ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 2019, том 57, № 1, с. 66–71

ТЕПЛОМАССООБМЕН И ФИЗИЧЕСКАЯ ГАЗОДИНАМИКА

УДК 536.21

ВЛИЯНИЕ КОМПОНЕНТОВ ТЕНЗОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТЕПЛОЗАЩИТНОГО МАТЕРИАЛА НА ВЕЛИЧИНУ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ ОТ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. Ф. Формалев[1, *], С. А. Колесник[1, **], Е. Л. Кузнецова[1, *]**

[1] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

**E-mail: formalev38@yandex.ru*

***E-mail: sergey@oviont.com*

****E-mail: lareyna@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.05.2018 г.
После доработки 18.06.2018 г.
Принята к печати 10.10.2018 г.

На основе впервые полученного аналитического решения задачи теплопереноса в анизотропном композиционном материале в условиях конвективно-кондуктивного теплообмена при обтекании высокотемпературным газодинамическим пограничным слоем исследовано влияние компонентов тензора теплопроводности теплозащитного материала на тепловые потоки от газа к телу. Такой анализ позволил установить заметное снижение тепловых потоков к боковой поверхности затупленного анизотропного тела при использовании теплозащитного материала с высокой степенью продольной анизотропии (например, пиролитических графитов, у которых отношение продольного коэффициента теплопроводности к поперечному может достигать ста и более). Основной вклад в уменьшение тепловых потоков вносит уменьшение величины градиента температур на границе газа и тела со стороны газа за счет повышения температуры тела вниз по потоку. Кроме этого, при росте температуры газа на стенке увеличивается динамическая вязкость и снижается плотность, что уменьшает локальные числа Рейнольдса и содействует уменьшению тепловых потоков. Анализируются численные результаты.

DOI: 10.1134/S0040364419010083

ВВЕДЕНИЕ

В условиях высокоинтенсивного аэрогазодинамического нагрева элементов конструкций гиперзвуковых летательных аппаратов в качестве теплозащитных материалов используются анизотропные материалы (графиты, графитосодержащие, композиционные материалы и др.). Теплозащитные материалы с высокой степенью продольной анизотропии (отношения продольного компонента тензора теплопроводности к поперечному) можно использовать для регулирования тепловых потоков от газодинамического пограничного слоя. Действительно, если спроектировать анизотропную теплозащиту так, чтобы продольная анизотропия составляла десятки, а то и сотни единиц, то появляется возможность канализировать тепловые потоки в теле от непосредственно затупления в хвостовую часть затупленного тела, что приводит к повышению температуры хвостовой части, уменьшению модуля градиента температуры на границе “газ–тело” со стороны газа и, как следствие, к уменьшению тепловых потоков от газа к боковой поверхности затупленного тела.

Целью данной работы является анализ влияния чисел Фурье, определяемых по продольному коэффициенту теплопроводности анизотропного теплозащитного материала, на тепловой поток к боковой поверхности затупленного тела от газодинамического пограничного слоя. На основе полученного аналитического решения третьей начально-краевой задачи теплопроводности в анизотропной тепловой защите исследован конвективно-кондуктивный теплообмен на границе “газ–твердое тело”.

Аналогичные аналитические решения задач теплопроводности рассматривались в работах Зарубина В.С., Кувыркина Г.Н., Савельевой И. [1], Карташова Э.М. [2], Аттеткова А.В., Волкова И.К. [3] и в [4–6]. В работах Кудинова И.В., Кудинова В.А., Котовой Е.В. [7], Кирсанова Ю.А. [8], а также авторов [9, 10] исследуется сопряженный теплообмен на границах анизотропных тел от газодинамических течений. Однако аналитическое решение двумерной задачи анизотропной теплопроводности в условиях конвективно-кондуктивного теплообмена получено и исследовано впервые.

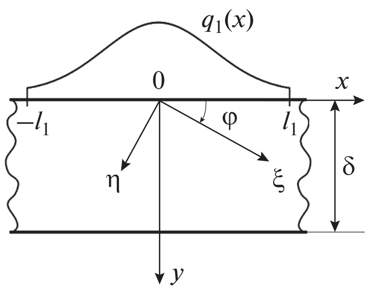

Рис. 1. Расчетная схема и системы координат $(q_1(x) = \alpha_1(x)(T_e - T(x,0,t))\eta(l_1 - |x|))$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается теплоперенос в анизотропной полосе неограниченной длины толщиной δ (рис. 1), на границе $y = 0$ которого приложен переменный в направлении оси $0x$ конвективный тепловой поток экспоненциального характера, причем точка с координатами $x = 0$, $y = 0$ является критической точкой, в окрестности которой наблюдается максимальный уровень теплового потока при обтекании высокотемпературным газодинамическим пограничным слоем. Математическая формулировка задачи содержит следующие уравнения для определения функции $T(x,y,t)$:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{12}\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{21}\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} + \lambda_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{1}$$
$$x \in (-\infty,\infty), \quad y \in (0,\delta), \quad t > 0;$$

$$\left(\lambda_{21}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} =$$
$$= \alpha_1(x)(T_e - T(x,0,t))\eta(l_1 - |x|), \tag{2}$$
$$x \in (-\infty,\infty), \quad t > 0;$$

$$\left(\lambda_{21}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0, \quad x \in (-\infty,\infty), \quad t > 0; \tag{3}$$

$$T(x,y,0) = 0, \quad x \in (-\infty,\infty), \quad y \in [0,\delta]. \tag{4}$$

В соотношениях (1)–(4) введены следующие обозначения: c – теплоемкость в Дж/(кг K), ρ – плотность в кг/м^3, $T(x,y,t)$ – температура в K, x, y – декартовы координаты в м, t – время в с, $\alpha_1(x)$ – коэффициент теплоотдачи в Вт/(м^2 K), T_e – эффективная температура пограничного слоя в K, $q(x)$ – плотность теплового потока в Вт/м^2, T_0 – начальная температура в K, λ_{ij}, $i, j = \overline{1,2}$ – компоненты тензора теплопроводности в Вт/(м K), $\eta(z)$ – функция Хэвисайда.

Компоненты λ_{ij}, $i, j = \overline{1,2}$ вычисляются следующим образом:

$$\lambda_{11} = \lambda_\xi \cos^2\varphi + \lambda_\eta \sin^2\varphi,$$
$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = (\lambda_\xi - \lambda_\eta)\sin\varphi\cos\varphi, \tag{5}$$
$$\lambda_{22} = \lambda_\xi \sin^2\varphi + \lambda_\eta \cos^2\varphi,$$

где λ_ξ, λ_η – главные компоненты тензора теплопроводности; φ – угол ориентации главных осей 0ξ и 0η тензора теплопроводности.

Для решения задачи (1)–(5) делается следующее предположение: коэффициент теплоотдачи $\alpha_1(x)$ имеет экспоненциальный вид

$$\alpha_1(x) = \alpha_0 \exp(-kx^2)\eta(l_1 - |x|), \quad x \in (-\infty,\infty). \tag{6}$$

Если начальная температура (4) равна некоторому постоянному значению T_0,

$$T(x,y,0) = T_0, \quad x \in (-\infty,\infty), \quad y \in [0,\delta], \quad t = 0, \tag{7}$$

то заменой

$$T(x,y,t) = T_1(x,y,t) + T_0 \tag{8}$$

задача (1)–(4) формулируется относительно функции $T_1(x,y,0) = 0$. Если функцию $T_1(x,y,t)$ переобозначить через $T(x,y,t)$, то задача (1)–(4) сохраняет свой вид, но с однородным граничным условием (4).

В этом случае к итоговому решению необходимо добавить величину T_0.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения задачи (1)–(8) используем метод построения граничной функции влияния (функции Грина), для чего граница области $y = 0$ и $y = \delta$ разбивается на $2J$ отрезков $\Delta\xi_j$, в центре ξ_j каждого из которых вместо граничного условия (2) используется граничное условие вида

$$-\left(\lambda_{21}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} - \alpha_1(x)T(x,0,t) =$$
$$= -T_e\alpha_1(\xi_j)\delta(x - \xi_j); \tag{9}$$
$$\xi_j \in (\Delta\xi_j), \quad j \in (-J_1, J_1), \quad t > 0,$$

а на границе $y = \delta$ граничное условие (3) однородно. В выражении (9) $\delta(x - \xi_j)$ – дельта-функция Дирака.

На боковых границах тепловые потоки в соответствии с (2), (3) и (6) равны нулю. Если в результате решения задачи (1), (3)–(9) получено $T(x,\xi_j,y,t)$, то это решение является распределением температуры в расчетной области $x \in (-\infty,\infty)$, $y \in (0,\delta)$, $t > 0$ под действием точечного источника теплоты $T_e\alpha_1(\xi_j)\delta(x - \xi_j)$, приложенного в точке

$\xi_j \in \Delta\xi_j,\ j \in (-J_1, J_1)$. Оно называется граничной функцией источника и обозначается

$$T(x, \xi_j, y, t) = G(x, \xi_j, y, t). \tag{10}$$

Если функция источника $G(x, \xi_j, y, t)$ найдена, то приближенное решение задачи (1), (9), (3)–(8) определяется суммой

$$\bar{T}(x, y, t) = \sum_{j=-J_1}^{J_1} G(x, \xi_j, y, t) T_e \alpha_1(\xi_j) \Delta\xi_j.$$

Пределом этих интегральных сумм при $\Delta\xi_j \to 0$ будет решение задачи (1), (9), (3)–(8)

$$T(x, y, t) = \lim_{\Delta\xi\to 0} \bar{T}(x, y, t) = \\ = \oint_C G(x, \xi, y, t) T_e \alpha_1(\xi) d\xi, \tag{11}$$

где C – замкнутый контур, ограничивающий расчетную область $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in [0, \delta]$.

Для нахождения функции источника (10) применим к задаче (1), (9), (3)–(8) преобразования Фурье по переменной x и Лапласа – по переменной t:

$$T_{\omega,p}(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} T(x, y, t) \exp(-i\omega x) \exp(-pt)\, dx dt.$$

Приходим к следующей краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с мнимыми коэффициентами относительно функции источника $G_{\omega,p}(y) = T_{\omega,p}(y)$:

$$\frac{\partial^2 G_{\omega,p}}{\partial y^2} + 2i\omega \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}} \frac{\partial G_{\omega,p}}{\partial y} - \frac{\lambda_{11}\omega^2 + c\rho p}{\lambda_{22}} G_{\omega,p} = 0, \\ 0 < y < \delta; \tag{12}$$

$$\frac{\partial G_{\omega,p}}{\partial y} + \frac{i\omega\lambda_{12} + \bar{\alpha}_1}{\lambda_{22}} G_{\omega,p} = \frac{T_e \alpha_1(\xi_j)}{\lambda_{22} p} \exp(-i\omega\xi_j), \\ y = 0; \tag{13}$$

$$\lambda_{22} \frac{\partial G_{\omega,p}}{\partial y} + i\omega\lambda_{12} G_{\omega,p} = 0, \quad y = \delta, \tag{14}$$

где $\bar{\alpha}_1$ – среднеинтегральное значение коэффициента теплоотдачи $\alpha_1(x) = \alpha_0 \exp(-kx^2)$ на отрезке $x \in [0; l_1]$:

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\alpha_0}{l_1} \int_0^{l_1} \exp(-kx^2) dx = \frac{\alpha_0}{2l_1} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \operatorname{erf}(\sqrt{k} l_1). \tag{15}$$

Решением задачи (12)–(14) является функция

$$G_{\omega,p}(\xi_j, t) = \exp(-i\omega\alpha y) T_e \alpha_1(\xi_j) \exp(-i\omega\xi_j) \times \\ \times \frac{\exp(-K_{\omega,p}(\delta - y) + \exp(K_{\omega,p}(\delta - y))}{p[\lambda_{22} K_{\omega,p}(\exp(-K_{\omega,p}\delta) - \exp(K_{\omega,p}\delta)) + \bar{\alpha}_1(\exp(K_{\omega,p}\delta) + \exp(-K_{\omega,p}\delta))]}, \tag{16}$$

где

$$K_{\omega,p} = \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}, \quad \alpha = \lambda_{12}/\lambda_{22}, \quad \beta = \frac{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\lambda_{22}^2}, \quad \gamma = c\rho/\lambda_{22}.$$

Обратное преобразование Лапласа выражения (16) осуществим по формуле Меллина [11, 12]

$$G_w(\xi_j, y, t) = \frac{\exp(-i\omega\alpha y)}{\lambda_{22}} T_e \alpha_1(\xi_j) \exp(-i\omega\xi_j) \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{[\exp(-K_{\omega,p}(\delta - y) + \exp(K_{\omega,p}(\delta - y))] \exp(pt)\, dp}{p\left[K_{\omega,p}(\exp(-K_{\omega,p}\delta) - \exp(K_{\omega,p}\delta)) + \dfrac{\bar{\alpha}_1}{\lambda_{22}}(\exp(K_{\omega,p}\delta) + \exp(-K_{\omega,p}\delta))\right]}. \tag{17}$$

Вычислить интеграл в (17) без предварительного преобразования не удается. Поэтому рассмотрим два предельных случая: 1) большая толщина δ (т.е. тело сплошное или полубесконечное), 2) малая толщина $(K_{\omega,p}\delta \sim 1)$.

В первом случае после деления числителя и знаменателя подынтегральной функции в (17) на $\exp(K_{\omega,p}\delta)$ получим

$$G_\omega(\xi_j, y, t) = \frac{\exp(-i\omega\alpha y)}{\lambda_{22}} T_e \alpha_1(\xi_j) \exp(-i\omega\xi_j) \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp\left(-\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\, y\right)}{p\left[-\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right] + \dfrac{\bar{\alpha}_1}{\lambda_{22}}} \exp(pt)\, dp. \tag{18}$$

Во втором случае все экспоненты в [17], зависящие от δ, разложим в ряды Тейлора с удержанием линейных членов.

$$G_\omega(\xi_j, y, t) = \exp(-i\omega\alpha y)\, T_e \alpha_1(\xi_j) \exp(-i\omega\xi_j) \times \\ \times \frac{1}{c\rho\delta} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp(pt)\,dp}{p\left[p - \left(\dfrac{\beta\omega^2}{\gamma} + \dfrac{\bar{\alpha}_1}{c\rho\delta}\right)\right]}. \quad (19)$$

На основе теоремы о произведении двух изображений $1/p$ и $[p - (\beta\omega^2/\gamma + \bar{\alpha}_1/c\rho\delta)]^{-1}$ из выражения (19) находим

$$G_\omega(\xi_j, y, t) = \frac{\exp(-i\omega\alpha y)\, T_e \alpha_1(\xi_j) \exp(-i\omega\xi_j)}{c\rho\delta} \times \\ \times \int\limits_0^t \eta(\tau) \exp\left[\left(\frac{\beta\omega^2}{\gamma} + \frac{\bar{\alpha}_1}{c\rho\delta}\right)(t-\tau)\right] d\tau, \quad (20)$$

где $\eta(\tau)$ – единичная функция.

При вычислении интеграла в (18) используем теорему о произведении изображений $F_1(p) = 1/p \Leftrightarrow \eta(t)$ и

$$F_2(p) = \frac{\exp\left(-\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\, y\right)}{-\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} + \bar{\alpha}_1/\lambda_{22}}. \quad (21)$$

Для изображения (21) оригиналом является функция [11, 12]

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp\left(-\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\, y\right)}{-\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} + \bar{\alpha}_1/\lambda_{22}} \exp(pt)\, dp = \\ = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma} t\right) \exp\left(\frac{-\bar{\alpha}_1 y}{\lambda_{22}} + \frac{\bar{\alpha}_1^2 t}{\lambda_{22}^2 \gamma}\right) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{\left(-y\sqrt{\gamma} + \dfrac{2\bar{\alpha}_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} t\right)^2}{4t}\right] - \right. \\ \left. - \frac{\bar{\alpha}_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}\left(\frac{-y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t}} + \frac{\bar{\alpha}_1\sqrt{t}}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}}\right) \right\}. \quad (22)$$

Тогда в соответствии с (18) и (20)

$$G_\omega(\xi_j, y, t) = \frac{T_e}{\sqrt{\gamma}\lambda_{22}} \alpha_1(\xi_j) \exp(-i\omega(\alpha y + \xi_j)) \times \\ \times \exp\left(\frac{-\bar{\alpha}_1 y}{\lambda_{22}}\right) \int\limits_0^t \eta(\tau) \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma} + \frac{\bar{\alpha}_1^2}{\lambda_{22}^2\gamma}\right)(t-\tau) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{-y\sqrt{\gamma} + \dfrac{2\bar{\alpha}_1(t-\tau)}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}}}{4(t-\tau)}\right] - \frac{\bar{\alpha}_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erfc}\left(\frac{-y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\bar{\alpha}_1\sqrt{t-\tau}}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}}\right) \right\} d\tau. \quad (23)$$

Обратное преобразование Фурье от выражения (23) имеет вид

$$G(x, \xi_j, y, t) = \frac{T_e \alpha_1(\xi_j)}{\sqrt{\gamma}\lambda_{22} 2\pi} \exp\left(\frac{-\bar{\alpha}_1 y}{\lambda_{22}}\right) \times \\ \times \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau) \{\exp[-i\omega(\alpha y + \xi_j - x)] \times \\ \times \exp\left(-\frac{\beta(t-\tau)}{\gamma}\omega^2\right) d\omega\} \exp\left(\frac{\bar{\alpha}_1^2(t-\tau)}{\lambda_{22}^2\gamma}\right) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{\left(-y\sqrt{\gamma} + \dfrac{2\bar{\alpha}_1(t-\tau)}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}}\right)^2}{4(t-\tau)}\right] - \right. \\ \left. - \frac{\bar{\alpha}_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}\left(\frac{-y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\bar{\alpha}_1\sqrt{t-\tau}}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}}\right) \right\} d\tau. \quad (24)$$

Несобственный интеграл по параметру преобразования Фурье в (24) вычисляется следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega(\alpha y - x + \xi_j)] \exp\left(-\frac{\beta(t-\tau)}{\gamma}\omega^2\right) d\omega = \\ = \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{\sqrt{\beta(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\alpha y - x + \xi_y)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right). \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), получаем функцию источника $G(x, \xi_j, y, t)$

$$G(x, \xi_j, y, t) = \frac{T_e \alpha_1(\xi_j)}{\lambda_{22} 2\pi} \exp\left(\frac{-\bar{\alpha}_1 y}{\lambda_{22}}\right) \times \\ \times \int\limits_0^t \eta(\tau) \frac{1}{\sqrt{\beta(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\alpha y - x + \xi_j)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \times \\ \times \exp\left(\frac{\bar{\alpha}_1^2(t-\tau)}{\lambda_{22}^2\gamma}\right) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\left(\frac{-y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\bar{\alpha}_1\sqrt{t-\tau}}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}}\right)^2\right] - \right. \\ \left. - \frac{\bar{\alpha}_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}\left(\frac{-y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\bar{\alpha}_1\sqrt{t-\tau}}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}}\right) \right\} d\tau. \quad (26)$$

Осталось подставить функцию (26) в (11), где замкнутый контур C включает прямую $y = \delta$, а также достаточно удаленные от начала координат боковые границы, где коэффициент теплоотдачи принимается равным нулю.

Окончательно в случае $\delta \to \infty$ в соответствии с (11) и (26) находим решение третьей начально-краевой задачи в анизотропной области

$$T(x,y,t) = \frac{T_e \exp\left(\dfrac{-\overline{\alpha}_1 y}{\lambda_{22}}\right)}{2\pi\lambda_{22}} \times$$
$$\times \int_0^t \int_{-l_1}^{l_1} \left[\frac{\alpha_1(\xi)}{\sqrt{\beta(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\alpha y - x + \xi)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) d\xi\right] \times \quad (27)$$
$$\times \exp\left(A^2(t-\tau)\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\left(A\sqrt{t-\tau} - \frac{B}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2\right] -\right.$$
$$\left. - A\,\mathrm{erfc}\left(A\sqrt{t-\tau} - \frac{B}{\sqrt{t-\tau}}\right)\right\} d\tau,$$

где

$$A = \frac{\overline{\alpha}_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}}, \quad B = \frac{y\sqrt{\gamma}}{2},$$

$\overline{\alpha}_1$ определяется выражением (15).

Для малых толщин δ аналогичное выражение будет получено из (20), для которого вначале необходимо выполнить обратное преобразование Фурье, а затем полученное выражение подставить в (11). В результате находим

$$T(x,y,t) = \frac{T_e\sqrt{\gamma}}{2c\rho\delta\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-l_1}^{l_1} \frac{\alpha_1(\xi)}{\sqrt{\beta(t-\tau)}} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{(\alpha y - x + \xi)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right] \exp\left(-\frac{\overline{\alpha}_1(t-\tau)}{c\rho\delta}\right) d\xi d\tau, \quad (28)$$

где α, β, γ, $\overline{\alpha}_1$ определяются так же, как в (27).

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2 и 3 представлены результаты расчетов температуры $T(x,0,t)$ границы $y = 0$ по (27) и тепловых потоков к этой границе в зависимости от чисел Фурье, рассчитанных по продольной теплопроводности λ_ξ в ортотропном случае ($\varphi = 0^0, \lambda_{12} = 0$) и $\mathrm{Fo} = \lambda_\xi t / (c\rho l_1^2)$.

Входные данные принимали следующие значения: $\lambda_\xi = 100$ Вт/(м К), $\lambda_\eta = 5$ Вт/(м К), $c\rho = 10^6$ Дж/(м^3 К), $l_1 = 0.1$ м, $\varphi = 0$, $T_e = 3000$ К, $\alpha_1(x) = 600\exp(-3\overline{x}^2)$ Вт/(м^2 К), $\overline{x} = x/l_1$, $\alpha_2 = 0$. Нумерация кривых соответствует различным значениям чисел Fo: *1* – $0.1(t = 10$ с$)$, *2* – $\mathrm{Fo} = 0.2(t = 20$ с$)$, *3* – $\mathrm{Fo} = 0.4(t = 40$ с$)$, *4* – $\mathrm{Fo} = 0.5(t = 50$ с$)$.

На рис. 2 представлены распределения температур вдоль границы $y = 0$ правой половины пластины, поскольку в ортотропном случае ее

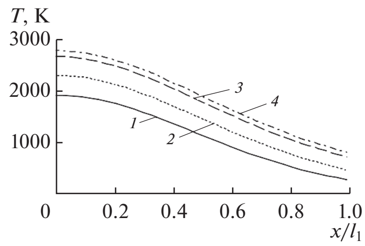

Рис. 2. Изменение температуры вдоль границы $y = 0$: *1* = Fo = 0.1, *2* – Fo = 0.2, *3* – Fo = 0.4, *4* – Fo = 0.5.

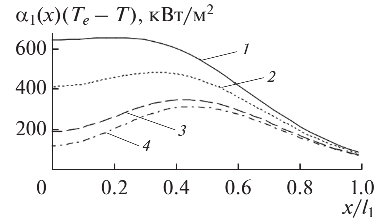

Рис. 3. Изменение тепловых потоков к границе $y = 0$: *1* – Fo = 0.1, *2* – Fo = 0.2, *3* – Fo = 0.4, *4* – Fo = 0.5.

прогрев симметричен относительно оси $0y$ (в анизотропном случае, когда $\varphi \neq 0$ и $\lambda_{12} \neq 0$, температурное поле не обладает симметрией относительно оси $0y$). Ясно, что с ростом чисел Fo температуры границы $y = 0$ растут. При этом, если точку $x = 0$, $y = 0$ считать критической точкой затупленного тела, то хвостовая часть этого тела нагревается не только за счет конвективного теплового потока от пограничного слоя, но и вследствие перетока теплоты вдоль тела к периферийной его части из-за большой степени продольной анизотропии $\lambda_\xi/\lambda_\eta = 20$.

Такой рост температуры наружной границы приводит к резкому уменьшению конвективных тепловых потоков $\alpha_1(x)(T_e - T(x,0,t))$ за счет уменьшения градиента температуры на границе $y = 0$ со стороны газа (рис. 3). При этом тепловые потоки на периферии уменьшаются вследствие не только экспоненциального уменьшения коэффициента теплоотдачи, но и увеличения температуры границы $y = 0$ при перетоке теплоты на периферию внутри тела в результате высокой продольной теплопроводности по сравнению с поперечной (степень анизотропии $\lambda_\xi/\lambda_\eta = 20$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе построения граничной функции источника (граничной функции Грина) и применения интегральных преобразований Фурье и Лапласа впервые получено аналитическое решение двумерной нестационарной задачи теплопроводности в анизотропной полосе в условиях конвективно-кондуктивного теплообмена на границах. Аналитические решения найдены в двух случаях: для сплошного анизотропного тела и тонкой анизотропной пластины. Полученные результаты показывают, что увеличение чисел Fo, вычисленных по продольной теплопроводности ортотропного тела, существенно снижает тепловые потоки не только за счет уменьшения коэффициента теплоотдачи, но и за счет значительного продольного перетока теплоты из-за высокой степени продольной анизотропии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 9.7100.2017/6.7, руководитель – Кузнецова Е.Л.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y.* Two-Sided Thermal Resistance Estimates for Heat Transfer Through an Anisotropic Solid of Complex Shape // Int. J. Heat Mass Transfer. 2018. V. 116. P. 833.
2. *Карташов Э.М.* Математическое моделирование теплопроводности с двухфазным запаздыванием // ИФЖ. 2016. Т. 89. № 2. С. 338.
3. *Аттетков А.В., Волков И.К.* Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого содержит пленочное покрытие // Изв. РАН. Энергетика. 2015. № 3. С. 39.
4. *Формалев В.Ф., Колесник С.А.* Аналитическое исследование теплопереноса в анизотропной полосе при задании тепловых потоков на границах // ИФЖ. 2016. Т. 89. № 4. С. 973.
5. *Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л.* Нестационарный теплоперенос в анизотропном полупространстве в условиях теплообмена с окружающей средой, имеющей заданную температуру // ТВТ. 2016. Т. 54. № 6. С. 878.
6. *Формалев В.Ф., Колесник С.А., Чипашвили А.А.* Аналитическое исследование теплопереноса при пленочном охлаждении тел // ТВТ. 2006. Т. 44. № 1. С. 107.
7. *Кудинов И.В., Кудинов В.А., Котова Е.В.* Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности // ТВТ. 2017. Т. 55. № 4. С. 556.
8. *Кирсанов Ю.А.* Влияние тепловой релаксации и термического демпфирования на переходные процессы при циклических граничных условиях // ТВТ. 2017. Т. 55. № 4. С. 549.
9. *Формалев В.Ф., Колесник С.А.* Об обратных граничных задачах теплопроводности по восстановлению тепловых потоков к анизотропным телам с нелинейными характеристиками теплопереноса // ТВТ. 2017. Т. 55. № 4. С. 564.
10. *Формалев В.Ф., Колесник С.А.* Сопряженный теплоперенос между пристенными газодинамическими течениями и анизотропными телами // ТВТ. 2007. Т. 45. № 1. С. 85.
11. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
12. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965. 288 с.