

УДК 532.529:534.2

АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОУПРУГИХ ПУЗЫРЬКОВЫХ СРЕДАХ

© 2019 г. Д. А. Губайдуллин¹, А. А. Никифоров¹. *

¹Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН,
Казань, Татарстан, Россия

*E-mail: anikiforov1@yandex.ru

Поступило в редакцию 19.11.2017 г.

После доработки 13.03.2018 г.

Принято к печати 05.06.2018 г.

Теоретически исследовано распространение акустических волн в вязкоупругой пузырьковой среде. Приведена линеаризованная система дифференциальных уравнений возмущенного движения такой среды, выведено дисперсионное соотношение. На примере вязкоупругой пузырьковой среды, представляющей собой полидиметилсилоксан с внедренными полидисперсными воздушными пузырьками, рассчитаны зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты колебаний, дано сравнение с известными экспериментальными данными.

DOI: 10.1134/S0040364419010290

ВВЕДЕНИЕ

Распространение акустических волн в пузырьковых средах продолжает оставаться предметом активных исследований. При моделировании динамики пузырьковых систем часто используется континуальный подход, когда двухфазная среда моделируется совокупностью взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов [1]. Этот и другие подходы моделирования, а также фундаментальные проблемы физики пузырьковых систем на основе общих принципов описания двухфазных сред изложены в [2]. Основные методы построения уравнений движения двухфазной среды и анализ особенностей континуального подхода приведены в [3]. Поведение пузырьковой среды описывается осредненными уравнениями механики сплошной среды в эйлеровых переменных и дополняется уравнением Рэлея–Плессета для одиночного пузырька. В большинстве моделей, реализуемых в рамках континуального подхода, несущая среда рассматривается как идеальная, а вязкость учитывается лишь в процессах взаимодействия между несущей средой (жидкостью) и несомыми включениями (газовыми пузырями). В [4] в рамках континуального подхода [1] приведены условия, при которых проявляется сжимаемость несущей среды для задач акустики пузырьковых жидкостей, и предложено развитие модели пузырьковых жидкостей с учетом акустической разгрузки пузырьков. Полученные решения сопоставлены с экспериментальными результатами. Некоторые уточнения результатов этой работы приведены в [5]. Аналитическое решение задачи о пульсациях га-

зового пузырька под действием внешних колебаний давления получено в [6], подробно описаны границы применимости допущения о гомобаричности давления внутри пузырька. Несущая фаза пузырьковой среды может обладать и вязкоупругими свойствами, это необходимо учитывать, например, в биомедицинской акустике [7] и при получении метаматериалов с особыми акустическими свойствами [8]. В [7] изучается механика одиночного пузырька в биологических вязкоупругих тканях. В [8] исследуется истинная вязкоупругая среда, обладающая высокой дисперсией, демонстрирующая пики в затухании и фазовую скорость как функции частоты, которые не могут быть точно описаны без учета упругости несущей фазы.

В настоящей работе дано развитие теоретической модели в рамках континуального подхода [1], описывающей динамику акустических волн в полидисперсной вязкоупругой пузырьковой среде с учетом межфазного теплообмена.

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

Для анализа волновых процессов в пузырьковой жидкости часто используется односкоростная схема, учитывающая основную особенность такой среды – радиальную инерцию и вязкость жидкости [1]. В рамках допущений континуального подхода [1] в системе координат, связанной с невозмущенной средой, записываются линеаризованные уравнения сохранения масс, числа пузырьков, импульса и уравнение неразрывности в пузырьках:

$$\frac{\partial p'_j}{\partial t} + \rho_{j0} \frac{\partial v'_j}{\partial x} = 0, \quad j = l, g, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = 0, \quad n = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} N(a) da, \quad (2)$$

$$(\rho_{l0} + \rho_{g0}) \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial p'_l}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p'_g}{\partial t} = -3\gamma_g p_0 \frac{w'}{a} - 3(\gamma_g - 1) \frac{q}{a}, \quad w' = \frac{\partial a'}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\rho_j = \rho_j^\circ \alpha_j, \quad \alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} N(a) a^3 da.$$

Здесь и далее ρ°, ρ – истинная и средняя плотности; v – скорость; p – давление; n – число пузырьков в единице объема смеси; γ_g – показатель адиабаты газа; w – скорость радиального движения пузырьков; α – объемное содержание; $N(a)$ – функция распределения пузырьков газа по размерам; a – радиус пузырька; x – координата; t – время. Нижние индексы l и g относятся к параметрам жидкой и газовой фаз соответственно, индексом 0 обозначено первоначально невозмущенное состояние. Штрихи обозначают возмущения параметров.

Для несущей среды используется линеаризованное уравнение состояния акустически сжимаемой жидкости

$$p'_l = C_l^2 \rho_l'^\circ, \quad (5)$$

где C_l – скорость звука в жидкости, для дисперсной фазы – уравнение состояния совершенного газа

$$p_g = \rho_g^\circ R_g T_g, \quad (6)$$

где R_g – газовая постоянная.

Согласно [4], для определения интенсивности межфазного теплообмена q принимается следующее соотношение:

$$q = (i\omega) a p'_g [y \operatorname{cth}(y) - 1] / y^2, \quad (7)$$

$$y = \sqrt{-i\omega a^2 / \kappa_g}, \quad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_{g0}^\circ}.$$

Здесь ω – частота возмущений; κ_g, λ_g – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности газа; c_g – теплоемкость газовой фазы при постоянном давлении. Соотношение (7) получается из решения уравнения теплопроводности для газового пузырька с соответствующими граничными условиями. Следует отметить, что решения задачи о теплоотдаче на поверхности пульсирующего пузырька типа (7) получены на

основе допущения об однородности распределения давления по объему пузырька. Это допущение выполняется, если радиальная скорость стенок пузырька много меньше скорости звука в газе. Согласно оценке, приведенной в [6], если время $t_1 = a_0 / C_g$ (C_g – скорость звука в газовой фазе), за которое звуковая волна проходит расстояние порядка радиуса пузырька a_0 , много меньше времени периода пульсаций внешнего давления $t_2 = 1/\omega$, то распределение давления внутри пузырька будет практически однородным. Таким образом, должно выполняться условие [6]

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{a_0 \omega}{C_g} \ll 1.$$

При значениях параметров $a_0 \sim 10^{-4}$, $\omega \sim 10^5$, $C_g \sim 300$ условие гомобаричности выполняется.

При описании радиального движения, согласно уточнению, приведенному в [4], полагается, что возмущение массовой радиальной скорости жидкости на поверхности раздела фаз w' состоит из двух слагаемых: $w' = w'_R + w'_A$. Слагаемое w'_A , учитывающее сжимаемость несущей фазы, определяется из решения задачи о разгрузке сферического пузырька в жидкости в акустическом приближении [4]:

$$w'_A = \frac{p'_g - p'_l}{\rho_{l0} C_l \alpha_{g0}^\beta}, \quad \beta = \frac{1}{6}. \quad (8)$$

Аналогично [5], используется уточнение формулы (8) для акустических поправок из [4], для чего β полагается равной 1/6 вместо 1/3. Слагаемое w'_R , описывающее динамику вязкоупругой жидкости вокруг пузырька, определяется уравнением Рэлея–Плессета:

$$a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{p(a) - p(\infty)}{\rho_l^\circ}.$$

Для расчета давления на границе пузырька радиусом a в несжимаемой вязкоупругой жидкости используется [7]

$$p(a) = p_l - \frac{2\sigma}{a} - \int_a^\infty \frac{\tau_{rr}}{r} dr,$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, τ_{rr} – радиальная (нормальная) компонента тензора напряжений на поверхности пузырька, r – радиальная координата. Интеграл от τ_{rr} определяет вклад вязкоупругости несущей фазы в колебания пузырька и, согласно [7], определяется выражением

$$3 \int_a^\infty \frac{\tau_{rr}}{r} dr = - \left[\frac{4G}{3a^3} (a^3 - a_0^3) + \frac{4\mu}{a} \frac{da}{dt} \right].$$

Здесь G – модуль сдвига, μ – динамическая вязкость.

Если радиус пузырька изменяется по гармоническому закону $a(t) \sim a_0 \exp(-i\omega t)$, с учетом линеаризации уравнение Рэлея–Плессета имеет вид

$$a_0 \frac{\partial w'_R}{\partial t} = \frac{p'_g - p'_l}{\rho_{l0}^\circ} - \frac{4\mu_l^*}{a_0 \rho_{l0}^\circ} a', \quad (9)$$

где $\mu_l^* = G_l - i\omega\mu_l$ – комплексный модуль сдвига, G_l определяет его упругую часть, $\omega\mu_l$ – вязкую часть.

Таким образом, получается замкнутая система уравнений (1)–(9), решение которой ищется в виде плоских прогрессивных волн для возмущений параметров пузырьковой жидкости ψ' ($\psi = p, \rho, v, \dots$):

$$\psi' = A_\psi \exp[i(K_* x - \omega t)]. \quad (10)$$

Здесь A_ψ – амплитуда возмущения параметра ψ , $K_* = K + iK_{**}$ – комплексное волновое число, K_{**} – линейный коэффициент затухания, фазовая скорость определяется как $C_p = \omega/K$. Из условия существования нетривиального решения (10) системы (1)–(9) получается следующая зависимость комплексного волнового числа K_* от частоты возмущений ω :

$$\left(\frac{K_*}{\omega} \right)^2 = \frac{1}{C_f^2} + \quad (11)$$

$$+ \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{4\pi a N(a) \alpha_{l0} \rho_{l0} Q}{3\gamma_g \rho_0 + (4G_l - \omega^2 \rho_{l0}^\circ a^2 - i4\mu_l) S} da,$$

$$C_f = C_l / \alpha_{l0}, \quad S = \frac{Q}{1 - i\omega t_A},$$

$$Q = 1 + 3(\gamma_g - 1)(y \operatorname{cthy}(y) - 1)/y^2,$$

$$t_A = a / (C_l (\alpha_{g0})^\beta), \quad \beta = \frac{1}{6}.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В работе [8] представлены результаты измерений зависимостей фазовой скорости и коэффициента затухания акустических волн в образце с полидисперсными воздушными пузырьками, введенными в упругую несущую среду. В качестве несущей среды использовался полидиметилсилоксан (PDMS RTV-615) – материал из силиконового каучука с добавлением отвердителей. Для функции распределения пузырьков по размерам принималось соотношение [8]

$$N(a) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\epsilon} a} \exp\left(-\frac{(\ln(a/a_0))^2}{2\epsilon^2}\right), \quad (12)$$

$$N_0 = \frac{3\alpha_{g0}}{4\pi a_0^3 \exp(9\epsilon^2/2)}$$

с параметрами $a_0 = 0.15$ мм, $\epsilon = 0.25$ в диапазоне от $a_{\min} = 0.05$ мм до $a_{\max} = 0.35$ мм. Объемное содержание пузырьков $\alpha_{g0} = 0.02$. В численных расчетах использовались следующие значения теплофизических параметров при $p_0 = 0.1$ МПа, $T_0 = 300$ К: для воздуха $\rho_{g0}^\circ = 1.3$ кг/м³, $\gamma_g = 1.4$, $\lambda_g = 0.0026$ Вт/(м К), $c_g = 1006$ Дж/(кг К); для полидиметилсилоксана $C_l = 1020$ м/с, $\rho_{l0}^\circ = 965$ кг/м³. Для определения действительной и мнимой частей модуля сдвига, согласно [8], применялись следующие выражения: $G_l = (0.6 + 0.7f)$ МПа, $\mu_l = (0.2 + 1.8f)$ МПа, где f – частота возмущений (МГц).

На рис. 1 и 2 сравниваются результаты расчетов по предложенной модели при использовании дисперсионного соотношения (11) с данными эксперимента [8]. Также приводятся результаты

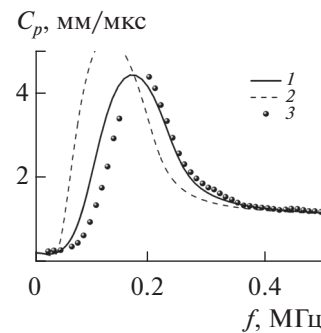


Рис. 1. Зависимость фазовой скорости от частоты возмущений для полидисперсной смеси геля с воздушными пузырьками: 1 – расчет по (11), 2 – расчет по [9], 3 – эксперимент [8].

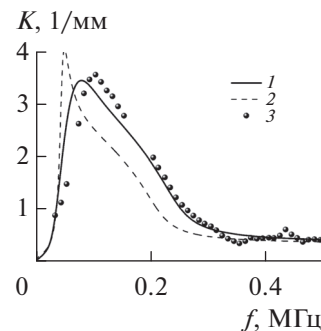


Рис. 2. Зависимость коэффициента затухания от частоты возмущений для полидисперсной смеси геля с воздушными пузырьками: 1 – расчет по (11), 2 – расчет по [9], 3 – эксперимент [8].

расчета с теми же параметрами смеси, но по модели, изложенной в [9] без учета упругости несущей фазы. В последнем случае коэффициент затухания и фазовая скорость определяются неправильно, частоты максимальных значений и амплитуды меньше экспериментальных данных. Эти результаты свидетельствуют о том, что модель, в которой упругость несущей фазы не учитывается, для описания динамики акустических волн в полидиметилсилоксане с пузырьками воздуха не годится. Предложенная модель вязкоупругой пузырьковой среды существенно лучше описывает эксперимент. Хотя в расчетах по обеим моделям наблюдается характерный для пузырьковых сред вид кривых фазовой скорости и коэффициента затухания [1], при учете упругости несущей фазы заметен сдвиг пиковых значений кривых в сторону более высоких частот. Для модели [9] пик затухания акустических волн приходится на частоту, соответствующую резонансной частоте Миннаерта:

$$f_M = \frac{1}{2\pi a_0} \sqrt{\frac{3\gamma_g p_0}{\rho_{l0}^{\circ}}}$$

Радиус a_0 – параметр используемой функции распределения (12). В случае учета упругости, максимальное значение смещается и соответствует резонансной частоте

$$f_M = \frac{1}{2\pi a_0} \sqrt{\frac{3\gamma_g p_0 + 4G_l}{\rho_{l0}^{\circ}}},$$

которая превышает резонансную частоту Миннаерта, что и наблюдается в эксперименте [8].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сопоставление с экспериментальными результатами показало применимость представленной теоретической модели для описания динамики акустических волн в вязкоупругих пузырьковых средах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1987.
2. *Avdeev A.A.* Bubble Systems. Switzerland: Springer Int. Publ., 2016.
3. *Вараксин А.Ю.* Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения // ТВТ. 2013. Т. 51. № 3. С. 421.
4. *Нигматулин Р.И., Шаганов В.Ш., Вахитова Н.К.* Проявление сжимаемости несущей жидкости при распространении волн в пузырьковой среде // ДАН СССР. 1989. Т. 304. № 5. С. 1077.
5. *Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых жидкостях // ДАН. 2012. Т. 447. № 3. С. 284.
6. *Авдеев А.А.* Пульсации газового пузыря в акустическом поле (резонанс и границы политропического приближения) // ТВТ. 2014. Т. 52. № 6. С. 875.
7. *Yang X., Church C.C.* A Model for the Dynamics of Gas Bubbles in Soft Tissue // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 118. № 6. P. 3595.
8. *Leroy V., Strybulevych A.L., Page J.H., Scanlon M.G.* Influence of Positional Correlations on the Propagation of Waves in a Complex Medium with Polydisperse Resonant Scatterers // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. № 4. 046605.
9. *Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А.* Взаимодействие акустического сигнала с неподвижной дискретно-слоистой средой, содержащей слой пузырьковой жидкости // ТВТ. 2017. Т. 55. № 1. С. 102.