным сводится к более простой операции, заключающейся в определении интегралов. В итоге решение краевой задачи состоит в интегрировании обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной функции, зависящей лишь от времени.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве конкретного примера в статье приведено решение нестационарной задачи теплопроводности для бесконечного полого цилиндра при тепловой изоляции его наружной поверхности и переменных в окружном направлении коэффициентах теплоотдачи на внутренней поверхности цилиндрической стенки.

Математическая постановка задачи имеет следующий вид [3–5] (рис. 1):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{1}{1+m\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[(1+m\rho)\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\right] + \frac{m^2}{(1+m\rho)^2}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2}; \quad (1)$$

$$\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \rho < 1; \quad -\pi \le \varphi \le \pi;$$

$$\Theta(\rho, \varphi, 0) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\Theta(0, \varphi, \mathrm{Fo})}{\partial \rho} - \mathrm{Bi}(\varphi)\left[1 - \Theta(0, \varphi, \mathrm{Fo})\right] = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, \varphi, \mathrm{Fo})}{\partial \rho} = 0, \quad (4)$$

где $\Theta = (T - T_0)/(T_{ср} - T_0)$ – безразмерная температура; T – температура, K; T_0 – температура стенки в начальный момент времени, K; $T_{ср}$ – температура среды, K; $\mathrm{Fo} = a\tau/(R_2 - R_1)^2$ – число Фурье; a – коэффициент температуропроводности, м^2/с; τ – время, с; R_1, R_2 – внутренний и наружный радиус полого цилиндра, м; $m = (R_2 - R_1)/R_1$; r – радиальная координата, м; $\rho = (r - R_1)/(R_2 - R_1)$ – безразмерная радиальная координата; φ – окружная координата, м; $\mathrm{Bi} = \alpha(R_2 - R_1)/\lambda$ – число Био; α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м$^2 \cdot$ K); λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м $\cdot$ K).

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА

Авторами настоящей статьи выдвинуто предположение, что изменение коэффициента теплоотдачи на внутренней поверхности стенки описывается следующей формулой [8]:

$$\mathrm{Bi}(\varphi) = \mathrm{Bi}\left(1 + \delta\cos\varphi\right), \quad (5)$$

где $\delta > 1$ – коэффициент, характеризующий интенсивность изменения числа Био.

Согласно соотношению (5), число $\mathrm{Bi}(\varphi)$ принимает максимальное значение $\mathrm{Bi}(\varphi) = \mathrm{Bi}(1+\delta)$ в точке $\varphi = 0$ и минимальное $\mathrm{Bi}(\varphi) = \mathrm{Bi}(1-\delta)$ – в точках $\varphi = \pm\pi$.

Вводится дополнительная искомая функция

$$q(\mathrm{Fo}) = \Theta(1, \varphi, \mathrm{Fo}), \tag{6}$$

характеризующая изменение температуры во времени в точке $\rho = 1$. Ввиду того что температура в точке $\rho = 1$ – искомый параметр задачи (1)–(4), ее отдельное рассмотрение никоим образом эту задачу не изменяет и является лишь дополнительным средством, позволяющим существенно упростить получение ее приближенного аналитического решения. Стоит отметить, что соотношение (6), по сути, представляет собой дополнительное граничное условие.

Решение задачи (1)–(4) принимается в виде

$$\Theta(\rho, \varphi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=0}^{n} b_k(q)\psi_k(\rho), \tag{7}$$

где $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты, определяемые из основных (3), (4) и дополнительного (6) граничных условий; $\psi_k(\rho) = \rho^k$ – координатные функции.

Для получения приближенного аналитического решения задачи (1)–(4) следует подставить (7), ограничиваясь тремя членами ряда, в выражения (3), (4), (6). Относительно неизвестных коэффициентов $b_0(q)$, $b_1(q)$, $b_2(q)$ составлена система трех алгебраических линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &b_1 - \mathrm{Bi}(1 - b_0) = 0;\\ &b_1 + 2b_2 = 0;\\ &b_0 + b_1 - b_2 = q, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

решение которой приводит к следующим результатам:

$$b_0 = \frac{q + 0.5\mathrm{Bi}}{1 + 0.5\mathrm{Bi}};\quad b_1 = \frac{\mathrm{Bi}(q-1)}{1 + 0.5\mathrm{Bi}};$$
$$b_2 = -\frac{0.5\mathrm{Bi}(q-1)}{1 + 0.5\mathrm{Bi}}.$$

После подстановки найденных значений коэффициентов в соотношение (7) можно получить

$$\Theta(\rho, \varphi, \mathrm{Fo}) = \frac{q(\mathrm{Fo}) + 0.5\mathrm{Bi}(\varphi)\{1 + [q(\mathrm{Fo}) - 1](2-\rho)\rho\}}{1 + 0.5\mathrm{Bi}(\varphi)}. \tag{9}$$

Очевидно, что соотношение (9) удовлетворяет граничным условиям (3), (4) и дополнительному граничному условию (6). Необходимо, чтобы соотношение (9) удовлетворяло не уравнению (1), а некоторому осредненному по координатам ρ и φ уравнению, т.е. интегралу теплового баланса

$$\int_0^{\pi}\int_0^1 \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Fo}} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial\rho^2} - \frac{m}{1+m\rho}\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} - \frac{m^2}{(1+m\rho)^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2}\right)\times \times d\rho d\varphi = 0. \tag{10}$$

Ввиду симметричности краевой задачи диапазон изменения координаты φ принят равным $0 \le \varphi \le \pi$.

Подставляя (9) в (10), умножая последнее выражение на $(1 - m\rho)^2$, можно получить следующее обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $q(\mathrm{Fo})$:

$$N\frac{dq(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} Mq(\mathrm{Fo}) = 0, \tag{11}$$

где $N = \dfrac{\pi}{30\eta}\left[\left(20 + 25m + 9m^2\right)\eta - 4m(5+m) - 40\right]$; $\eta = [16(1-\mathrm{Bi}) + 3\mathrm{Bi}]^{1/2}$; $M = \pi\left[\dfrac{4}{\eta}\left(2 + m + \dfrac{m^2}{3}\right) + m\left(\dfrac{m}{3} + 1\right) + 2\right]$.

После интегрирования уравнения (11) можно записать

$$q(\mathrm{Fo}) = 1 + C\exp(-\mu\mathrm{Fo}), \tag{12}$$

где C – постоянная интегрирования; $\mu = M/N$ – первое собственное число.

Стоит отметить, что собственное число в данном случае найдено при решении обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной функции $q(\mathrm{Fo})$, изменяющейся лишь во времени, в отличие от классических методов (метода Фурье), где собственные числа находятся при решении краевой задачи Штурма – Лиувилля. Уравнение этой задачи представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, собственная функция которого изменяется лишь по пространственной переменной. В настоящей работе излагается другой подход к определению собственных чисел, связанный с решением временного уравнения [7, 9–11].

При подстановке (12) в (9) получаем

$$\Theta(\rho, \varphi, \mathrm{Fo}) = 1 + 2C\exp(-\mu\mathrm{Fo})\times \times[\rho\mathrm{Bi}(\varphi)(2-\rho) + 1]/\nu, \tag{13}$$

где $\nu = -2 + \mathrm{Bi}(\varphi)$.

Постоянная интегрирования C находится из начального условия (2). Для этого составляется его невязка и требуется выполнение ее ортогональности к координатной функции $\psi_0(\rho) = 1$:

$$\int_0^{\pi}\int_0^1 \Theta(\rho, \varphi, \mathrm{Fo})\psi_1(\rho)\,d\rho d\varphi = 0. \tag{14}$$

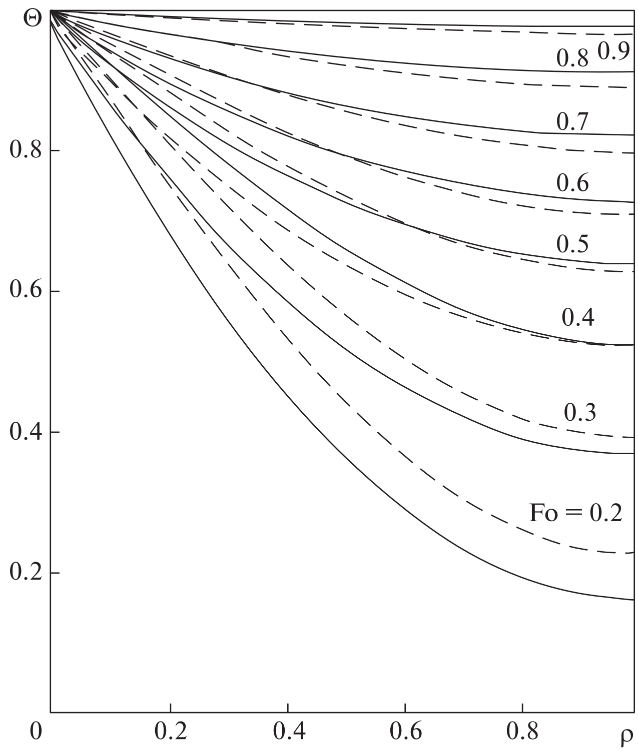

Рис. 2. Распределение температуры ($\varphi = 0$, $m = 0$, $\mathrm{Bi} = 10000$) при различных значениях ρ.
Линия: прямая – расчет по формуле (17); штриховая – точное решение [9]

Подставляя (13) в (14), можно прийти к следующему соотношению:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1} 1 + \frac{2}{\nu}C\left[\rho\mathrm{Bi}(\varphi)(2-\rho)-1\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 0. \quad (15)$$

После определения интегралов соотношение (15) относительно постоянной интегрирования C представляет собой алгебраическое линейное уравнение, решение которого дает результат

$$C = -\frac{3}{2}\eta/(\eta-2). \quad (16)$$

После подстановки (16) в (13) получаем приближенное аналитическое решение задачи (1)–(4):

$$\Theta(\rho,\varphi,\mathrm{Fo}) = 1 - 3\eta\exp(-\mu\mathrm{Fo})\times \times\left[\rho\mathrm{Bi}(\varphi)(2-\rho)-1\right]/\left[\nu(\eta-2)\right]. \quad (17)$$

Соотношение (17) точно удовлетворяет граничным условиям (3), (4), дополнительному условию (6), интегралу теплового баланса (10) и приближенно (в третьем приближении) уравнению (1) и начальному условию (2).

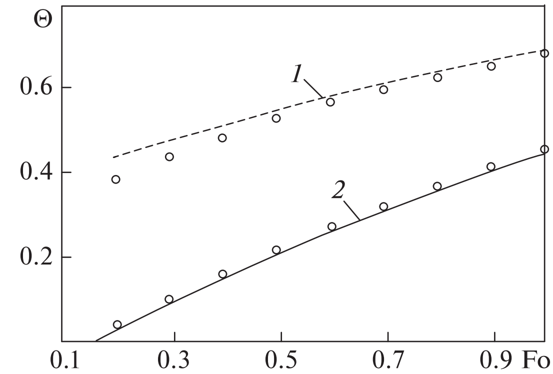

Рис. 3. Распределение температуры при разных значениях Fo ($\mathrm{Bi} = 1$, $m = 0.01$).
Расчет по формуле (17) при $\rho = 1$ (*1*) и $\rho = 0$ (*2*); точки – точное решение

СРАВНЕНИЕ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Если положить, что $m = 0$ и $\mathrm{Bi} \to \infty$, то задача (1)–(4) сводится к задаче теплопроводности для бесконечной пластины с симметричными граничными условиями первого рода. Первое собственное число в этом случае будет равно $\mu \approx 3.0$ (его точное значение составляет $\mu = 2.4674$ [9]). Результаты расчетов для данного случая в сравнении с точным решением [9] приведены на рис. 2. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне $0.3 \le \mathrm{Fo} < \infty$ расхождение с точным решением не превышает 5%.

На рис. 3 показаны итоги вычислений, выполненных при $\varphi = 0$, $\mathrm{Bi} = 1$ и $m = 0.01$. Для столь малого m стенка полого цилиндра представляет собой практически плоскую стенку при граничных условиях третьего рода. Сравнивая результаты расчетов по формуле (17) с точным решением [9], можно установить, что при $\mathrm{Fo} \ge 0.2$ их расхождение не превышает 4%.

Таким образом, уже в третьем приближении получена точность решения, достаточная для инженерных приложений. При необходимости она может быть повышена путем увеличения числа членов ряда (7). Возникающие при этом неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ $(k = \overline{0,n})$ могут быть найдены из условий (3), (4) и (6) и некоторых дополнительных граничных условий, определяемых в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением (7) было эквивалентно выполнению уравнения (1) в граничных точках $\rho = 0$ и $\rho = 1$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В работах [10, 11] показано (путем доказательства соответствующих теорем), что выполнение уравнения (1) на границах приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области. Причем точность решения данного уравнения зависит от числа приближений (числа используемых в каждом конкретном приближении дополнительных граничных условий). Для их определения следует продифференцировать граничные условия (3), (4) и соотношение (6) по переменной Fo, а уравнение (1) – по переменной ρ:

$$\frac{\partial^2\Theta(0,\varphi,\mathrm{Fo})}{\partial\rho\partial\mathrm{Fo}}+\mathrm{Bi}(\varphi)\frac{\partial\Theta(0,\varphi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=0; \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2\Theta(1,\varphi,\mathrm{Fo})}{\partial\rho\partial\mathrm{Fo}}=0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial\Theta(1,\varphi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\rho\partial\mathrm{Fo}}=\frac{1}{1+m\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left[(1+m\rho)\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right]+ + \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{m^2}{(1+m\rho)^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2}\right]. \quad (21)$$

При замене первого слагаемого в (18) правой частью соотношения (20), а производной $\partial\Theta(0,\varphi,\ \mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo}$ – правой частью уравнения (1) можно получить дополнительное граничное условие в точке $\rho = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{1}{1+m\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[(1+m\rho)\frac{\partial\Theta(0,\varphi,\ \mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right]+ + \frac{m^2}{(1+m\rho)^2}\frac{\partial^2\Theta(0,\varphi,\mathrm{Fo})}{\partial\varphi^2}\right\}+\mathrm{Bi}(\varphi)\times \times\left\{\frac{1}{1+m}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[(1+m\rho)\frac{\partial\Theta(0,\varphi,\ \mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right]+ + \frac{m^2}{(1+m)^2}\frac{\partial^2\Theta(0,\varphi,\mathrm{Fo})}{\partial\varphi^2}\right\}=0. \quad (22)$$

Выражение (19) с учетом (21) приведено к дополнительному граничному условию в точке $\rho = 1$:

$$\frac{\partial^2\Theta(1,\varphi,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}+(1+m)\frac{\partial^3\Theta(1,\varphi,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^3}- - 2m^3\frac{\partial^2\Theta(1,\varphi,\mathrm{Fo})}{\partial\varphi^2}+\frac{m^2}{(1+m)^2}\frac{\partial^3\Theta(1,\varphi,\mathrm{Fo})}{\partial\varphi^2\partial\rho}=0. \quad (23)$$

Путем замены левой части формулы (20) на правую часть уравнения (1) можно вывести еще одно дополнительное граничное условие в точке $\rho = 1$:

$$\frac{\partial^2\Theta(1,\varphi,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}+\frac{m}{(1+m)^2}\frac{\partial^2\Theta(1,\varphi,\mathrm{Fo})}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}. \quad (24)$$

Для получения решения задачи (1)–(4) в шестом приближении следует подставить (7) (ограничиваясь шестью членами ряда) в основные (3), (4) и дополнительные (6), (22)–(24) граничные условия. Относительно неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ $(k=\overline{0,5})$ будет составлена система из шести алгебраических линейных уравнений. После подстановки найденных при решении этой системы коэффициентов $b_k(q)$ в соотношение (7) дальнейшая последовательность проведения решения аналогична изложенной ранее.

Формула (9) по найденному в процессе эксперимента изменению температуры во времени в какой-либо точке стенки полого цилиндра путем решения обратной задачи теплопроводности позволяет идентифицировать коэффициент δ и, следовательно, определить изменение числа Bi по окружной координате φ.

ВЫВОДЫ

1. На основе введения дополнительной функции и дополнительных граничных условий разработана методика получения приближенного аналитического решения нестационарной задачи теплопроводности для цилиндрической стенки с переменными в окружном направлении коэффициентами теплоотдачи. Применение дополнительной функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса позволяет упростить процесс получения как решения, так и окончательной формулы для него.

2. Основное преимущество предлагаемой методики по сравнению с известными методами решения задач такого рода состоит в простоте конструкции решения, удобной при для практического применения. Провести такое решение оказалось возможным благодаря использованию дополнительных граничных условий, позволяющих решить исходное дифференциальное уравнение как в граничных точках, так и внутри рассматриваемой области, минуя непосредственное интегрирование по пространственной переменной и ограничиваясь определением интеграла теплового баланса – осредненного исходного дифференциального уравнения.

3. Введение дополнительной функции и дополнительных граничных условий никоим образом не изменяет исходную математическую постановку задачи и является лишь вспомогательным средством для упрощения процесса поиска ее приближенного аналитического решения. К тому же эти условия выполняются при любом другом методе получения решения, несмотря на то что они не выделяются для отдельного рассмотрения. В самом деле, дополнительная функция – определяемый параметр при решении краевой задачи независимо от применяемого метода. Использование дополнительных граничных условий приводит к решению исходного дифференциального уравнения в граничных точках, которое должно выполняться и при любом другом методе решения, включая и граничные условия первого рода, при которых диф-

ференциальное уравнение любой краевой задачи [в данном случае основное уравнение при $\mathrm{Bi} \to \infty$] решается в предельном смысле (через равенство нулю его правой и левой части).

4. Изложенная концепция определения собственных чисел отличается от классических методов их определения (при решении краевой задачи Штурма – Лиувилля) тем, что они находятся при решении временного обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной функции. Такой подход позволяет упростить процесс получения собственных чисел ввиду того, что они находятся при решении не краевой задачи, а одного обыкновенного дифференциального уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Михеев М.А., Михеева И.М.** Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977.
2. **Петухов Б.С.** Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967.
3. **Карташов Э.М., Кудинов В.А., Калашников В.В.** Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций. М.: Юрайт, 2018.
4. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001.
5. **Цой П.В.** Методы расчета задач тепломассопереноса. М.: Энергоатомиздат, 1984.
6. **Цой П.В.** Системные методы расчёта краевых задач тепломассопереноса. М.: Изд-во МЭИ, 2005.
7. **Модели** термомеханики с конечной и бесконечной скоростью распространения теплоты / И.В. Кудинов, А.В. Ерёмин, К.В. Трубицын, Е.В. Стефанюк. М.: Проспект, 2020.
8. **Елизаров Д.П., Федорович Л.А.** О напряжениях в толстостенном полом цилиндре от температурной неравномерности в окружном направлении // Теплоэнергетика. 1974. № 4. С. 81–87.
9. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
10. **Федоров Ф.М.** Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.
11. **Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А.** Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций // Сиб. журн. вычислит. математики. 2019. Т. 22. № 2. С. 153–165. [Новосибирск]. https://doi.org/10.15372/SJNM20190203

Approximate Analytical Solution of the Problem of Thermal Conductivity in a Pipe Wall with Variable Heat-Transfer Coefficients along the Perimeter

V. A. Kudinov[a], E. V. Kotova[a], *, R. M. Klebleev[a], T. E. Gavrilova[a], and E. V. Stefanyuk[a]

[a] *Samara State Technical University, Samara, 443100 Russia*

**e-mail: larginaevgenya@mail.ru*

Abstract—Based on the definition of an additional function and additional boundary conditions in the integral heat balance method, an approximate analytical solution is obtained for a nonstationary two-dimensional heat conduction problem for an infinite hollow cylinder under boundary conditions of the third kind with variable heat-transfer coefficients in the circumferential direction. An additional function describes the change in temperature over time at one particular point in the spatial variable. Using it, one can reduce the solution of the original partial differential equation to the integration of an ordinary differential equation, from which the eigenvalues of the boundary value problem are found. That is, a different concept of determining eigenvalues based on the time equation with respect to an additional function is presented, in contrast to classical methods, where eigenvalues are found when solving the Sturm–Liouville boundary value problem for a region of a spatial variable. The assignment of additional boundary conditions is the solution of the original equation at the boundary points. It is shown that solving the equation at the boundary points leads to its solution inside the considered region as well. Additional boundary conditions are derived using the original differential equation and basic boundary conditions. Repeatedly differentiating the equation with respect to the spatial variable, and the boundary conditions with respect to time, by comparing the obtained relations, one can find any number of additional boundary conditions. The accuracy of solving the equation inside the considered region depends on the number of approximations, and, consequently, on the number of additional boundary conditions used. The approximate analytical solution obtained in this way is characterized by a simple design that is convenient for use in engineering applications.

Keywords: boundary conditions of the third kind, variable heat-transfer coefficients, integral heat-balance method, additional functions, additional boundary conditions, approximate analytical solution