
**ТЕПЛО- И МАССООБМЕН,
СВОЙСТВА РАБОЧИХ ТЕЛ И МАТЕРИАЛОВ**

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО ЧИСЛА
ПРАНДТЛЯ ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ И ПРОНИЦАЕМОСТИ СТЕНКИ ТРУБЫ
НА ТУРБУЛЕНТНЫЙ ТЕПЛООБМЕН¹**

© 2023 г. В. Г. Лущик^а, М. С. Макарова^а, С. С. Попович^а, *

^аНаучно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,
Мичуринский просп., д. 1, Москва, 119192 Россия

*e-mail: pss@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 21.03.2023 г.

После доработки 06.07.2023 г.

Принята к публикации 01.08.2023 г.

Предложена методика моделирования турбулентного течения в канале с непроницаемыми и проницаемыми стенками при наличии теплоподвода к стенке. Для замыкания уравнений пограничного слоя используется трехпараметрическая дифференциальная модель сдвиговой турбулентности, дополненная уравнением переноса для турбулентного потока тепла. Проведены расчеты для развитого турбулентного течения в круглой трубе с непроницаемыми и проницаемыми стенками для воздуха и бинарных газовых смесей с низким значением молекулярного числа Прандтля при параметрах, соответствующих таковым при выполнении более ранних экспериментов. Результаты исследования по влиянию числа Прандтля на теплообмен в трубе с непроницаемыми стенками для теплоносителя с постоянными физическими свойствами согласуются с экспериментальными данными и эмпирическими зависимостями Кейса и Петухова для числа Нуссельта в диапазоне чисел Прандтля 0.2–0.7. Показано, что возникающий в трубе при сильном отсосе газа положительный градиент давления приводит к нарушению подобия профилей скорости и температуры и, как следствие, к нарушению аналогии Рейнольдса. Использование уравнения переноса для турбулентного потока тепла позволяет учесть сложную зависимость турбулентного числа Прандтля от молекулярного числа Прандтля в вязком подслое и в логарифмическом пограничном слое. Проведена оценка влияния переменности теплофизических свойств и турбулентного числа Прандтля на характеристики теплообмена в трубе. Так, отличие числа Nu, определенного в предположении постоянства турбулентного числа Прандтля, от результатов, полученных в расчетах с использованием уравнения для турбулентного потока тепла, возрастает с уменьшением молекулярного числа Прандтля и увеличением интенсивности отсоса газа.

Ключевые слова: течение в трубе, теплообмен, модель турбулентности, проницаемая стенка, отсос газа, молекулярное число Прандтля, градиент давления, коэффициент аналогии Рейнольдса

DOI: 10.56304/S0040363623120093

К настоящему времени в литературе накоплен большой объем численных, экспериментальных и аналитических данных по исследованию развитого турбулентного течения в каналах [1, 2]. В полном объеме этот процесс количественно исследован приближенными методами: с использованием моделей турбулентности (Reynolds-averaged Navier–Stokes – RANS), метода крупных вихрей (large eddy simulation – LES), прямым численным моделированием (direct numerical simulation – DNS) на протяжении последних десятилетий [3]. Подробный обзор работ, посвященных влиянию чисел Рейнольдса Re и Прандтля Pr на турбулентный перенос тепла в непроницаемых

каналах плоского [4], круглого [5, 6] и кольцевого [7–9] сечений для чисел $Re < 20000$, определенных по среднемаховой скорости с использованием методов DNS и LES, можно найти в [6]. В [10] для DNS достигнуто число $Re < 61000$.

В указанных трудах в качестве рабочего тела, как правило, рассматривались газы ($Pr = 0.71$), режидкости ($Pr \gg 1$) и жидкие металлы ($Pr = 0.025$). Существует менее исследованная область газовых смесей из инертных, легких и тяжелых газов (гелий He, водород H₂ в смеси с аргоном Ar, ксеноном Xe, неоном Ne, криптоном Kr и т.д.) с числом Прандтля в диапазоне 0.2–0.7 в зависимости от массовой концентрации легкого газа, особенности теплофизических свойств которых рассмотрены в работах [11, 12]. Использование таких смесей в качестве теп-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-79-10213).

лоносителей и рабочих тел представляет существенный интерес для прикладных задач современной теплоэнергетики, например в теплообменных аппаратах космических установок, цикле Брайтона, устройствах безмашинного энергоразделения и др. [11–14]. Поэтому понимание особенностей теплообмена газовых смесей становится актуальной задачей, чему и посвящен ряд экспериментальных работ, основные результаты которых представлены в [15, 16]. В них исследовалось влияние молекулярного числа Прандтля на тепловые и динамические характеристики развитого турбулентного течения в трубе с непроницаемыми стенками. В этих работах полученные экспериментальные зависимости $Nu = f(Pr, Re)$ для смесей He + Ar [15] и He + Xe, H₂ + Xe и воздух [16] в диапазоне чисел $Pr = 0.18–0.70$ сравнивались с шестью известными на тот момент эмпирическими зависимостями $Nu = f(Pr, Re)$, и для газов с постоянными теплофизическими свойствами было продемонстрировано, что лишь две зависимости (Кейса [2] и Петухова [17, 18]) согласуются с экспериментальными данными [15, 16] в упомянутом диапазоне изменения числа Pr при числах $Re = 34 \times 10^3, 60 \times 10^3, 84 \times 10^3$.

Градиент давления оказывает существенное влияние на характеристики теплообмена при течениях в каналах, которые зачастую приводят к полной перестройке изначального потока. Геометрическое (сужение, расширение канала), тепловое (подогрев, охлаждение стенок), расходное (вдув, отсос газа на стенках) воздействия могут вызывать как ламинаризацию, так и турбулизацию течения [19–25]. В частности, положительный градиент давления в трубе появляется при отсосе газа через проницаемые стенки в результате снижения скорости потока по ее длине [19, 20]. В свою очередь, отсос газа на стенке значительно влияет на интегральные и локальные характеристики потока [19]. Теоретический анализ задачи о течениях и теплообмене в трубе с отсосом при условии автомодельности профилей скорости и температуры [26] показал, что даже небольшое значение параметра отсоса оказывает существенное влияние на коэффициент трения и число Нуссельта.

В этой связи представляет интерес рассмотреть задачу о совместном влиянии числа Прандтля газа и интенсивности отсоса на проницаемой стенке при наличии теплоподвода на характеристики турбулентности и теплообмена при течениях в трубе.

Рассматриваемая классическая задача в целом может быть решена с использованием современных вычислительных моделей (например, [1, 3]). В то же время довольно точные и физически обоснованные результаты можно получить и на основе относительно простых традиционных

подходов. Последнее и есть цель данного исследования.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для представления двумерного течения в канале используются уравнения неразрывности, движения и энергии, описывающие существенно дозвуковое течение в общем виде для плоского ($n = 0$) или осесимметричного случая ($n = 1$) в приближении узкого канала [27]:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^n \rho v) = 0; \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^n \left(\eta \frac{\partial u}{\partial r} + \rho \tau \right) \right]; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} c_p \left(\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \\ = u \frac{dp}{dx} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^n \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \rho q_t \right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где x – осевая координата, отсчитываемая от входа в канал; r – радиальная координата, отсчитываемая от геометрической оси; u и v – компоненты скорости вдоль осей x и r соответственно; p – давление газа в канале; $\tau = -\langle u'v' \rangle$ – турбулентное напряжение сдвига; $\rho \tau$ – турбулентное трение; ρq_t – турбулентный поток тепла; ρ – плотность газа; η – динамический коэффициент вязкости; c_p – изобарная теплоемкость газа; λ – теплопроводность.

В уравнении энергии термодиффузия не учитывается, поскольку в статье не рассматривается диссоциация или ионизация газов.

Необходимо отметить, что приближение узкого канала базируется на тех же уравнениях, что и приближение пограничного слоя, но отличается от последнего возможностью сквозного счета от стенки до оси канала и определением продольного градиента давления из условия сохранения расхода (для проницаемой стенки – с учетом транспирации на стенке) в отличие от расчета пограничного слоя, когда градиент давления задается.

Для определения значений параметров $\rho \tau$ и ρq_t , обычно используются гипотезы вида

$$\rho \tau = -\rho \langle u'v' \rangle = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial r}; \quad (4)$$

$$\rho q_t = -\rho c_p \langle v'T' \rangle = \rho c_p a_t \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (5)$$

где ν_t – коэффициент турбулентной вязкости; a_t – турбулентная температуропроводность.

Для замыкания системы уравнений (2), (3) используются различные модели турбулентности [1]. Некоторые из них позволяют определить значение коэффициента турбулентной вязкости ν_t в уравнении (4), а затем найти турбулентное трение $\rho \tau$.

В настоящей работе используется трехпараметрическая дифференциальная модель сдвиговой турбулентности, предложенная в [28]. Изначально модель включала в себя три дифференциальных уравнения переноса для энергии турбулентности $E = 0.5 \sum \langle u_i'^2 \rangle$, касательного турбулентного напряжения сдвига $\tau = -\langle u'v' \rangle$ и параметра $\omega = E/L^2$, где L – поперечный интегральный масштаб турбулентности:

$$\left. \begin{aligned} \rho u \frac{\partial E}{\partial x} + \rho v \frac{\partial E}{\partial r} &= -(c_p \sqrt{EL} + c_1 \eta) \frac{E}{L^2} + \\ &+ \rho \tau \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n D_E \frac{\partial E}{\partial r} \right); \\ \rho u \frac{\partial \tau}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \tau}{\partial r} &= -(3c_p \sqrt{EL} + 9c_1 \eta) \frac{\tau}{L^2} + \\ &+ c_2 \rho E \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n D_\tau \frac{\partial \tau}{\partial r} \right) - D_\tau \frac{\tau}{r^2}; \\ \rho u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \omega}{\partial r} &= -(2c_p \sqrt{EL} + 1.4c_1 \eta f_\omega) \frac{\omega}{L^2} + \\ &+ \left[\frac{\tau}{E} - 2c_3 \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \rho \omega \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n D_\omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Используя эту модель, можно непосредственно найти значение $\rho\tau$ без привлечения дополнительной гипотезы о коэффициенте турбулентной вязкости ν_t .

В дальнейшем модель турбулентности (6) была обобщена на случай течений с тепло- и массообменом [29]. Для этого турбулентный поток тепла (5) в уравнении энергии (3) определялся через связь между параметрами a_t и ν_t путем введения турбулентного числа Прандтля Pr_t :

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{a_t} = \frac{\langle u'v' \rangle \partial T / \partial r}{\langle v'T' \rangle \partial u / \partial r} = c_p \frac{\tau \partial T / \partial r}{q_t \partial u / \partial r}. \quad (7)$$

В расчетах принималось, что $Pr_t = 0.85$ в соответствии с результатами известных на тот момент экспериментальных работ [30].

Такой подход не всегда справедлив, например в области вязкого подслоя [31, 32]. Поэтому следующим шагом в развитии модели стало введение дифференциального уравнения для турбулентного потока тепла, что позволило уйти от приближения о постоянстве турбулентного числа Прандтля и находить:

значения Pr_t и ρq_t напрямую [33]:

$$\left. \begin{aligned} \rho u \frac{\partial q_t}{\partial x} + \rho v \frac{\partial q_t}{\partial r} &= -[3c_p \sqrt{EL} + 9c_1 \eta f(Pr)] \frac{q_t}{L^2} + \\ &+ c_4 c_p \rho E \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n D_q \frac{\partial q_t}{\partial r} \right) - D_q \frac{q_t}{r^2}; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

значения функций в уравнениях модели (6) и (8) [28, 29, 33]:

$$\begin{aligned} D_\phi &= a_\phi \sqrt{EL} + \alpha_\phi \eta \quad (\phi = E, \tau, \omega, q_t); \quad L = \sqrt{E/\omega}; \\ f_\omega &= 1 - \frac{1}{2c_1} \left(\frac{L}{E} \frac{\partial E}{\partial r} \right)^2; \quad f(Pr) = \frac{1 + c_5 \sqrt{Pr} + 1/\sqrt{Pr}}{1 + c_5 \sqrt{Pr}}; \end{aligned} \quad (9)$$

значения констант [28, 29, 33]:

$$\begin{aligned} c &= 0.3; \quad c_1 = 5\pi/4; \quad c_2 = 0.2; \quad c_3 = 0.04; \\ c_4 &= 0.235; \quad c_5 = 0.25; \quad a_E = a_\omega = 0.06; \\ a_\tau &= a_q = 3a_E = 0.18; \quad \alpha_E = \alpha_\tau = 1; \\ \alpha_\omega &= 1.4; \quad \alpha_q = f(Pr). \end{aligned} \quad (10)$$

На этапе проверки работоспособности и универсальности предложенной модели турбулентности все расчеты проводились с использованием констант (10), входящих в уравнения модели (6), (8), (9), которые были выведены в первоначальных работах [28, 29, 33] и далее не изменялись. Тестовые расчеты были выполнены для широкого класса задач пограничного слоя, результаты некоторых из них представлены в [20–22, 34–36].

Так, при сравнительном анализе данной модели турбулентности [28] с рядом известных моделей (алгебраических, одно- и двухпараметрических), проведенном в [35] при исследовании течения в сверхзвуковом турбулентном пограничном слое в сопле жидкостных ракетных двигателей, лучшие результаты были получены для модели [28]. Исследуемая тестовая задача является комплексной из-за совместного влияния сжимаемости, больших тепловых потоков, скоростей, отрицательного градиента давления в потоке и существенной разности температур стенки и потока. При этом количественная оценка рассматриваемых моделей велась по значениям потерь удельного импульса из-за трения на выходе из сопла и теплового потока в стенку в критическом сечении сопла.

В настоящей работе данная модель использована для исследования класса внутренних течений с воздействиями, приводящими к появлению продольного градиента давления, на примере течения газов и газовых смесей в трубе с проницаемыми нагретыми стенками при отсосе газа.

Граничные условия на стенке ($r = R$), на оси ($r = 0$) и на входе ($x = 0$) в участок отсоса в предложенной постановке имеют вид:

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad \rho v = (\rho v)_w, \quad -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) = q_w, \\ E &= \frac{\partial E}{\partial r} = \tau = q_t = 0, \quad (r = R); \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \\ v &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0, \quad \tau = 0, \\ q_t &= 0, \quad (r = 0); \quad p = p_0, \quad u = U_0, \quad T = T_0, \\ E &= E_0, \quad \tau = 0, \quad \omega = \omega_0, \quad q_t = 0, \quad (x = 0). \end{aligned} \quad (11)$$

Таблица 1. Зависимость сходимости результатов расчета числа Нуссельта и коэффициента гидравлического сопротивления от количества узлов N_r

N_r	Nu	$\Delta Nu, \%$	ξ	$\Delta \xi, \%$
257	35.08	+0.11	0.02528	-1.71
513	35.05	+0.03	0.02557	-0.58
1025	35.04	—	0.02572	—

На участке трубы с непроницаемой стенкой в граничном условии на стенке ($r = R$) предполагается, что $\rho v = 0$.

В качестве граничных условий на входе в участок отсоса (11) используются профили скорости и характеристик турбулентности для развитого течения в трубе при соответствующем числе Рейнольдса.

Теплофизические свойства теплоносителей (ρ, η, λ, c_p) задаются в табличной форме в зависимости от давления и температуры, как для идеальных газов, а газовых смесей — также от концентрации легкого газа. Особенности расчета свойств смесей инертных газов, использованных в настоящей работе, подробно рассматривались в [11, 12].

Для расчета приняты следующие параметры:

число Рейнольдса на входе в рабочий участок

$$Re_0 = \rho_0 d u_0 / \eta_0;$$

молекулярное число Прандтля теплоносителя

$$Pr = \eta_0 c_{p0} / \lambda_0;$$

интенсивность отсоса $j_w^0 = (\rho v)_w / (\rho u)_0$;

безразмерный тепловой поток на стенке

$$q^+ = q_w d / (\lambda_0 T_0 Re_0 Pr_0).$$

Система уравнений (1)–(3), (6), (8) с соответствующими граничными условиями (11) решалась численно методом прогонки с итерациями. Сходимость (конвергенция) результатов расчета обеспечивалась заданием достаточного количества узлов по длине N_x и по радиусу N_r . Так, для одного из вариантов расчета на длине $x/d = 100$ количество узлов составило $N_x = 13\,696$, а в табл. 1 приведены три значения количества узлов N_r . Сравнение сходимости результатов расчета контролировалось по значениям числа Нуссельта $\Delta Nu = \frac{Nu - Nu_{1025}}{Nu_{1025}} \times 100\%$ и коэффициенту гидравлического сопротивления $\Delta \xi = \frac{\xi - \xi_{1025}}{\xi_{1025}} \times 100\%$.

Расчеты проводились на неравномерной сетке с шагом по радиусу Δr вблизи стенки канала намного меньше Δr в основной части канала, так что количество узлов в вязком подслое составляло примерно 1/3 общего числа узлов N_r . Представленные результаты расчетов выполнены при $N_r = 1025$, как следует из табл. 1, количество узлов $N_r = 513$ вполне достаточно для обеспечения сходимости результатов расчета с экспериментальными данными.

Шаг по длине Δx был достаточно мал в сечениях близких к входу и увеличивался по мере продвижения вниз по потоку, что позволило проводить расчеты даже при довольно низком уровне интенсивности турбулентности в потоке (около 1%).

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

В данной работе расчеты проводились в близкой к реализованной в экспериментах постановке (табл. 2). На рис. 1 представлена схема течения газовой смеси. Рабочему участку трубы Y_2 , на котором был организован режим течения с постоянными по длине теплоподводом ($q_w = \text{const}$) и отсосом ($j_w^0 = \text{const}$), предшествовал начальный участок трубы Y_1 длиной $x/d = 50$ таким образом, что на выходе из него в трубе устанавливалось развитое турбулентное течение при заданном числе Рейнольдса Re_0 . Далее на участке Y_2 длиной x/d (см. табл. 2) проводился расчет характеристик течения и теплообмена.

Непроницаемая стенка. Влияние числа Прандтля

Результаты исследования влияния молекулярного числа Прандтля на характеристики течения и теплообмена в трубе с непроницаемыми стенками для газов с постоянными физическими свойствами представлены на рис. 2 и 3.

Расчетная зависимость числа Нуссельта $Nu = 2Rq_w / [\lambda(T_w - T_b)]$ от числа Прандтля Pr (линия 3) в сравнении с экспериментальными точками 5 [16] приведена на рис. 2 для чисел Рейнольдса 34×10^3 и 84×10^3 (здесь и далее T_b — среднерасходная температура). Как видно на ри-

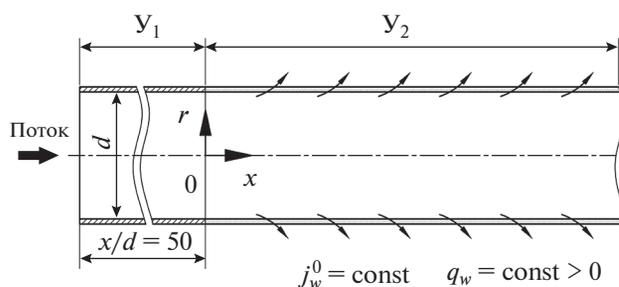
**Рис. 1.** Схема течения газовой смеси

Таблица 2. Расчетные и экспериментальные значения параметров для разных газовых смесей и отражение их на рисунках

Параметр	Эксперимент			Расчет			
	[15]	[16]	[38]				
	He + Ar	Воздух, He + Xe, H ₂ + Xe	Воздух	He + Ar	Воздух, He + Xe, H ₂ + Xe	Воздух	Воздух, He + Xe, H ₂ + Xe
Pr	0.419–0.486	0.18–0.72	0.7	0.47	0.18–0.72	0.7	0.71, 0.42, 0.18
Re ₀ , 10 ³	31.2–102	38–87	9.93–102.75	31–32	34, 84	9.93–102.75	32, 102.35
q ⁺ , 10 ⁻³	3.2	3.4–6.9	0.3	0.6–3.2	0.3	0.3	0.6, 3.2
j _w ⁰	0	0	0–0.012	0	0	0–0.1	0, 0.002, 0.004
x/d	2.1–82.1	2.2–52.4	1–16	1–100	1–50	1–16	1–100
Номер рисунка	4, 5, 6	2, 3	7	4, 5, 6	2, 3	7, 8, 9	10, 11, 12

сунке, согласованность результатов расчета и эксперимента вполне удовлетворительная. На рис. 2 приведены также заимствованные из [16] и согласующиеся при Pr > 0.2 с экспериментальными данными зависимости Кейса [2] (линия 1)

$$Nu = 0.22 Re^{0.8} Pr^{0.6} \quad (12)$$

и Петухова [17] (линия 2)

$$Nu = \frac{(\xi/8) Re Pr}{K_1(\xi) + K_2(Pr)\sqrt{\xi/8(Pr^{2/3} - 1)}}, \quad (13)$$

где $\xi = (1.82 \lg Re - 1.64)^{-2}$; $K_1(\xi) = 1 + 3.4\xi$; $K_2(Pr) = 11.7 + 1.8 Pr^{-1/3}$.

Можно отметить, что расчетные зависимости Nu(Pr) (см. рис. 2) получены для двух случаев.

Первый (точки 4) соответствует заданию реально-го состава смеси двух газов с указанной массовой долей компонентов: H₂(0.02) + Xe(0.98) с Pr = 0.18; He(0.05) + Xe(0.95) с Pr = 0.22; He(0.10) + Ar(0.90) с Pr = 0.42 и воздуха с Pr = 0.71. Второй случай (линии 3) относится к использованию в качестве теплоносителя идеального газа, например аргона, с заданным числом Прандтля Pr и скорректированным (с целью учесть зависимость коэффициента теплопроводности идеального газа от числа Прандтля) коэффициентом теплопроводности $\lambda = \eta c_p / Pr$. Как видно на рис. 2, оба подхода дают практически одинаковые результаты, а использование идеального газа с заданным числом Pr в расчетах для теплоносителей с постоянными физическими свойствами вполне оправдано [25].

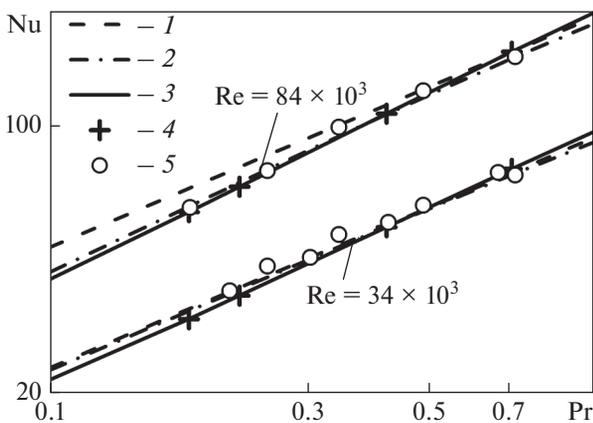


Рис. 2. Зависимость числа Нуссельта Nu от числа Прандтля Pr при числах Рейнольдса Re = 34 × 10³ и 84 × 10³. Зависимость: 1 – Кейса [2]; 2 – Петухова [17]; 3 – расчетная для идеального газа с заданным числом Pr; 4 – расчетные данные для реальной газовой смеси; 5 – экспериментальные данные [16]

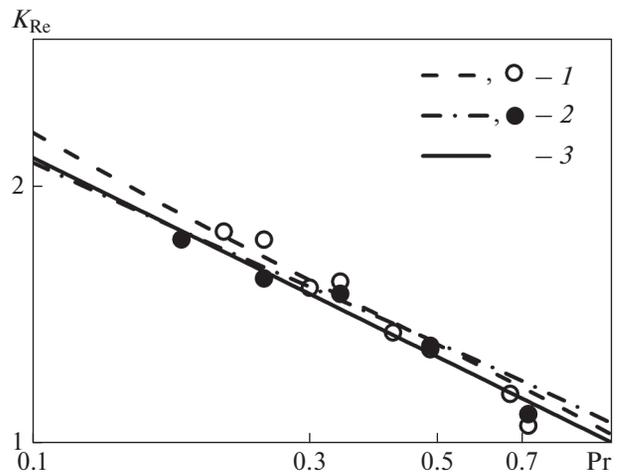


Рис. 3. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} от числа Прандтля Pr. Точки – экспериментальные данные [16]; 1, 2 – результаты расчета для чисел Рейнольдса Re = 34 × 10³ и 84 × 10³ соответственно; 3 – аппроксимация K_{Re} = Pr^{-1/3} [38]

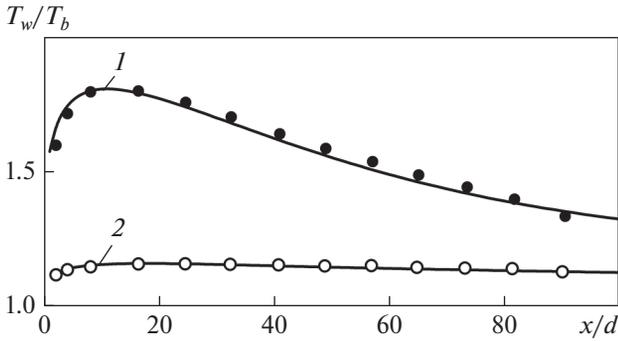


Рис. 4. Изменение относительной температуры стенки T_w/T_b по длине участка обогрева при значениях теплового потока в стенку $q^+ = 0.0032$ (1) и 0.0006 (2) при $Re_0 = (31-32) \times 10^3$ и $Pr = 0.47$. Линии – расчетные данные; точки – экспериментальные данные [15]

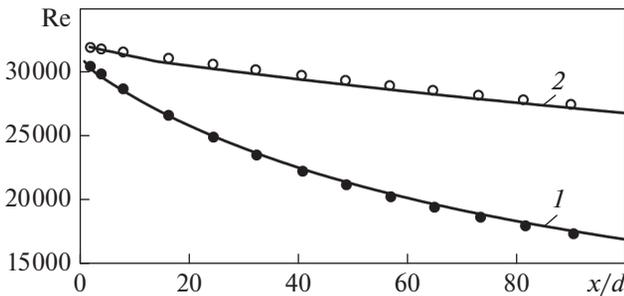


Рис. 5. Изменение числа Рейнольдса Re по длине участка обогрева при значениях теплового потока в стенку $q^+ = 0.0032$ (1) и 0.0006 (2). Обозначения см. рис. 4

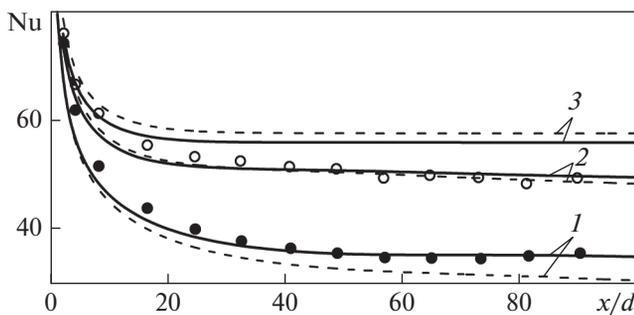


Рис. 6. Изменение числа Нуссельта Nu по длине участка обогрева при значениях теплового потока в стенку $q^+ = 0.0032$ (1), 0.0006 (2) и 10^{-6} (3). Штриховые линии – расчетные данные с использованием гипотезы о постоянстве турбулентного числа Прандтля $Pr_t = 0.85$

На рис. 3 для двух чисел Рейнольдса представлены расчетные зависимости (линии 1, 2) коэффициента аналогии Рейнольдса

$$K_{Re} = \frac{St}{\xi/8} = \frac{Nu}{Re Pr \xi/8}, \quad (14)$$

где St – число Стантона.

Там же для сравнения представлены значения K_{Re} (точки), полученные с использованием экспериментальных данных $Nu(Pr)$ [16] для чисел Рейнольдса 34×10^3 и 84×10^3 и расчетных коэффициентов гидравлического сопротивления $\xi(Re)$, определенных по формуле Блазиуса $\xi = 0.316 Re^{-1/4}$.

На рис. 3 видно, что согласованность расчетных данных с экспериментальными также вполне удовлетворительная. Полученные как при расчете, так и при эксперименте зависимости для коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Прандтля неплохо описываются простым аппроксимационным выражением $K_{Re} = Pr^{-1/3}$ [37].

При существенном подогреве теплоносителя результаты будут зависеть от теплового потока в стенку. Экспериментальные данные [15], полученные для смеси $He + Ar$ ($Pr = 0.47$) и приведенные на рис. 4–6 (точки) для двух значений теплового потока q^+ , различаются в 5 раз и описывают влияние теплового потока на относительную температуру стенки T_w/T_b (см. рис. 4), число Рейнольдса Re (см. рис. 5) и число Нуссельта Nu (см. рис. 6). Расчетное изменение указанных параметров на участке с теплоподводом (линии на рис. 4–6) удовлетворительно согласуется с экспериментом (точки на рис. 4–6) [15].

Можно отметить, что при использовании теплоносителя с постоянными физическими свойствами – относительная температура стенки T_w/T_b близка к 1, число Рейнольдса близко к входному Re_0 , а число Нуссельта (см. рис. 6, линия 3) для теплообмена на участке стабилизации (при $x/d > 50$) близко к определенному по зависимостям Кейса (12) и Петухова (13).

Проницаемая стенка. Влияние отсоса газа

Проведенное в [20] численное исследование влияния отсоса газа на характеристики течения в трубе выявило их немонотонное изменение. При слабом отсосе на стенке j_w^0 профили скорости более наполненные, интенсивность турбулентности в большей части сечения трубы снижается, сначала возрастая на оси и далее убывая по длине трубы.

При значительном увеличении отсоса j_w^0 возрастает интенсивность турбулентности и “вытягиваются” профили скорости, приводя к турбулизации потока. Средняя по сечению скорость потока (число Рейнольдса) существенно падает, а предельная длина отсоса $L_*/d = 1/4 j_w^0$, при которой весь поступающий на вход в трубу расход газа отсасывается через стенку, сокращается.

Экспериментальному исследованию влияния отсоса на теплообмен в трубе при течении воздуха

(Pr = 0.7) посвящена работа [38], в которой опыты проводились в пористой трубе, равномерно нагреваемой электрическим током. Измерялось распределение аксиальной температуры поверхности трубы и радиальной температуры течения. Эксперименты осуществлялись в диапазоне изменения числа Рейнольдса на входе $Re_0 = 10^4 - 10^5$ и интенсивности отсоса на стенке трубы $j_w^0 = 0 - 0.012$. Было установлено, что профиль температуры потока при отсосе существенно деформируется, становясь более крутым у стенки и более пологим у оси трубы.

На рис. 7 для двух чисел Рейнольдса представлены расчетная (линии 1) и экспериментальная [38] (точки 2) зависимости относительного числа Нуссельта Nu/Nu_0 (где Nu_0 – число Nu при $j_w^0 = 0$) от интенсивности отсоса j_w^0 , из которых следует, что число Nu с увеличением отсоса j_w^0 значительно возрастает согласно результатам как расчета, так и эксперимента.

Следует отметить, что и эксперименты [38], и расчеты проводились на рабочем участке очень малой длины Y_2 (см. рис. 1) при $x/d = 16$, поскольку эта длина должна быть меньше предельной длины отсоса $L_*/d = 1/4 j_w^0$ [21] и при $j_w^0 = 0.015$ она составила $L_*/d = 17$.

На рис. 7 видно, что с некоторого значения интенсивности отсоса j_w^0 число Нуссельта меняется линейно по стенке трубы. Это означает, что наступает режим асимптотического отсоса. Такой режим отвечает условию $St = j_w^0$, где $St = Nu/(Re_x Pr)$ – локальные значения чисел Стантона, Нуссельта и Рейнольдса, $j_{wx}^0 = (\rho v)_w / (\rho u)_x$ – локальное значение интенсивности отсоса.

Отношение локального числа Нуссельта Nu к числу Нуссельта при отсутствии отсоса Nu_0 для режима асимптотического отсоса имеет вид

$$\frac{Nu}{Nu_0} = j_w^0 \frac{Re_0 Pr}{Nu_0} \quad (15)$$

Соотношение (15) для чисел Рейнольдса $Re = 9930$ и 102350 представлено на рис. 7 (штриховые линии 3). Как видно, начиная с некоторого значения интенсивности отсоса j_w^0 условие асимптотического отсоса хорошо выполняется согласно результатам расчета (линии 1) и удовлетворительно – по результатам эксперимента [38] (линии и точки 2).

Профили температуры $\Theta = (T - T_w)/(T_b - T_w)$ (рис. 8) с ростом интенсивности отсоса j_w^0 уплощаются, что согласуется с экспериментальными данными [38]. Для непроницаемой пластины

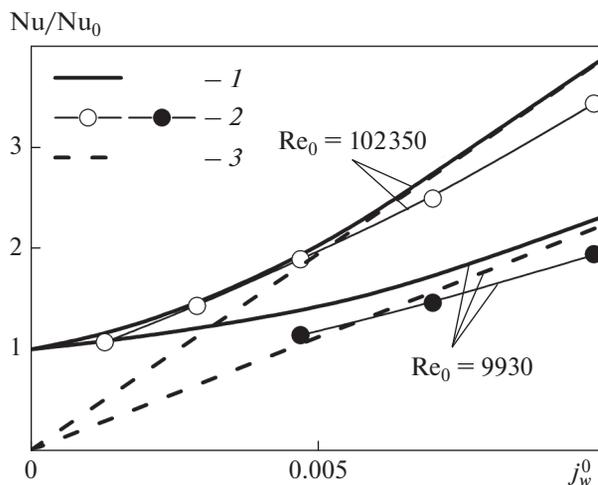


Рис. 7. Зависимость относительного значения числа Нуссельта Nu/Nu_0 при $x/d = 16$ и $Pr = 0.7$ от интенсивности отсоса при значениях числа Рейнольдса $Re_0 = 9930$ и 102350 . Сплошные линии 1 – расчетные данные; линии и точки 2 – экспериментальные данные [39]; штриховые линии 3 соответствуют асимптотическому отсосу (15)

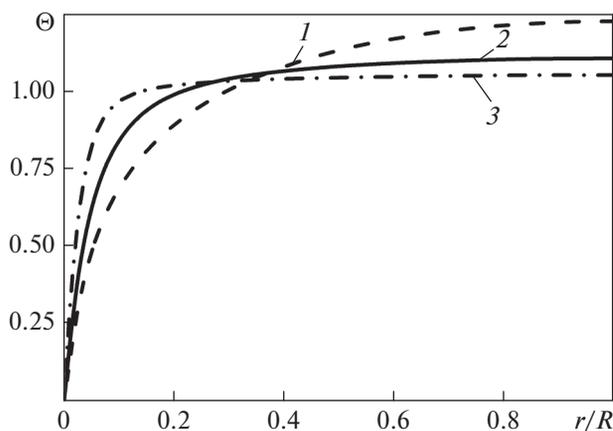


Рис. 8. Расчетные профили температуры Θ по сечению трубы r/R при $x/d = 16$, $Re_0 = 9930$ при интенсивности отсоса $j_w^0 = 0$ (1), 0.005 (2) и 0.010 (3)

профиль температуры (линия 1 на рис. 8) близок к профилю температуры для стабилизированного течения. Определено, что если влияние слабого отсоса ($j_w^0 < 0.005$) на деформацию профилей температуры и скорости качественно одинаково, то при сильном отсосе ($j_w^0 > 0.01$) оно различно, так как профиль скорости, в отличие от профиля температуры, у оси “вытягивается” [20]. Положительный градиент давления, возникающий при сильном отсосе, приводит к нарушению подобия профилей скорости и температуры [19] и,

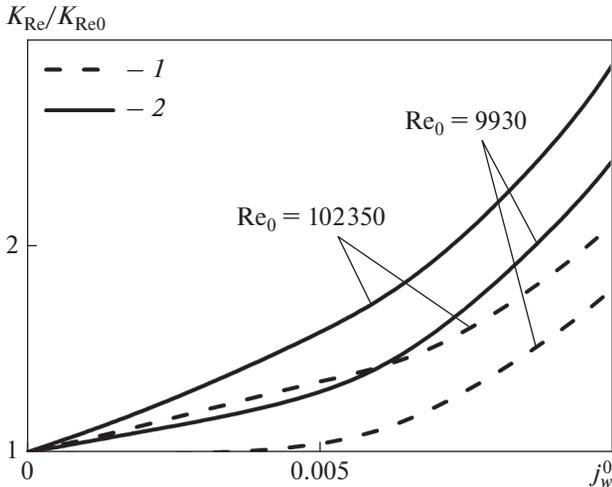


Рис. 9. Зависимость относительного коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re}/K_{Re0} (б) от интенсивности отсоса при значениях числа Рейнольдса $Re_0 = 9930$ и 102350 . Сплошные линии – расчетные данные; штриховые линии соответствуют асимптотическому отсосу (15). Число Pr : 1 – 0.2; 2 – 0.7

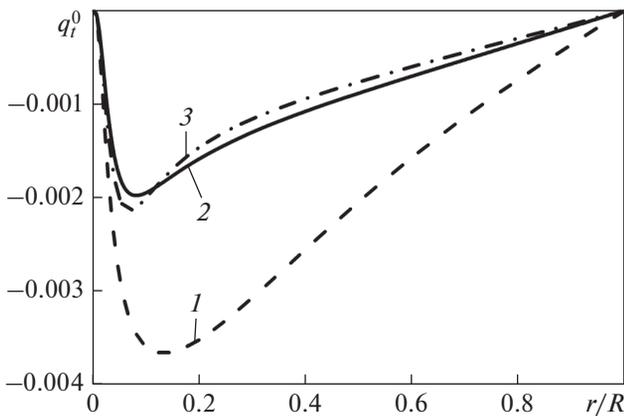


Рис. 10. Расчетные профили турбулентного потока тепла q_t^0 по сечению трубы r/R при $x/d = 16$, $Re_0 = 9930$ при интенсивности отсоса $j_w^0 = 0$ (1), 0.005 (2) и 0.010 (3)

как следствие, к нарушению аналогии Рейнольдса K_{Re} (14), что отражено на рис. 9 (K_{Re0} – значение K_{Re} при $j_w^0 = 0$).

На рис. 10 показано, как влияет интенсивность отсоса на распределение турбулентного потока тепла $q_t^0 = q_t/[c_p u_b (T_w - T_b)]$ по сечению трубы (здесь u_b – среднерасходная скорость). Установлено, что значение q_t^0 , как и интенсивность турбулентности $\varepsilon = \sqrt{E}/u_b$ [20], с ростом интенсивности отсоса изменяется немонотонно.

Турбулентное число Прандтля

В обзоре [31] собраны и проанализированы результаты экспериментов по исследованию влияния нескольких параметров, включая шероховатость, градиент давления, вдув (отсос) газа на стенке, на значение турбулентного числа Прандтля Pr_t (7) для таких теплоносителей, как воздух, вода, масло и жидкие металлы. В общем случае турбулентное число Прандтля является функцией чисел Pr и Re и расстояния от стенки $Pr_t(y^+, Pr, Re)$, где расстояние от стенки $y^+ = y u_* / (\rho/\eta)_w$.

В [39] рассмотрены некоторые модели зависимости $Pr_t(y^+, Pr, Re)$ для бинарных смесей легкого и тяжелого газов на примере пар: $H_2 + Xe$, $He + Xe$, $He + Ar$ с молекулярным числом Прандтля $0.18 < Pr < 0.7$ в диапазоне изменения числа $Re = 3 \times 10^4 - 1 \times 10^5$. Результаты расчетов [39] значений Pr_t носят противоречивый характер, особенно вблизи стенки ($y^+ < 10$).

Прямое численное моделирование течения в канале и трубе с непроницаемыми стенками в работах [40–42] выявило, что при $Pr \geq 2$ и низких числах Re турбулентное число Прандтля Pr_t практически не зависит от значения Pr .

В работе [5] для воздуха при течении в трубе при числе Рейнольдса $Re = 5300$ с использованием DNS в логарифмическом пограничном слое ($y^+ = 50-200$) получено изменение турбулентного числа Pr_t в диапазоне изменения числа Прандтля $Pr = 0.5-1.0$, отличающееся от экспериментально подтвержденного значения $Pr_t = 0.85$ [30].

Такой разброс значений Pr_t в упомянутых экспериментах можно объяснить не очень высокой точностью измерения параметров $\langle u'v' \rangle$ и $\langle v'T' \rangle$, а также существенной погрешностью, возникающей при дифференцировании измеренных профилей скорости и температуры в широком диапазоне расстояний от стенки до оси трубы.

При исследовании более двух десятков измененных профилей температуры в пристеночных турбулентных течениях для некоторых жидких теплоносителей [30] ($0.02 \leq Pr \leq 100$) было выявлено, что турбулентное число Прандтля Pr_t не зависит от Pr и группируется около среднего значения $Pr_t = 0.85$. Данный результат подтверждается проведенным авторами настоящей работы изучением зависимости Pr_t от Pr в пограничном слое на проницаемой пластине с градиентом давления для воздуха, смеси $He + Xe$, ртути, воды и трансформаторного масла [32, 34].

В настоящей работе определено влияние молекулярного числа Прандтля Pr на турбулентное число Прандтля Pr_t для трех газовых теплоносителей с постоянными физическими свойствами ($q^+ = 10^{-6}$): воздуха и газовых смесей $He + Ar$ и $H_2 + Xe$ ($Pr = 0.71, 0.42$ и 0.18 соответственно).

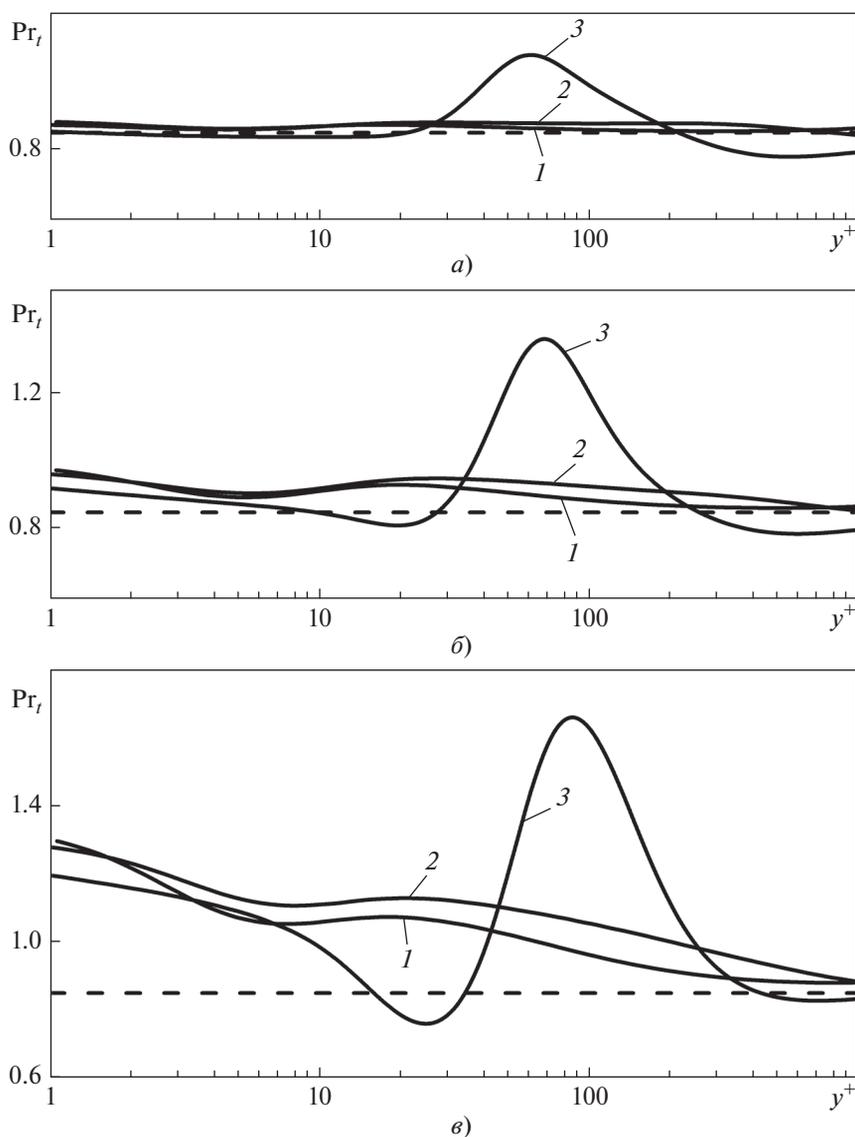


Рис. 11. Влияние молекулярного числа Прандтля Pr и интенсивности отсоса j_w^0 на турбулентное число Прандтля $Pr_t(y^+)$.
 Число Pr : а – 0.71, б – 0.42, в – 0.18.
 j_w^0 : 1 – 0; 2 – 0.002; 3 – 0.004

На рис. 11 представлено изменение Pr_t по сечению трубы при $x/d = 50$ для $Re = 10^5$. Для газовых смесей с $Pr = 0.18$ и 0.42 при отсутствии отсоса ($j_w^0 = 0$, линии 1) чем ниже значение числа Прандтля Pr , тем выше значение Pr_t в пристеночной области. Для воздуха с $Pr = 0.71$ (рис. 11, а, линия 1) изменение Pr_t по сечению трубы слабое и его значение близко к $Pr_t = 0.85$, определенного в [30] (штриховая линия).

Исследование влияния отсоса газа проведено для тех же газовых смесей при двух значениях интенсивности отсоса $j_w^0 = 0.002$ (линии 2, на рис. 11) и $j_w^0 = 0.004$ (линии 3, на рис. 11).

На рис. 11 видно, что при малом отсосе ($j_w^0 = 0.002$, линии 2) его влияние на число Pr_t для воздуха и газовых смесей слабое. С увеличением интенсивности отсоса ($j_w^0 = 0.004$, линии 3) число Pr_t в области значений $y^+ = 20 - 200$ возрастает и тем сильнее, чем меньше молекулярное число Pr . Причиной этого роста является деформация профилей скорости $u^+ = u/u_*$ и температуры $T^+ = (T_w - T)/T_*$ (где u_* , T_* – динамические скорость и температура), которые с ростом j_w^0 в логарифмической области уплощаются (рис. 12, а), так что отношение

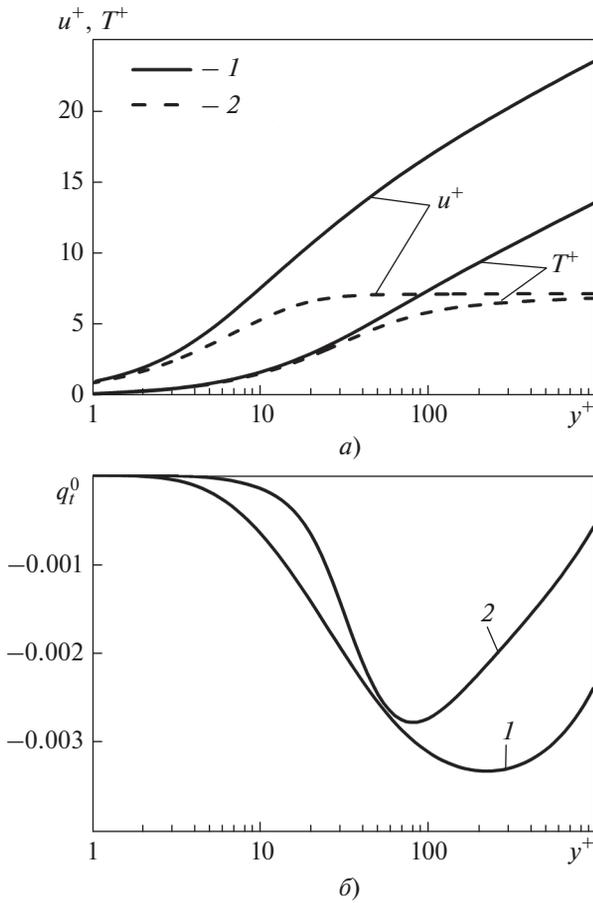


Рис. 12. Влияние интенсивности отсоса j_w^0 на профили скорости $u^+(y^+)$ и температуры $T^+(y^+)$ при $Pr = 0.18$, $x/d = 50$, $Re_0 = 102\ 350$ (а), а также на турбулентный поток тепла $q_t^0(y^+)$ (б).

Значения j_w^0 : 1 – 0; 2 – 0.004

du/dr , входящее в знаменатель выражения для Pr_t (7), становится очень малым и число Pr_t возрастает, несмотря на повышение турбулентного потока тепла q_t^0 в этой области (рис. 12, б). При меньшем значении интенсивности отсоса ($j_w^0 = 0.002$) увеличение Pr_t в логарифмической области (см. рис. 11, линии 2) не такое заметное.

Приведенные результаты получены при использовании уравнения для турбулентного потока тепла q_t (8), а для нахождения турбулентного числа Прандтля Pr_t использовалось выражение (7). В связи с этим необходимо рассмотреть, как влияет переменность Pr_t на характеристики теплообмена, например на число Нуссельта.

В табл. 3 представлены значения числа Нуссельта Nu , полученные при расчетах для двух вариантов: в предположении постоянства турбулентного числа Прандтля $Pr_t = 0.85$ и в предположении $Pr_t = var$, т.е. с использованием уравнения для турбулентного потока тепла (8).

Как следует из табл. 3, различие значений числа Nu для двух рассмотренных вариантов возрастает с уменьшением молекулярного числа Прандтля Pr и увеличением интенсивности отсоса j_w^0 , не превышая 8% при $j_w^0 = 0$ для $Pr = 0.18$. Если в экспериментах точность определения числа Nu выше, то предположение о постоянстве турбулентного числа Pr_t нельзя считать оправданным.

При анализе результатов, приведенных в табл. 3, следует иметь в виду, что число Re при наличии отсоса уменьшается по длине трубы начиная со значения $Re_0 = 10^5$ на входе и до $Re_{50} = 0.6 \times 10^5$ для $j_w^0 = 0.002$ и $Re_{50} = 0.2 \times 10^5$ для $j_w^0 = 0.004$ при $x/d = 50$.

В заключение следует отметить: поскольку существенный нагрев теплоносителя приводит к значительному изменению его теплофизических свойств, то при их постоянстве изменение турбулентного числа Pr_t будет заметно отличаться от изменения Pr .

На рис. 13 показано, как изменяется турбулентное число Pr_t по сечению трубы в условиях эксперимента [15] ($Re = 32 \times 10^3$, $Pr = 0.47$) при тех же значениях теплового потока в стенку q^+ . Как видно на рис. 13, в пристеночной области значения Pr_t (линии 1, 2) заметно ниже, чем при постоянных физических свойствах (линия 3), что сказывается на значениях числа Nu . Это влияние отражено на рис. 6, где результаты расчета с постоянным числом $Pr_t = 0.85$ (штриховые линии 3) отличаются от результатов, полученных при рас-

Таблица 3. Значения чисел Нуссельта $Nu(j_w^0, Pr)$ при увеличении интенсивности отсоса j_w^0 от 0 до 0.004 и $x/d = 50$

Число Прандтля	$j_w^0(Re_{50})$								
	0 (10^5)			0.002 (0.6×10^5)			0.004 (0.2×10^5)		
Pr	0.71	0.42	0.18	0.71	0.42	0.18	0.71	0.42	0.18
$Pr_t = 0.85$	180.7	126.9	72.8	177.6	115.0	60.4	284.3	171.8	79.0
$Pr_t = var$	178.9	123.0	67.67	176.3	112.3	56.9	283.7	170.1	82.5

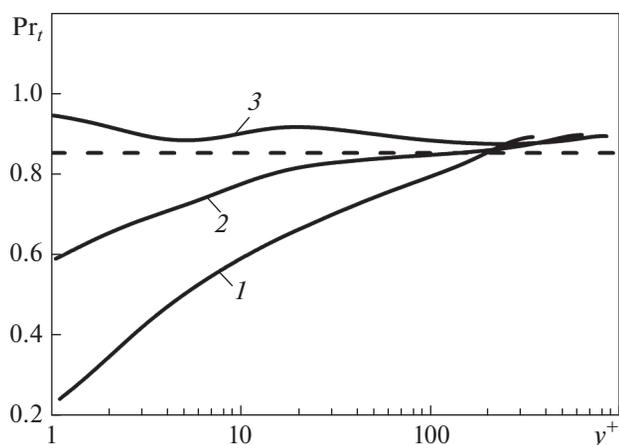


Рис. 13. Влияние переменности физических свойств газа $Pr = 0.47$, $x/d = 100$, $f_w^0 = 0$, $Re = 32 \times 10^3$ на турбулентное число Прандтля $Pr_t(y^+)$.

Значения q^+ : 1 – 0.0032; 2 – 0.0006; 3 – 0.2×10^{-6} . Штриховая линия – расчетные данные при постоянном турбулентном числе Прандтля $Pr_t = 0.85$

четах с использованием уравнения для турбулентного потока тепла, например для $q^+ = 0.32 \times 10^{-2}$ (линии 1) при $x/d > 50$ более чем на 10%.

ВЫВОДЫ

1. Сформулирована методика моделирования внутренних течений в канале с проницаемыми стенками при наличии теплоподвода к стенке. В качестве модели турбулентности использована трехпараметрическая дифференциальная модель сдвиговой турбулентности, обобщенная на течения с теплообменом благодаря введению дополнительного уравнения для турбулентного потока тепла. Проведенное с использованием данной методики исследование теплообмена в трубе как с непроницаемыми, так и с проницаемыми стенками позволило установить зависимости между расчетными данными и экспериментальными.

2. В результате расчетов влияния числа Прандтля на теплообмен в трубе с непроницаемыми стенками для теплоносителя с постоянными физическими свойствами установлено, что полученные данные согласуются с экспериментальными и эмпирическими зависимостями Кейса и Петухова для числа Нуссельта в диапазоне чисел Прандтля 0.2–0.7. При значительном нагреве теплоносителя эти числа будут зависеть от теплового потока в стенку. А по экспериментальным данным, полученным для смеси $He + Ar$ ($Pr = 0.47$), и согласующимся с ними результатам расчетов определено существенное влияние теплового потока на температуру стенки, числа Рейнольдса и Нуссельта.

3. Увеличение интенсивности отсоса приводит к существенному росту числа Нуссельта согласно как экспериментальным, так и расчетным данным, соответствие которых можно считать удовлетворительным. Профили температуры с ростом интенсивности отсоса уплощаются, однако если влияние слабого отсоса на деформацию профилей температуры и скорости качественно одинаково, то при сильном отсосе оно различно. Положительный градиент давления, возникающий при сильном отсосе, приводит к нарушению подобия профилей скорости и температуры и, как следствие, к нарушению аналогии Рейнольдса. Профили турбулентного потока тепла по сечению трубы, как и энергии турбулентности, с ростом интенсивности отсоса изменяются немонотонно.

4. При отсутствии отсоса с уменьшением числа Pr значение Pr_t возрастает в пристеночной области и тем сильнее, чем меньше число Pr . Для воздуха число Pr_t слабо меняется по сечению трубы и близко к значению $Pr_t = 0.85$, обычно используемому в расчетах теплообмена. При слабом отсосе влияние его на число Pr_t для воздуха и газовых смесей слабое. С повышением интенсивности отсоса число Pr_t в логарифмической области возрастает и тем сильнее, чем меньше молекулярное число Pr . Причиной такого роста числа Pr_t является существенная деформация профилей скорости и температуры. Исследование влияния переменности Pr_t на характеристики теплообмена показало, что отличие числа Nu , определенного в предположении постоянства турбулентного числа Прандтля $Pr_t = 0.85$, от результатов, полученных при расчетах с использованием уравнения для турбулентного потока тепла, возрастает с уменьшением молекулярного числа Pr и с увеличением интенсивности отсоса. Так, для $Pr = 0.18$ это отличие составляет 8%, а при непостоянстве теплофизических свойств теплоносителя, вызванном существенным нагревом, отличие возрастает до 10%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cebeci T.** Analysis of turbulent flows with computer programs. 3rd ed. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2013. <https://doi.org/10.1016/C2012-0-02722-6>
2. **Kays W.M.** Convective heat and mass transfer. 4th ed. N.Y.: McGraw-Hill Education, 2004.
3. **Argyropoulos C.D., Markatos N.C.** Recent advances on the numerical modelling of turbulent flows // Appl. Math. Modell. 2015. V. 39. No. 2. P. 693–732. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.07.001>
4. **Large eddy simulation of turbulent heat transfer in a non-isothermal channel: Effects of temperature-dependent viscosity and thermal conductivity / L. Wang, J. Liu, S. Hussain, B. Sundén // Int. J. Therm. Sci.**

2019. V. 146. P. 106094.
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2019.106094>
5. **Piller M.** Direct numerical simulation of turbulent forced convection in a pipe // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 2005. V. 49. No. 6. P. 583–602.
<https://doi.org/10.1002/flid.994>
 6. **Ould-Rouiss M., Bousbai M., Mazouz A.** Large eddy simulation of turbulent heat transfer in pipe flows with respect to Reynolds and Prandtl number effects // *Acta Mech*. 2013. V. 224. P. 1133–1155.
<https://doi.org/10.1007/s00707-012-0796-8>
 7. **Chung S.Y., Sung H.J.** Direct numerical simulation of turbulent concentric annular pipe flow. Part 2: Heat transfer // *Int. J. Heat Fluid Flow*. 2003. V. 24. No. 3. P. 399–411.
[https://doi.org/10.1016/S0142-727X\(03\)00017-1](https://doi.org/10.1016/S0142-727X(03)00017-1)
 8. **Ould-Rouiss M., Redjem-Saad L., Lauriat G.** Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in annuli: Effect of heat flux ratio // *Int. J. Heat Fluid Flow*. 2009. V. 30. No. 4. P. 579–589.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2009.02.018>
 9. **Effect of Prandtl number on the turbulent thermal field in annular pipe flow / M. Ould-Rouiss, L. Redjem-Saad, G. Lauriat, A. Mazouz** // *Int. Commun. Heat Mass Transfer*. 2010. V. 37. No. 8. P. 958–963.
<https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.06.027>
 10. **Boersma B.J.** Direct numerical simulation of turbulent pipe flow up to a Reynolds number of 61000 // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2011. V. 318. P. 042045.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/318/4/042045>
 11. **El-Genk M.S., Tournier J.M.** On the use of noble gases and binary mixtures as reactor coolants and CBC working fluids // *Energy Convers. Manage.* 2008. V. 49. No. 7. P. 1882–1891.
<https://doi.org/10.1016/j.enconman.2007.08.017>
 12. **Tournier J.M.P., El-Genk M.S.** Properties of noble gases and binary mixtures for closed Brayton cycle applications // *Energy Convers. Manage.* 2008. V. 49. No. 3. P. 469–492.
<https://doi.org/10.1016/j.enconman.2007.06.050>
 13. **Experimental investigation of energy (temperature) separation of a high-velocity air flow in a cylindrical channel with a permeable wall / A.I. Leontiev, A.G. Zditovets, N.A. Kiselev, Y.A. Vinogradov, M.M. Strongin** // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2019. V. 105. P. 206–215.
<https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2019.04.002>
 14. **Исследование теплообменных поверхностей для энергетических установок космического назначения / А.Е. Баранов, А.Е. Белов, Д.Н. Ильмов, Н.Н. Казанцева, Ю.Н. Мамонтов, А.С. Скороходов** // *Теплоэнергетика*. 2018. № 7. С. 76–85.
<https://doi.org/10.1134/S0040363618070019>
 15. **Pickett P.E., Taylor M.F., McEligot D.M.** Heated turbulent flow of helium-argon mixtures in tubes // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1979. V. 22. No 5. P. 705–719.
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(79\)90118-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(79)90118-2)
 16. **Taylor M.F., Bauer K.E., McEligot D.M.** Internal forced convection to low-Prandtl-number gas mixtures // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1988. V. 31. No 1. P. 13–25.
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(88\)90218-9](https://doi.org/10.1016/0017-9310(88)90218-9)
 17. **Petukhov B.S.** Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Adv. Heat Transfer*. 1970. V. 6. P. 503–564.
[https://doi.org/10.1016/S0065-2717\(08\)70153-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70153-9)
 18. **Gnielinski V.** On heat transfer in tubes // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2013. V. 63. P. 134–140.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.04.015>
 19. **Ерошенко В.М., Зайчик Л.И.** Гидродинамика и теплообмен на проницаемых поверхностях. М.: Наука, 1984.
 20. **Леонтьев А.И., Лущик В.Г., Макарова М.С.** Численное исследование течения в трубе с отсосом газа через проницаемые стенки // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2014. № 3. С. 74–81.
 21. **Лущик В.Г., Макарова М.С., Решмин А.И.** Ламинаризация потока при течении с теплообменом в плоском канале с конфузуром // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2019. № 1. С. 68–77.
 22. **Lushchik V.G., Makarova M.S.** Numerical simulation of turbulent flow and heat transfer in tube under injection of gas through permeable walls // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. V. 891. P. 012066.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/891/1/012066>
 23. **Лущик В.Г., Макарова М.С., Решмин А.И.** Численное моделирование управления турбулентным потоком на входе в трубу с целью ламинаризации течения // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2023. № 1. С. 81–96.
 24. **Решмин А.И., Трифионов В.В., Тепловодский С.Х.** Круглый короткий диффузор с большой степенью расширения и проницаемой перегородкой // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2012. № 5. С. 32–39.
 25. **Leont'ev A.I., Lushchik V.G., Makarova M.S.** Heat and mass transfer in a tube with permeable walls: influence of suction and the Prandtl number // *Proc. of the 8th Intern. Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*. Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, Begell House Inc., USA, 15–18 Sept. 2015. P. 145–148.
 26. **Kinney R.B., Sparrow E.M.** Turbulent flow, heat transfer and mass transfer in a tube with surface suction // *ASME. J. Heat Transfer*. 1970. V. 92. No. 1. P. 117–124.
<https://doi.org/10.1115/1.3449600>
 27. **Cebeci T., Cousteix J.** Modeling and computation of boundary-layer flows. Long Beach, CA, USA, Horizons Publ. Inc., 2005.
 28. **Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.** Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1978. № 3. С. 13–25.
 29. **Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.** Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1986. № 2. С. 40–52.
 30. **Kader B.A., Yaglom A.M.** Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1972. V. 15. No 12. P. 2329–2351.
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(72\)90131-7](https://doi.org/10.1016/0017-9310(72)90131-7)
 31. **Kays W.M.** Turbulent Prandtl number – where are we? // *ASME. J. Heat Transfer*. 1994. V. 116. No 2. P. 284–295.
<https://doi.org/10.1115/1.2911398>
 32. **Лущик В.Г., Макарова М.С.** Турбулентное число Прандтля в пограничном слое на пластине: влияние молекулярного числа Прандтля, вдува (отсоса)

- и продольного градиента давления // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25. № 2. С. 177–190.
33. Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Уравнение переноса для турбулентного потока тепла. Расчет теплообмена в трубе // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 6. С. 42–50.
 34. Leontiev A.I., Lushchik V.G., Makarova M.S. Study of effect of molecular Prandtl number, transpiration, and longitudinal pressure gradient on flow and heat transfer characteristics in boundary layers // Comput. Therm. Sci. 2019. V. 11. P. 41–49.
<https://doi.org/10.1615/ComputThermalSci.2018024497>
 35. Лущик В.Г., Якубенко А.Е. Сравнительный анализ моделей турбулентности для расчета пристенного пограничного слоя // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 1. С. 44–58.
 36. Nikitin N.V., Pavel'ev A.A. Turbulent flow in a channel with permeable walls. Direct numerical simulation and results of three-parameter model // Fluid Dynamics. 1998. V. 33. P. 826–832.
<https://doi.org/10.1007/BF02698650>
 37. Лущик В.Г., Макарова М.С. Численное исследование влияния числа Прандтля на коэффициенты восстановления температуры и аналогии Рейнольдса в пограничном слое на пластине // ТВТ. 2016. Т. 54. № 3. С. 401–407.
 38. Aggarwal M.A., Hollingsworth M.A. Heat transfer for turbulent flow with suction in a porous tube // Int. J. Heat Mass Transfer. 1973. V. 16. No. 3. P. 591–609.
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(73\)90226-3](https://doi.org/10.1016/0017-9310(73)90226-3)
 39. McEligot D.M., Taylor M.F. The turbulent Prandtl number in the near-wall region for low-Prandtl-number gas mixtures // Int. J. Heat Mass Transfer. 1996. V. 39. No. 6. P. 1287–1295.
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(95\)00146-8](https://doi.org/10.1016/0017-9310(95)00146-8)
 40. Redjem-Saad L., Ould-Rouiss M., Lauriat G. Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in pipe flows: Effect of Prandtl number // Int. J. Heat Fluid Flow. 2007. V. 28. P. 847–861.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2007.02.003>
 41. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid / H. Kawamura, K. Ohsaka, H. Abe, K. Yamamoto // Int. J. Heat Fluid Flow. 1998. V. 19. No 5. P. 482–491.
[https://doi.org/10.1016/S0142-727X\(98\)10026-7](https://doi.org/10.1016/S0142-727X(98)10026-7)
 42. Kawamura H., Abe H., Matsuo Y. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects // Int. J. Heat Fluid Flow. 1999. V. 20. No 3. P. 196–207.
[https://doi.org/10.1016/S0142-727X\(99\)00014-4](https://doi.org/10.1016/S0142-727X(99)00014-4)

Numerical Investigation of the Influence of the Coolant's Prandtl Molecular Numbers and the Permeability of the Pipe Wall on Turbulent Heat Transfer

V. G. Lushchik^a, M. S. Makarova^a, and S. S. Popovich^{a, *}

^a *Research Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, 119192 Russia*

^{*}*e-mail: pss@imec.msu.ru*

Abstract—A technique for modeling turbulent flow in a channel with impermeable and permeable walls in the presence of heat supply to the wall is proposed. To close the equations of the boundary layer, a three-parameter differential model of shear turbulence is used, which is supplemented by a transfer equation for a turbulent heat flux. Calculations are carried out for a developed turbulent flow in a round pipe with impermeable and permeable walls for air and binary gas mixtures with a low molecular Prandtl number with parameters corresponding to those in earlier experiments. The results of studies on the effect of the Prandtl number on heat transfer in a pipe with impermeable walls for a coolant with constant physical properties are consistent with the experimental data and empirical dependences of Case and Petukhov for the Nusselt number in the range of Prandtl numbers of 0.2–0.7. It is shown that a positive pressure gradient arising in a pipe under strong gas suction leads to a violation of the similarity of the velocity and temperature profiles and, as a consequence, to a violation of the Reynolds analogy. The use of the transport equation for a turbulent heat flux makes it possible to take into account the complex dependence of the turbulent Prandtl number on the molecular Prandtl number in the viscous sublayer and in the logarithmic boundary layer. The influence of the variability of thermophysical properties and the turbulent Prandtl number on the characteristics of heat transfer in a pipe is estimated. Thus, the difference between the Nu number determined under the assumption of a constant turbulent Prandtl number and the results obtained in calculations using the equation for turbulent heat flow increases with a decrease in the molecular Prandtl number and an increase in the intensity of gas suction.

Keywords: flow in a pipe, heat transfer, turbulence model, permeable wall, gas suction, molecular Prandtl number, pressure gradient, Reynolds analogy coefficient