ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКА, 2024, № 1, с. 41–49

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ЭНЕРГЕТИКИ

РАСЧЕТ ЦЕНОВОГО ПОЛЯ НА ТЕПЛОВУЮ ЭНЕРГИЮ НА ОСНОВЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ТЕПЛОСНАБЖАЮЩИХ СИСТЕМАХ

В. А. Стенников[a], О. В. Хамисов[a], А. В. Пеньковский[a, *], А. А. Кравец[a]

[a] *Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева (СО РАН), ул. Лермонтова, д. 130, г. Иркутск, 664033 Россия*

**e-mail: penkoffsky@isem.irk.ru*

Поступила в редакцию 12.03.2023 г.
После доработки 11.05.2023 г.
Принята к публикации 01.06.2023 г.

Предложен метод расчета дифференцированных цен на тепловую энергию по узлам теплоснабжающей системы (ТСС) на основе экстремальной экономической постановки задачи по поиску оптимального потокораспределения в тепловых сетях с множеством источников тепловой энергии. Данная задача сводится к нахождению минимальных суммарных затрат, связанных с производством и транспортировкой тепловой энергии, соблюдением материальных балансов в узлах тепловой сети (первый закон Кирхгофа) и ограничениями на производительности источников тепловой энергии. Решение данной задачи основано на использовании неопределенных множителей Лагранжа. Анализ двойственности исходной задачи оптимизации показал, что двойственные переменные (множители Лагранжа) при балансовых ограничениях представляют собой не что иное, как узловые цены на тепловую энергию, а полученное в вычислительном процессе оптимальное потокораспределение в тепловой сети позволяет сформировать ценовое поле по системе в целом. При этом показано, что цены на тепловую энергию от источников тепла до конечных потребителей растут в направлении установившегося оптимального потокораспределения в тепловой сети. При таком подходе к решению задачи можно также определить оптимальные зоны действия и уровни загрузок источников тепла с учетом их затратных характеристик и заданных физико-технических и экономических показателей тепловой сети. Полученные в результате расчетов узловые цены по своей экономической сущности являются маржинальными, т.е. ценами, основанными на вычислении предельно низких и предельно высоких затрат на производство и транспортировку дополнительной единицы тепловой энергии.

Ключевые слова: теплоснабжающие системы, задача оптимизации, оптимальное потокораспределение, неопределенные множители Лагранжа, узловые цены

DOI: 10.56304/S0040363624010077

Поиск оптимального потокораспределения в теплоснабжающих системах традиционно остается в центре внимания специалистов-теплоэнергетиков. Оптимальное потокораспределение представляет собой установившийся режим в ТСС, полученный в процессе решения либо задачи оптимизации на минимум суммарной энергии, затрачиваемой на транспортировку тепловой энергии, либо системы линейных и нелинейных уравнений, включающих в себя первый и второй законы Кирхгофа, а также замыкающие соотношения [1].

Изначально расчет оптимального потокораспределения в гидравлических цепях (ГЦ) в экстремальной энергетической постановке был предложен В.Я. Хасилевым [2]. Ориентируясь на теорему Максвелла о токораспределении в пассивной электрической цепи [3] и используя термины из теории по гидравлике, ставшие основой теории гидравлических цепей, Максвелл предложил задачу оптимизации поиска установившегося режима в ГЦ в виде задачи по определению минимума суммарной кинетической энергии, затрачиваемой на движение жидкости в изолированной системе, при соблюдении материального баланса в узлах ГЦ [1, 2]. Для поиска оптимального решения данной экстремальной задачи использовался метод неопределенных множителей Лагранжа [4]. Анализ результатов установившегося режима, проведенный двумя способами (на основе неопределенных множителей Лагранжа в задаче оптимизации и с помощью решения системы линейных и нелинейных уравнений), показал их эквивалентность, а рассчитанные неопределенные множители Лагранжа с точностью до знака совпали с узловыми давлениями в ГЦ [2]. Строгое математическое доказательство равнозначности двух подходов было получено А.П. Меренковым на основе условий двойственности для задачи на условный экстремум, а сами выведенные соотношения двойственности выражали закон сохранения энергии для ГЦ в целом [5].

Строго говоря, экстремальная постановка задачи поиска оптимального потокораспределения в ТСС относится к классу транспортных задач, и нередко ее отождествляют с сетевой потоковой моделью [6]. Применение неопределенных множителей Лагранжа для решения транспортной задачи в экономической постановке было предложено Л.В. Канторовичем. В [7] он охарактеризовал их как разрешающие множители, а далее в [8] – как объективно обусловленные оценки, т.е. узловые цены, которые обеспечивают наиболее эффективное использование ресурсов.

Применительно к ТСС оценка узловых цен для конечных потребителей впервые была рассмотрена в работе [9]. В ней на основе теплогидравлического моделирования (аналог методики расчета температурного поля в тепловой сети [10]) были получены цены на тепловую энергию по отдельным узлам и потребителям в ТСС с учетом физико-технических особенностей и ограничений рассматриваемой системы. В качестве экономического критерия выступали суммарные затраты по теплоснабжающей системе с учетом нормативной доли доходности (метод ценообразования “Затраты +”). При таком подходе к расчету узловых цен на современном этапе развития ТСС не учитывается специфика развития рыночных отношений между поставщиками и потребителями тепловой энергии, построенных на экономических законах спроса и предложения.

Применение сетевой потоковой модели для решения задач технико-экономического обоснования решений по развитию ТСС было предложено в [6]. Автором была сформулирована задача оптимизации поиска потока минимальной стоимости транспортировки тепловой энергии в тепловой сети. Анализ двойственности задачи оптимизации позволил интерпретировать множители Лагранжа как потенциал вершин или узловые числа, а с экономической точки зрения – как стоимость транспортировки тепловой энергии до каждого конкретного узла ТСС. В предложенной задаче не учитывались затраты, связанные с производством тепловой энергии источниками тепла, что не позволило адекватно рассчитать узловые цены на тепловую энергию (включая стоимость производства и транспортировки тепловой энергии) для конечных потребителей.

Для решения задачи оптимизации совместной работы источников тепловой энергии авторы [11] предложили математическую модель в виде задачи оптимизации по критерию минимума суммарных затрат на производство тепловой энергии всеми источниками, работающими на единые тепловые сети с учетом ограничений по их производительности. Ввиду того что ограничения в данной постановке задачи являются линейными, для поиска ее оптимального решения был использован метод неопределенных множителей Лагранжа. Они были получены в ходе вычисления и представляют собой предельные издержки, т.е. затраты на производство дополнительной единицы тепловой энергии, а по своей сути – цену дополнительно произведенной тепловой энергии. Данная постановка отражает частичное решение задачи по определению узловых цен только для источников тепла и не позволяет получить узловые цены для ТСС в целом.

Поиск узловых цен для конечных потребителей тепловой энергии в задаче нахождения оптимального потокораспределения в ТСС должен опираться на суммарные затраты, связанные с производством и транспортировкой тепловой энергии, а также на физико-технические ограничения ТСС.

Следует отметить, что подход на основе множителей Лагранжа был впервые применен для оптимизации электроэнергетических систем (ЭЭС) [12] в 70-х годах прошлого столетия в СССР. С использованием экстремальной задачи поиска оптимальных режимов сложных ЭСС были получены оценки именно узловых показателей стоимости электроэнергии, которые интерпретировались как теневые цены и позволяли сделать выводы об эффективности функционирования ЭЭС с учетом дальности передачи электрической энергии и ее потерь при транспортировке конечному потребителю. Фактически с помощью данного подхода можно определять эффективные зоны действия существующих источников электрической энергии и формировать оптимальные направления развития ЭЭС с учетом роста перспективных нагрузок и рационального размещения новых электроэнегетических мощностей [13, 14].

Это направление получило развитие также и за рубежом [15] и продолжает оставаться эффективным инструментом при решении задач функционирования и развития ЭЭС. Применительно к моделированию оптового рынка электрической энергии такой подход остается незаменимым и востребованным как в России, так и в мировой практике [14, 16].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ТСС

При математическом моделировании ТСС нужно исходить из того, что она моделируется гидравлической цепью, представляющей собой ориентированный граф, состоящий из m узлов и n ветвей (дуг). Данная структура ГЦ описывается полной матрицей соединений (инцидентности) $\mathbf{A}$, в которой число строк совпадает с числом узлов, а число столбцов – с числом ветвей.

Элементы a_{ji} матрицы $\mathbf{A}$ определяются следующими условиями:

$$a_{ji} = \begin{cases} 0, \text{ если ветвь } i \text{ не имеет связи с узлом } j; \\ +1, \text{ если ветвь } i \text{ исходит из узла } j; \\ -1, \text{ если ветвь } i \text{ входит в узел } j. \end{cases} \quad (1)$$

Гидравлическая цепь представляет собой совокупность упорядоченных множеств: множества узлов $J = \{j\colon j = 1,\ldots,m\}$, состоящего из подмножеств источников тепла (ИТ) $J_{\text{ИТ}}$, потребителей $J_{\text{п}}$, простых узлов разветвления на схеме J_0 и множества $I = \{i\colon i = 1,\ldots,n\}$, отображающего заданные попарные связи между узлами.

Расчет узловых цен на тепловую энергию основан на использовании условий оптимальности для задачи поиска оптимального потокораспределения в ТСС и, прежде всего, ее двойственных переменных. Чтобы перейти к определению узловых цен на тепловую энергию, достаточно сформулировать задачу нахождения оптимального потокораспределения в ТСС по экономическому критерию, а именно как поиск минимальных суммарных затрат на производство и транспортировку тепловой энергии в ТСС:

$$Z(Q^{\text{ИТ}}, \mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum_{j=J_{\text{ИТ}}} Z_j^{\text{ИТ}}(Q_j^{\text{ИТ}}) + Z^{\text{ТС}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \to \min; \quad (2)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Q}; \quad (3)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{SXx}; \quad (4)$$

$$0 \le Q_j^{\text{ИТ}} \le Q_{j\max}^{\text{ИТ}}, \quad j \in J_{\text{ит}}, \quad (5)$$

где $Z(Q^{\text{ИТ}}, \mathbf{x}, \mathbf{h})$ – суммарные затраты на производство и транспортировку тепловой энергии потребителям, руб.; $Z_j^{\text{ИТ}}(Q_j^{\text{ИТ}})$ – затраты на производство тепловой энергии j-м источником тепла, руб.; $Z^{\text{ТС}}(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ – затраты на транспортировку тепловой энергии по тепловым сетям, руб.; $\mathbf{x}(x_1,\ldots,x_n)^{\text{т}}$, $\mathbf{Q}(Q_1,\ldots,Q_m)^{\text{т}}$ – вектор расходов тепловой энергии на ветвях гидравлической цепи и в ее узлах соответственно, т/ч; компоненты вектора расходов: $Q_j^{\text{ИТ}} \ge 0$, $j \in J_{\text{ИТ}}$ – переменные (искомые) величины, $Q_j^{\text{п}} \le 0$, $j \in J_{\text{п}}$ – заданные константы; $Q_j^{\text{ИТ}}$, $j \in J_{\text{ИТ}}$ – текущая нагрузка источника тепла; $Q_j^{\text{п}}$ – нагрузка потребителя, $j \in J_{\text{п}}$; $\mathbf{h}(h_1,\ldots,h_n)^{\text{т}}$ – вектор потерь давления на ветвях ГЦ, Па; $\mathbf{S} = \operatorname{diag}(s_1,\ldots,s_n)$ – диагональная матрица гидравлических сопротивлений, м · ч^2/т^2; $Q_{j\max}^{\text{ИТ}}$ – установленная мощность источника j; $\mathbf{X} = \operatorname{diag}(|x_1|,\ldots,|x_n|)$ – диагональная матрица модулей расходов тепловой энергии на ветвях, т/ч.

В общем случае затраты на производство тепловой энергии источниками, руб., моделируются квадратичной зависимостью относительно объемов производства ими тепловой энергии [17–19]:

$$Z_j^{\text{ИТ}}(Q_j^{\text{ИТ}}) = \alpha_j \left(Q_j^{\text{ИТ}}\right)^2 + \beta_j Q_j^{\text{ИТ}} + \gamma_j, \quad j \in J_{\text{ИТ}}, \quad (6)$$

где $\alpha_j > 0$, руб/(ГДж/ч)^2, $\beta_j > 0$, руб/(ГДж/ч), $\gamma_i > 0$, руб. – коэффициенты аппроксимации затратной характеристики ИТ.

Так как коэффициенты α_j, β_j, γ_i положительны, каждая функция затрат представляет собой сильно выпуклую, монотонно возрастающую функцию, принимающую положительные значения при $Q_j^{\text{ИТ}} \ge 0$.

Затраты на тепловые сети, руб., определяются по следующей зависимости [1, 19]:

$$Z^{\text{ТС}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = F_1 + F_2 \sum_{i \in I} (x_i h_i), \quad (7)$$

где $F_1 = n_{\text{г}}^{-1} f_{\text{c}} \sum_{i \in I} \left[\left(g_i + b_i \chi_i^{0.19u_i} s_i^{-0.19u_i} l_i^{0.19u_i} \right) l_i \right]$ – условно-постоянные затраты, руб.; $n_{\text{г}}$ – годовое число часов работы насосной установки, ч/год; $f_{\text{c}} = 0.075$ – доля условно-постоянных затрат на содержание тепловой сети; g_i руб/м, b_i, руб/м$^{u_i+1}$, u_i – коэффициенты, получаемые в результате аппроксимации реальных (табличных) значений стоимости трубопроводов различных диаметров; χ_i – коэффициент, зависящий от шероховатости трубопровода; l_i – длина i-го участка сети, м; $F_2 = \dfrac{C_{\text{ээ}}}{367.2\eta}$ – коэффициент условно-переменных затрат на ТС, руб.; $C_{\text{ээ}}$ – цена на электроэнергию, руб/(кВт · ч); $0 < \eta < 1.0$ – коэффициент полезного действия насосной установки (в данной работе принято $\eta = 0.7$).

Задача (2)–(4) представляет собой описание установившегося в ТСС режима с учетом оптимального потокораспределения теплоносителя в тепловых сетях и оптимального объема производства тепловой энергии источниками тепла. Подставив выражение (4) в функцию затрат, можно сократить количество переменных и от задачи (2)–(4) перейти к следующей:

$$\begin{gathered} Z(Q_j^{\text{ИТ}}, \mathbf{x}) = \sum_{j \in J_{\text{ИТ}}} \left[\alpha_j \left(Q_j^{\text{ИТ}}\right)^2 + \beta_j Q_j^{\text{ИТ}} + \gamma_j \right] + \\ + F_1 + F_2 \sum_{i \in I} \left(x_i^2 |x_i| s_i \right) \to \min; \end{gathered} \quad (8)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Q}; \quad (9)$$

$$0 \le Q_j^{\text{ИТ}} \le Q_{j\max}^{\text{ИТ}}, \quad j \in J_{\text{ИТ}}. \quad (10)$$

Поскольку $\mathbf{A}$ – матрица инцидентности ориентированного графа, то в силу теоремы Фредгольма [20] система линейных уравнений (9), отражающая равенство суммарных притоков тепловой энергии суммарным расходам тепловой энергии в каждом узле, разрешима в том и только в том случае, когда

$$\sum_{j\in J_{\text{ИТ}}} Q_j^{\text{ИТ}} = \sum_{j\in J_{\text{п}}} Q_j^{\text{п}}, \tag{11}$$

т.е. когда суммарный спрос на тепловую энергию равен ее суммарному предложению.

Следовательно, совместимость системы условий (9), (10) эквивалентна системе (10), (11), а система условий (10), (11) – следующему условию:

$$\sum_{j\in J_{\text{ИТ}}} Q_{j\max}^{\text{ИТ}} \ge \sum_{j\in J_{\text{п}}} Q_j^{\text{п}}. \tag{12}$$

Целевая функция в (8) – выпуклая коэрцитивная функция, поэтому сформулированная задача поиска оптимального потокораспределения в ТСС (8)–(10) при выполнении условия (12) всегда имеет единственное решение $\left(\mathbf{Q}^{(*)}, \mathbf{x}^{(*)}\right)$. Поскольку выражение (4) представляет собой монотонно возрастающую векторную функцию, то оптимальное значение векторной переменной $\mathbf{h}$ после решения задачи (8)–(10) определяется однозначно. Ограничения в исследуемой задаче линейны и, следовательно, регулярны [4], поэтому для записи необходимых условий оптимальности нужно воспользоваться функцией Лагранжа в виде

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Q},\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{j\in J_{\text{ИТ}}} \left[\alpha_j \left(Q_j^{\text{ИТ}}\right)^2 + \beta_j Q_j^{\text{ИТ}} + \gamma_j\right] + \\ &+ F_1 + F_2 \sum_{i\in I}\left(x_i^2 |x_i| s_i\right) + \boldsymbol{\lambda}^{\text{т}}(\mathbf{Ax} - \mathbf{Q}) = \\ &= \sum_{j\in J_{\text{ИТ}}} \left[\alpha_j \left(Q_j^{\text{ИТ}}\right)^2 + \beta_j Q_j^{\text{ИТ}} + \gamma_j\right] + \\ &+ F_1 + F_2 \sum_{i\in I}\left(x_i^2 |x_i| s_i\right) + \\ &+ \sum_{j\in J_{\text{ИТ}}}\left[\lambda_j \sum_{i\in I}(a_{ij}x_i) - \lambda_j Q_j^{\text{ит}}\right] + \\ &+ \sum_{J_{\text{п}}\cup J_0}\left[\lambda_j \sum_{i\in I}(a_{ji}x_i) - \lambda_j Q_j^{\text{п}}\right] = \\ &= \sum_{j\in J_{\text{ИТ}}} \left[\alpha_j \left(Q_j^{\text{ИТ}}\right)^2 + \beta_j Q_j^{\text{ИТ}} + \gamma_j - \lambda_j Q_j^{\text{ИТ}}\right] + \\ &+ \sum_{i\in I}\left[\frac{1}{n}F_1 + F_2 x_i^2 |x_i| s_i + \sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j x_i)\right] - \sum_{j\in J_{\text{п}}}\left(\lambda_j Q_j^{\text{п}}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – вектор множителей Лагранжа (вектор двойственных переменных), соответствующий балансовым ограничениям (9).

Поскольку существует решение регулярной задачи выпуклого программирования (8)–(10), то есть и решение двойственной задачи, которая имеет следующий вид:

$$\max_{\lambda\in R^n} \Theta(\boldsymbol{\lambda}), \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} \Theta(\boldsymbol{\lambda}) &= \min_{0\le Q_j^{\text{ИТ}} \le Q_{j\max}^{\text{ИТ}}} \min_{x\in R^n} L(\mathbf{Q},\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = \\ &= \sum_{j\in J_{\text{ит}}} \min_{0\le Q_j^{\text{ит}} \le Q_{j\max}^{\text{ит}}} \left[\alpha_j \left(Q_j^{\text{ИТ}}\right)^2 + \beta_j Q_j^{\text{ИТ}} + \gamma_j - \lambda_j Q_j^{\text{ИТ}}\right] + \\ &+ \sum_{i\in I} \min_{x_i}\left[\frac{1}{n}F_1 + F_2 x_i^2 |x_i| s_i + x_i \sum_{j\in J}\left(a_{ji}\lambda_j\right)\right] - \\ &- \sum_{j\in J_{\text{п}}}\left(\lambda_j Q_j^{\text{п}}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

В функции (15) вводятся следующие обозначения трех составляющих для дальнейшего их анализа:

источников тепловой энергии

$$\begin{aligned} \Theta^{\text{ИТ}}(\boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{j\in J_{\text{ИТ}}} \min_{0\le Q_j^{\text{ИТ}} \le Q_{j\max}^{\text{ИТ}}} \times \\ &\times \left[\alpha_j \left(Q_j^{\text{ИТ}}\right)^2 + \beta_j Q_j^{\text{ИТ}} + \gamma_j - \lambda_j Q_j^{\text{ИТ}}\right]; \end{aligned} \tag{16}$$

тепловых сетей

$$\begin{aligned} &Q^{\text{ТС}}(\boldsymbol{\lambda}) = \\ &= \sum_{i\in I} \min_{x_i}\left[\frac{1}{n}F_1 + F_2 x_i^2 |x_i| s_i + x_i \sum_{j\in J}\left(a_{ij}\lambda_j\right)\right]; \end{aligned} \tag{17}$$

потребителей тепловой энергии

$$\Theta^{\text{п}}(\boldsymbol{\lambda}) = -\sum_{j\in J_{\text{п}}}\left(\lambda_j Q_j^{\text{п}}\right). \tag{18}$$

В функции Лагранжа (13) величины λ_j интерпретируются как узловые цены производства/потребления тепловой энергии в узле j. Поскольку

$$\begin{aligned} &\min_{0\le Q_j^{\text{ИТ}} \le Q_{j\max}^{\text{ИТ}}} \sum_{j\in J_{\text{ИТ}}} \left[\alpha_j \left(Q_j^{\text{ИТ}}\right)^2 + \beta_j Q_j^{\text{ИТ}} + \right. \\ &\left. + \gamma_j - \lambda_j Q_j^{\text{ИТ}}\right] = \sum_{j\in J_{\text{ИТ}}} \min_{0\le Q_j^{\text{ИТ}} \le Q_{j\max}^{\text{ИТ}}} \times \\ &\times \left[\lambda_j Q_j^{\text{ИТ}} - \alpha_j \left(Q_j^{\text{ИТ}}\right)^2 + \beta_j Q_j^{\text{ИТ}} + \gamma_j\right], \end{aligned} \tag{19}$$

а разность $\lambda_j Q_j^{\text{ИТ}} - \alpha_j \left(Q_j^{\text{ИТ}}\right)^2 + \beta_j Q_j^{\text{ИТ}} + \gamma_j$ не что иное, как прибыль j-го ИТ, то решение двойственной задачи будет соответствовать ее максимизации, суммарная же прибыль всех источников будет определяться как

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in J_{\text{ИТ}}} \left\{\lambda_j Q_j^{\text{ИТ}} - \left[\alpha_j \left(Q_j^{\text{ИТ}}\right)^2 + \beta_j Q_j^{\text{ИТ}} + \gamma_j\right]\right\} = \\ &= -\Theta^{\text{ИТ}}(\boldsymbol{\lambda}). \end{aligned} \tag{20}$$

Аналогично следует провести анализ для тепловых сетей [выражение (17)]. Через $x(\boldsymbol{\lambda})$ будет обозначено решение данной задачи, тогда можно выделить следующие связи между ее параметрами:

$$\begin{aligned}&\text{если} \quad \sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j) > 0, \quad \text{то} \quad x_i(\boldsymbol{\lambda}) < 0;\\ &\text{если} \quad \sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j) < 0, \quad \text{то} \quad x_i(\boldsymbol{\lambda}) > 0;\\ &\text{если} \quad \sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j) = 0, \quad \text{то} \quad x_i(\boldsymbol{\lambda}) = 0.\end{aligned}$$

Можно ввести два множества $I_\lambda^+ = \left\{i\colon \sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j) > 0\right\}$, $I_\lambda^- = \left\{i\colon \sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j) < 0\right\}$, а выражение (17) переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\Theta^{\text{ТС}}(\boldsymbol{\lambda}) =\\ &= \sum_{i\in I_\lambda^+}\min_{x_i\le 0}\left[\frac{1}{n}F_1 + F_2x_i^2|x_i|s_i - \left|\sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j)\right||x_i|\right] +\\ &+ \sum_{i\in I_\lambda^-}\min_{x_i\ge 0}\left[\frac{1}{n}F_1 + F_2x_i^2|x_i|s_i - \left|\sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j)\right||x_i|\right] =\\ &= -\sum_{i\in I_\lambda^+}\max_{x_i\le 0}\left[\left|\sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j)\right||x_i| - \left(\frac{1}{n}F_1 + F_2x_i^2|x_i|s_i\right)\right] -\\ &- \sum_{i\in I_\lambda^-}\max_{x_i\ge 0}\left[\left|\sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j)\right||x_i| - \left(\frac{1}{n}F_1 + F_2x_i^2|x_i|s_i\right)\right].\end{aligned} \tag{21}$$

Поскольку a_{ji} в выражении (21) – это элементы матрицы инциденций $\mathbf{A}$, то

$$\left|\sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j)\right| = \left|\lambda_{j^+} - \lambda_{j^-}\right|, \tag{22}$$

где j^+ – узел, из которого выходит ветвь i; j^- – узел, в который выходит ветвь i.

Таким образом, $\left|\lambda_{j^+} - \lambda_{j^-}\right|$ – разница цен на ветви i, а выражение $\left|\lambda_{j^+} - \lambda_{j^-}\right||x_i|$ – доход, который получает тепловая сеть за транспортировку теплоносителя в объеме $|x_i|$ по ветви i. Величина $\frac{1}{n}F_1 + F_2x_i^2|x_i|s_i$ представляет собой суммарные затраты на транспортировку теплоносителя в объеме $|x_i|$ по ветви i. В итоге разность $\left|\sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j)\right||x_i| - \left(\frac{1}{n}F_1 + F_2x_i^2|x_i|s_i\right)$ – это прибыль, которую получает тепловая сеть за транспортировку теплоносителя в объеме $|x_i|$ по ветви i при цене λ_j. Следовательно, суммарная прибыль, получаемая от транспортировки теплоносителя по всем тепловым сетям, определится следующим образом:

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in I}\left\{\left|\sum_{j\in J}(a_{ji}\lambda_j)\right||x_i(\boldsymbol{\lambda})| -\right.\\ &\left.- \left[\frac{1}{n}F_1 + F_2x_i^2(\boldsymbol{\lambda})|x_i(\boldsymbol{\lambda})|s_i\right]\right\} = -\Theta^{\text{ТС}}(\boldsymbol{\lambda}).\end{aligned} \tag{23}$$

Потребители тепловой энергии в модели (8)–(10) имеют фиксированные нагрузки $Q_j^{\text{п}} \le 0$, $j \in J_{\text{п}}$. Исходя из этого величина $\Theta^{\text{п}}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j\in J_{\text{п}}}\left(\lambda_j\left|Q_j^{\text{п}}\right|\right)$ соответствует суммарным выплатам, поступившим от потребителей за услуги по теплоснабжению.

Выполненный анализ двойственности позволяет записать двойственную по Лагранжу функцию в виде

$$\Theta(\boldsymbol{\lambda}) = \Theta^{\text{п}}(\boldsymbol{\lambda}) - \Theta^{\text{ИТ}}(\boldsymbol{\lambda}) - \Theta^{\text{ТС}}(\boldsymbol{\lambda}), \tag{24}$$

а решение двойственной задачи как

$$\max_{\lambda}\Theta(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\lambda}\left\{\Theta^{\text{ИТ}}(\boldsymbol{\lambda}) + \Theta^{\text{ТС}}(\boldsymbol{\lambda}) - \Theta^{\text{п}}(\boldsymbol{\lambda})\right\}. \tag{25}$$

Из (25) следует, что узловые цены $\boldsymbol{\lambda}$ находятся из принципа минимума разницы между прибылями источников тепловой энергии, тепловых сетей и затратами потребителей, т.е. суммарная прибыль должна как можно меньше отличаться от затрат потребителей.

Для выявления наиболее эффективных и неэффективных зон в ТСС по значению узловых цен на тепловую энергию для потребителей авторами настоящей статьи предложено ввести единую цену на тепловую энергию для всех потребителей в виде средневзвешенной цены, т.е. той, которая будет учитывать как объем использования тепловой энергии отдельно взятого потребителя, так и ее цену для него:

$$w = \sum_{j\in J_{\text{п}}}(\lambda_jQ_j)\Big/\sum_{j\in J_{\text{п}}}Q_j. \tag{26}$$

Для наглядности следует проиллюстрировать работоспособность разработанного научно-методического обеспечения по расчету узловых дифференцированных цен на тепловую энергию. Оно будет рассмотрено для укрупненной схемы теплоснабжающей системы, состоящей из 15 участков и 12 узлов. Потребители тепловой энергии расположены в узлах *2–5*, *7–10* и имеют фиксированные нагрузки. В узлах *1*, *6* располагаются источники тепла, обеспечивающие покрытие всех тепловых нагрузок потребителей (рис. 1, *а*).

В качестве исходных данных при проведении практических исследований ТСС приняты следующие показатели:

сопротивление и длина участков трубопроводов тепловой сети (табл. 1);

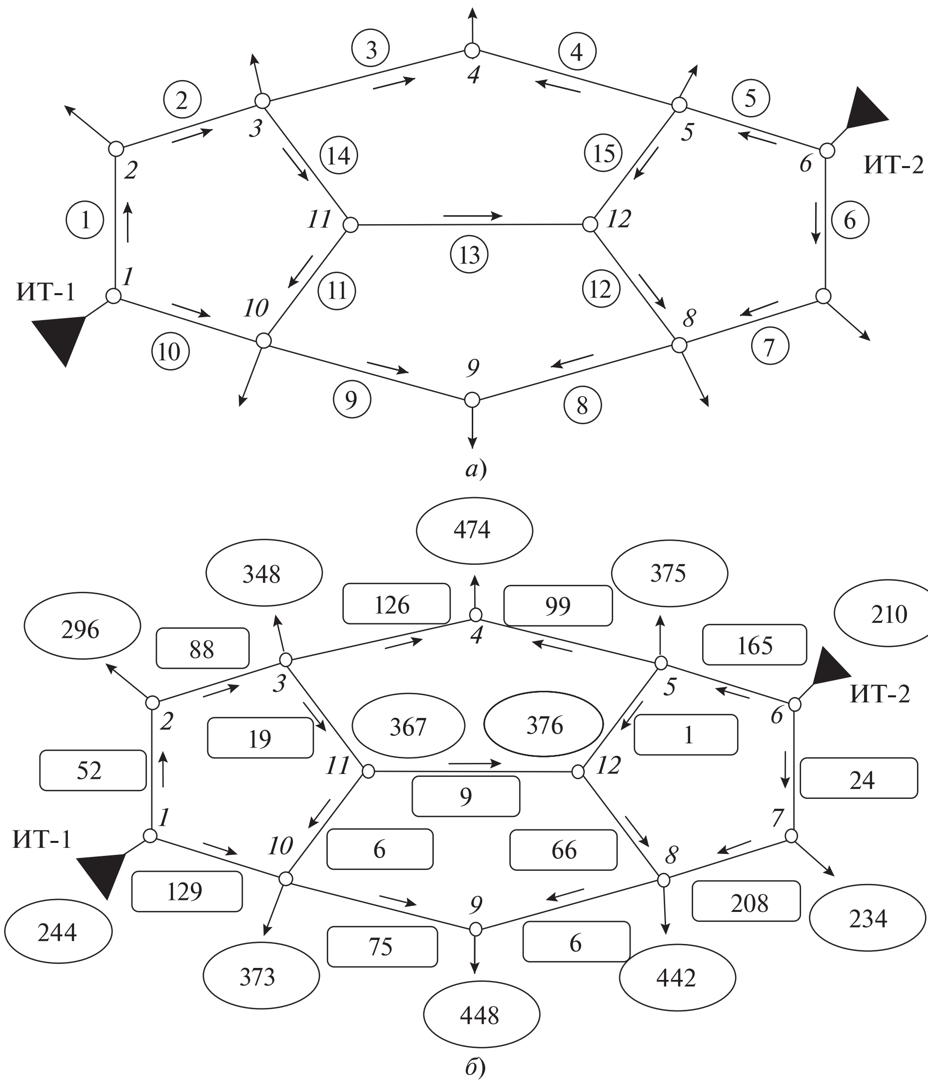

Рис. 1. Укрупненная схема теплоснабжающей системы.
а – расчетная схема; *б* – формирование ценового поля.
1–12 – номера узлов; (1)–(15) – номера ветвей; (210) – узловая цена; [6] – цена передачи на ветви; ИТ-1, ИТ-2 – источники тепла

удельная стоимость электроэнергии на перекачку теплоносителя в тепловой сети $C_{ээ} = 2$ руб/(кВт · ч);

коэффициент полезного действия насосно-моторной установки $\eta = 0.7$;

доля условно-постоянных эксплуатационных издержек по тепловой сети $f_{\text{ТС}} = 0.075$;

функции затрат на производство тепловой энергии источниками тепла), руб., для первого и второго источников тепловой энергии (ИТ-1 и ИТ-2), определяемые соответственно как

$$Z^{\text{ИТ-1}}(Q^{\text{ИТ-1}}) = 0.017Q_1^2 + 124.1Q_1 + 57000;$$
$$Z^{\text{ИТ-2}}(Q^{\text{ИТ-2}}) = 0.014Q_2^2 + 143.2Q_2 + 52000;$$

тепловые нагрузки потребителей (табл. 2);

коэффициенты в функции капитальных вложений в сеть [15]: $a = 10\,835$ руб/м, $b = 103\,827$ руб/м, $u = 1$;

коэффициент, зависящий от шероховатости трубопровода, $\chi_{1-15} = 0.01277$.

Полученное по результатам расчетов ценовое поле представлено на рис. 1, *б*. Из него следует, что узловые цены на тепловую энергию растут по направлению установившегося оптимального потокораспределения в тепловой сети от источников ИТ-1 и ИТ-2 к потребителям и достигают максимального значения, равного 474 руб/ГДж в узле *4*. Цена на тепловую энергию на уровне средневзвешенного значения для всех потребителей составила 385 руб/ГДж (рис. 2).

Соотношение уровня цен (узловых и средневзвешенной) для потребителей приведено на

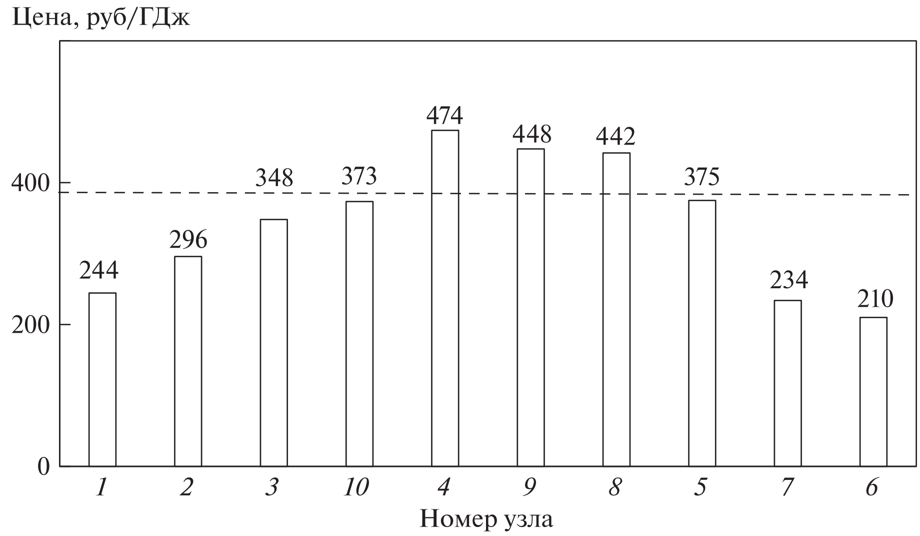

Рис. 2. Узловые цены в сопоставлении со средневзвешенной ценой 385 руб/ГДж (штриховая линия) по теплоснабжающей системе

Таблица 1. Сопротивление и длина участков тепловой сети

Ветвь	Сопротивление, м · ч^2/т^2	Длина, м
1	0.000010	1000
2	0.000020	900
3	0.009400	800
4	0.000260	700
5	0.000130	600
6	0.000050	500
7	0.001120	700
8	0.000260	1000
9	0.000200	900
10	0.000600	700
11	0.000010	800
12	0.000025	500
13	0.001700	700
14	0.000900	600
15	0.005300	500

рис. 2. Видно, что цены на тепловую энергию в узлах *9*, *4* и *8* выше средневзвешенного значения на 63, 89 и 57 руб/ГДж соответственно. Переход на дифференцированные цены на тепловую энергию в зависимости от месторасположения потребителей может повлиять на множество социальных, организационных и технологических решений, стоимость жилья и может активно воздействовать на развитие инфраструктуры населенных пунктов вблизи источников дешевой тепловой энергии. Предложенный методический подход позволяет осуществлять технический и финансовый анализ функционирования ТСС при оперативной оценке текущего режима в ТСС, а также при их планировании.

ВЫВОДЫ

1. Рассмотренная в работе актуальная задача расчета узловых цен на тепловую энергию для конечных потребителей в многоконтурных теплоснабжающих системах с несколькими источниками тепла базируется на решении задачи поиска оптимального потокораспределения в экстремальной постановке в теплоснабжающей системе по критерию поиска минимума суммарных затрат на производство и транспортировку тепловой энергии. Для нахождения оптимального решения данной задачи был предложен подход, основан-

Таблица 2. Тепловые нагрузки потребителей

Номер узла (см. рис. 1, *а*)	*2*	*3*	*4*	*5*	*7*	*8*	*9*	*10*
Тепловая нагрузка, ГДж/ч	47.7	45.8	53.5	34.3	19.1	28.6	55.4	47.7

ный на применении метода неопределенных множителей Лагранжа. С помощью проведенного анализа двойственности было показано, что неопределенные множители Лагранжа при балансовых ограничениях (первый закон Кирхгофа) интерпретируются как узловые цены.

2. Данный подход позволяет определить затраты по системе, узловые цены производства, передачи и потребления тепловой энергии в соответствии с оптимальным распределением нагрузок между источниками тепла и оптимальным потокораспределением в тепловой сети. Полученные ценовые показатели отражают обоснованные затраты на теплоснабжение каждого конкретного узла потребления тепловой энергии и могут использоваться для поиска оптимальной зоны теплоснабжения с позиции эффективной работы как источников тепловой энергии, так и тепловых сетей. Это позволяет, с одной стороны, учитывая особенности ТСС и характерные для нее физико-технические свойства, формировать перспективные направления по подключению новых потребителей, а с другой — на основе полученных результатов решать вопросы, связанные с развитием существующих тепловых мощностей, а также с введением новых.

3. С помощью предложенной методики выполнены практические исследования на реальных теплоснабжающих системах. Полученные узловые цены являются маржинальными, т.е. основанными на расчете предельных затрат на производство и транспортировку дополнительной отпущенной единицы тепловой энергии. Предложенный подход универсален: пользуясь им, можно рассчитывать теплоснабжающие системы любого масштаба и любой мощности и учитывать различные типы источников тепловой энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Меренков А.П., Хасилев В.Я.** Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985.
2. **Хасилев В.А.** Элементы теории гидравлических цепей: автореф. дис. ... докт. техн. наук. Новосибирск: АН СССР, Сиб. отд-ние, 1966.
3. **Maxwell J.C.** A treatise of electricity and magnetism. Oxford, 1873. V. 1.
4. **Базара М., Шетти К.** Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы: пер. с англ. М.: Мир, 1982.
5. **Меренков А.П.** Дифференциация методов расчета гидравлических цепей // Журн. вычислит. математики и матем. физики. 1973. Т. 13. № 5. С. 1237—1248.
6. **Сеннова Е.В.** Оптимизация развития и реконструкции развивающихся теплоснабжающих систем с учетом надежности: автореф. дис. ... докт. техн. наук. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1990.
7. **Канторович Л.В.** Математические методы организации и планирования производства. Л.: ЛГУ, 1939.
8. **Канторович Л.В.** Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
9. **Шалагинова З.И., Новицкий Н.Н., Стенников В.А.** Расчет ценового поля в тепловой сети на базе ее теплогидравлического моделирования // Трубопроводные системы энергетики. Методы математического моделирования и оптимизации: сб. науч. тр. Новосибирск: Наука, 2007. С. 210—221.
10. **Математическое** моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения // А.П. Меренков, Е.В. Сеннова, С.В. Сумароков, В.Г. Сидлер, Н.Н. Новицкий, В.А. Стенников, В.Р. Чупин, Б.М. Каганович, З.И. Шалагинова, В.А. Ефремов, Т.Б. Ощепкова, В.В. Шлафман, Н.И. Илькевич Новосибирск: Наука, 1992.
11. **Стенников В.А., Хамисов О.В., Стенников Н.В.** Оптимизация совместной работы источников тепловой энергии // Электрические станции. 2011. № 3. С. 27—33.
12. **Гамм А.З.** Двойственность и ее использование при оптимизации режимов электроэнергетических систем // Труды Иркут. политехн. ин-та. 1971. С. 108—124.
13. **Васьковская Т.В.** Анализ оптимальных режимов электроэнергетических систем на основе множителей Лагранжа: дис. ... докт. техн. наук. М.: МЭИ, 2018.
14. **Components** of nodal prices for electric power systems / L. Chen, H. Suzuki, T. Wachi, Y. Shimura // IEEE Trans. Power Systems. 2002. V. 17. Is. 1. P. 41—49. https://doi.org/10.1109/MPER.2001.4311139
15. **Стофт С.** Экономика энергосистем. Введение в проектирование рынков электроэнергии: пер. с англ. М.: Мир, 2006.
16. **Vasant P., Voropai N.** Sustaining power resources through energy optimization and engineering. USA: Engineering Science Reference, 2016. https://doi.org/10.4018/978-1-4666-9755-3
17. **Пеньковский А.В.** Методы оптимального распределения нагрузки между источниками тепла в задачах развития теплоснабжающих систем в условиях несовпадающих интересов: дис. ... канд. техн. наук. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2017.
18. **Search** for a market equilibrium of Cournot—Nash in the competitive heat market / A.V. Penkovskii, V.A. Stennikov, E.E. Mednikova, I.V. Postnikov // Energy. 2018. V. 161. P. 193—201. https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.07.086
19. **Сеннова Е.В., Сидлер В.Г.** Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем. Новосибирск: Наука, 1987.
20. **Воеводин В.В.** Линейная алгебра. М.: Наука,1974.

Heat Price Field Calculation Based on the Extreme Problem of Searching the Optimal Load Flow in Heat-Supply Systems

V. A. Stennikov[a], O. V. Khamisov[a], A. V. Pen'kovskii[a, *], and A. A. Kravets[a]

[a] *Melentyev Institute of Energy System, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia*

**e-mail: penkoffsky@isem.irk.ru*

Abstract—The article proposes a method for calculating differentiated prices for heat at the nodes of a heat-supply system (HSS) based on the extreme economic formulation of the problem of searching for the optimal load flow in heat networks containing several heat sources. The problem boils down to finding the minimal total costs associated with heat generation and transportation, maintaining of material balances at heat network nodes (Kirchhoff's first law), and constraints imposed on the heat source capacities. The problem is solved on the basis of Lagrange's method of undetermined multipliers. An analysis of the initial optimization problem duality has shown that the dual variables (Lagrange's multipliers) in balance constraints are nothing but nodal prices for heat, and the optimal load flow in a heat network obtained in the calculation process makes it possible to form the price field for the system as a whole. It is also shown that the prices for heat from the heat sources to end consumers increase in the direction of the steady-state optimal load flow in the heat network. With such an approach to solving the problem, it is also possible to determine the optimal action zones and levels of loading the heat sources taking into account their cost characteristics and the specified heat network's physical, technical, and economic indicators. The nodal prices obtained from the calculations are in their economic essence marginal ones, i.e., prices based on calculating the limit low and limit high costs for generation and transportation of an additional unit of heat.

Keywords: heat-supply systems, optimization problem, optimal load flow, Lagrange's undetermined multipliers, nodal prices