

ТЕПЛОМАССОБМЕН
И ФИЗИЧЕСКАЯ ГАЗОДИНАМИКА

УДК 681.5.015,517.977.56

МЕТОД МИНИМАКСНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ДВУМЕРНОЙ
ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2019 г. А. Н. Дилигенская*

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

**E-mail: adiligenskaya@mail.ru*

Поступила в редакцию 31.01.2018 г.

После доработки 10.07.2018 г.

Принята к печати 10.10.2018 г.

Предложен метод решения двумерной обратной задачи теплопроводности по восстановлению пространственно-временной плотности граничного теплового потока, основанный на теории оптимального управления объектами с распределенными параметрами. Метод предусматривает ограничение множества искомых решений классом физически реализуемых функций, что позволяет установить структуру искомого воздействия в виде произведения двух функций одной переменной. На основе параметризации искомой характеристики, рассматриваемой в качестве управляющего воздействия, формулируется задача полубесконечной оптимизации, обеспечивающая минимизацию температурных невязок в равномерной метрике оценивания. Решение задачи аналитическим методом, использующим альтернативные свойства искомых оптимальных температурных отклонений, позволяет получить оптимальные значения вектора параметров.

DOI: 10.1134/S0040364419020029

ВВЕДЕНИЕ

Исследование нестационарных процессов теплообмена, решение задач идентификации и диагностики тепловых процессов часто основываются на решении граничных обратных задач теплопроводности (ОЗТ). На сегодняшний день существует большое число подходов к решению этой проблемы [1–4]. В литературе наиболее полно освещены подходы к решению одномерных граничных ОЗТ, методы решения двумерных и трехмерных обратных задач представлены в меньшем объеме.

Базовые постановки двумерных и трехмерных ОЗТ приведены в [1], где на примере некоторых частных обратных задач, сформулированных в экстремальной постановке, предложен метод итерационной регуляризации, который в дальнейшем получил развитие в работах [5, 6]. Численные методы с применением регуляризирующих алгоритмов использованы для решения двумерных граничных ОЗТ в линейной [7] и нелинейной постановках [8]. Регуляризирующий алгоритм, позволяющий проводить параметрическую идентификацию тепловых потоков к границам анизотропной пластины, приведен в [9]. В работе [10] предложены методика и алгоритм решения двумерной ОЗТ по восстановлению пространственно-временной плотности теплового потока, приложенного к внешней поверхности полого кругового цилиндра, по измерениям на его внутренней поверхности. Для решения задачи построен итерационный регуляризирующий ал-

горитм, использующий для минимизации функционала невязки метод сопряженных градиентов.

Другой подход к решению ОЗТ основывается на сужении множества искомых решений до множества физически реализуемых функций, представляющего собой класс корректности [1], что позволяет получить параметрическое представление искомой характеристики, вектор параметров которого определяется на последующем этапе параметрической оптимизации.

В настоящей работе для решения двумерной граничной ОЗТ применяется разработанный и успешно апробированный при решении одномерных граничных обратных задач метод минимаксной оптимизации [11, 12], базирующийся на теории оптимального управления объектами с распределенными параметрами. Этот метод использует равномерную метрику оценивания [13, 14] температурных невязок, реализует сужение множества искомых характеристик, рассматриваемых в качестве оптимального управляющего воздействия, до класса корректности и тем самым обеспечивает редукцию исходной некорректно поставленной задачи к задаче полубесконечной оптимизации, соответствующей условно-корректной постановке и сохраняющей качественные особенности процессов с распределенными параметрами. Нахождение оптимальных значений конечномерного вектора параметров, определяемого выбранной структурой управляющего воздействия, осуществляется на последующем

этапе минимизации на основе метода, учитывающего альтернативные свойства оптимальных решений [14, 15].

Предложенный метод минимаксной оптимизации достаточно универсален по отношению к виду математической модели и может быть применен к задачам, использующим как аналитические, так и численные модели процесса теплообмена. В работе на его основе решена задача определения граничного теплового потока, зависящего от времени и пространственной координаты для двумерного тела канонической формы.

ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Подобно [1, 8] формулируется двумерная обратная задача нестационарной теплопроводности в случае одностороннего нагрева плоского тела прямоугольной формы, с пространственными координатами x и y , когда на ограничивающих плоскостях $x = 0$, $y = 0$ и 1 теплообмен отсутствует, а вектор теплового потока $q(y, \varphi)$ параллелен плоскости xu .

Рассматривается уравнение теплопроводности для температурного поля $\theta(x, y, \varphi)$, заданное в относительных единицах изменения временной φ и пространственных координат:

$$\frac{\partial \theta(x, y, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta(x, y, \varphi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, \varphi)}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$x, y \in (0, 1), \quad \varphi \in (0, \varphi^*),$$

дополненное начальным условием

$$\theta(x, y, 0) = 0, \quad x, y \in [0, 1] \quad (2)$$

и граничными условиями второго рода

$$\frac{\partial \theta(0, y, \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(x, 0, \varphi)}{\partial y} = \frac{\partial \theta(x, 1, \varphi)}{\partial y} = 0, \quad \varphi \in [0, \varphi^*], \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(1, y, \varphi)}{\partial x} = q(y, \varphi), \quad \varphi \in [0, \varphi^*]. \quad (4)$$

Здесь функция $q(y, \varphi)$ неизвестна и является искомой величиной. Задана дополнительная информация о температуре на некоторой линии $x = x^* = \text{const}, 0 \leq x^* \leq 1$:

$$\theta(x^*, y, \varphi) = f(y, \varphi), \quad \varphi \in [0, \varphi^*]. \quad (5)$$

Полагается, что пространственно-временная функция $q(y, \varphi)$ двух переменных может быть представлена в виде произведения двух функций одной переменной

$$q(y, \varphi) = q^{(1)}(y)q^{(2)}(\varphi), \quad (6)$$

что соответствует большинству физически обоснованных ситуаций.

Идентифицируемая функция $q(y, \varphi)$ рассматривается в качестве управляющего воздействия

$u(y, \varphi) = q(y, \varphi)$, структура которого соответствует виду (6):

$$u(y, \varphi) = u^{(1)}(y)u^{(2)}(\varphi), \quad (7)$$

где функции $u^{(1)}(y)$ и $u^{(2)}(\varphi)$ выступают как пространственно-распределенное и сосредоточенное управляющие воздействия, подчиненные типовым ограничениям

$$u^{(1)}(y) \in V_1, \quad 0 < y < 1, \quad (8)$$

$$u^{(2)}(\varphi) \in V_2, \quad 0 < \varphi < \varphi^* \quad (9)$$

принадлежности заданным множествам V_1 и V_2 функций. Таким образом, искомое управление $u(y, \varphi)$ представляет собой произведение (7) пространственно-распределенной и сосредоточенной составляющих.

Формулируется ОЗТ в экстремальной постановке, предусматривающей минимизацию погрешности равномерного приближения модельного значения $\theta(x^*, y, \varphi)$, соответствующего искомой функции $u(y, \varphi)$, к измеряемому температурному состоянию $f(y, \varphi)$ на заданной области $\Omega = \{(y, \varphi); y \in [0, 1]; \varphi \in [0, \varphi^*]\}$ изменения пространственной переменной и временном интервале идентификации.

Для объекта (1)–(4) требуется определить управляющее воздействие $u(y, \varphi)$, подчиненное согласно (7) ограничениям (8) и (9), обеспечивающее на заданной области изменения пространственной и временной переменной выполнение минимаксного соотношения

$$I(u) = I(u^{(1)}, u^{(2)}) = \max_{\substack{\varphi \in [0, \varphi^*] \\ y \in [0, 1]}} |\theta(x^*, y, \varphi, u^{(1)}, u^{(2)}) - f(y, \varphi)| \rightarrow \min_{\substack{u^{(1)} \in V_1 \\ u^{(2)} \in V_2}}. \quad (10)$$

Для решения задачи производится сужение множества допустимых решений до класса корректности – физически реализуемых на заданных областях изменения соответствующих переменных функций, – осуществляемое на основе требований их достаточной гладкости [1]. Здесь в качестве класса корректности (компакта) рассматривается множество функций, непрерывных вместе со своими производными, – полиномиальных функций соответствующих переменных:

$$u^{(1)}(y) = \sum_{n=0}^N \Delta_n^y y^n, \quad (11)$$

$$u^{(2)}(\varphi) = \sum_{m=0}^M \Delta_m^\varphi \varphi^m. \quad (12)$$

Значения N и M определяют порядки полиномов (11) и (12) и тем самым задают точную структуру искомых функций, что позволяет перейти к параметризованной форме искомых управлений.

Таким образом, при фиксированных значениях N и M идентифицируемое воздействие $u(y, \varphi)$ однозначно задается значениями полиномиальных коэффициентов в (11) и (12), образующих соответствующие векторы параметров $\Delta^y = (\Delta_0^y, \Delta_1^y, \dots, \Delta_N^y)$ и $\Delta^\varphi = (\Delta_0^\varphi, \Delta_1^\varphi, \dots, \Delta_M^\varphi)$. В результате на основе (7), (11) и (12) параметрическое представление управляющего воздействия имеет вид

$$u(y, \varphi) = u^{(1)}(y)u^{(2)}(\varphi) = (\Delta_0^y + \Delta_1^y y + \dots + \Delta_N^y y^N) \times (\Delta_0^\varphi + \Delta_1^\varphi \varphi + \dots + \Delta_M^\varphi \varphi^M) = \tilde{\Delta}_0 (1 + \tilde{\Delta}_1^y y + \dots + \tilde{\Delta}_N^y y^N) (1 + \tilde{\Delta}_1^\varphi \varphi + \dots + \tilde{\Delta}_M^\varphi \varphi^M), \quad (13)$$

где $\tilde{\Delta}_0 = \Delta_0^y \Delta_0^\varphi$; $\tilde{\Delta}_i^y = \Delta_i^y / \Delta_0^y$, $i = \overline{1, N}$; $\tilde{\Delta}_j^\varphi = \Delta_j^\varphi / \Delta_0^\varphi$, $j = \overline{1, M}$, и, следовательно, вектор $\Delta = (\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1^y, \dots, \tilde{\Delta}_N^y, \tilde{\Delta}_1^\varphi, \dots, \tilde{\Delta}_M^\varphi)$ искомого управления содержит $N + M + 1$ параметр.

При этом температурное поле $\theta(x^*, y, \varphi, u^{(1)}, u^{(2)}) = \theta(x^*, y, \varphi, \Delta)$ также является функцией рассматриваемого вектора Δ параметров и вычисляется как реакция на управляющее воздействие (13) при заданных значениях N и M и векторе Δ . Использование параметрического представления температурного поля $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta)$ позволяет перейти от исходной некорректно поставленной обратной задачи к эквивалентной задаче параметрической оптимизации относительно вектора Δ , минимизирующей абсолютное отклонение расчетного температурного состояния от измеряемого в равномерной метрике оценивания

$$I^0(\Delta) = \max_{\substack{\varphi \in [0, \varphi^*] \\ y \in [0, 1]}} |\theta(x^*, y, \varphi, \Delta) - f(y, \varphi)| \rightarrow \min_{\Delta} \quad (14)$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решение полученной задачи математического программирования (14), подобно [14–16], может основываться на известных качественных свойствах оптимальных температурных распределений, обладающих при $\Delta = \Delta^0$ наилучшим равномерным приближением к требуемому состоянию $f(y, \varphi)$. Данные свойства фиксируют в отдельных точках $z^0 = (y^0, \varphi^0)$ на всей пространственно-временной области идентификации достижение предельных отклонений расчетной температуры $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0)$ от заданной $f(y, \varphi)$, равных $\pm I^0$, и тем самым устанавливают конфигурацию погрешности $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$ аппроксимации температурного распределения $f(y, \varphi)$. Число точек, где достигаются предельно допустимые максимальные по абсолютной величине значения по-

грешности $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$, характеризующие разными знаками, должно быть не меньше числа неизвестных оптимального процесса [14], в роли которых выступают вектор Δ параметров искомого управления и сама величина погрешности I^0 . Таким образом, при поиске аппроксимирующей функции $u(y, \varphi)$, заданной, согласно (13), фиксированными значениями N и M , на наблюдаемой пространственно-временной области Ω всегда найдутся такие $R = N + M + 2$ точек $z = z_k^0 = (y_k^0, \varphi_k^0)$, $k = \overline{1, R}$, для которых выполняются равенства

$$\begin{aligned} & \left| \theta(x^*, y_k^0, \varphi_k^0, \Delta^0) - f(y, \varphi) \right| = I^0(\Delta^0), \\ & k = \overline{1, R}; \quad \Delta^0 = (\tilde{\Delta}_0^0, \tilde{\Delta}_1^{y^0}, \dots, \tilde{\Delta}_N^{y^0}, \tilde{\Delta}_1^{\varphi^0}, \dots, \tilde{\Delta}_M^{\varphi^0}). \end{aligned} \quad (15)$$

В силу замкнутости системы равенств (15) относительно всех параметров оптимального управления, ее возможно перевести в систему расчетных уравнений относительно этих параметров. Последующее решение полученной системы и окажется решением задачи полубесконечной оптимизации (14).

Специфика данной задачи по сравнению с одномерными случаями, где минимизация ошибки равномерного приближения осуществляется по одной (временной или пространственной) переменной, заключается в требовании достижения минимаксной погрешности $I^0(\Delta^0) = \max_{\varphi, y} |\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)|$ аппроксимации $f(y, \varphi)$ на всей пространственно-временной области Ω . В связи со сложным многоэкстремальным характером зависимости $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$ от искомого вектора параметров, пространственной координаты и времени в общем случае может возникнуть множество вариантов комбинаций расположения точек $z^0 = (y^0, \varphi^0)$ с предельно допустимыми отклонениями I^0 , соответствующих равенствам (15). Эти варианты различаются формой поверхности распределения $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$ по переменным y и φ и координатами (y^0, φ^0) точек z^0 . Процедура опознавания точек z^0 на плоскости (y, φ) и знаков предельных отклонений I^0 в этих точках на множестве возможных вариантов представляет основную сложность при решении двумерной задачи. Тем не менее в большинстве ситуаций, представляющих практический интерес, на основе физических закономерностей процесса теплопроводности возможно существенно уменьшить число претендентов на роль точек z^0 альтернанса и среди оставшихся вариантов (если их количество больше одного), отвечающих системе равенств (15), выделить единственный вариант распределения $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$, обес-

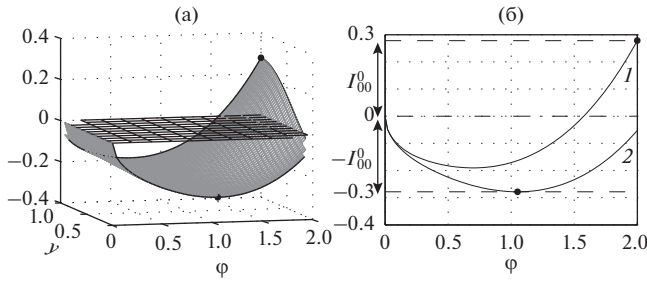


Рис. 1. Конфигурация погрешности аппроксимации температурного поля $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$, $y \in [0, 1], \varphi \in [0, \varphi^*]$ (а); $1 - y_1^0 = 1, 2 - y_2^0 = 0, \varphi \in [0, \varphi^*]$ (б) при $N = M = 0$.

печивающий выполнение минимаксного соотношения (14).

С целью распространения результатов решения одномерных ОЗТ по идентификации сосредоточенного граничного воздействия $q(\varphi)$ на двумерную область будем далее рассматривать конфигурацию поверхности температурной невязки как совокупность температурных кривых $\theta(x^*, y_k, \varphi, \Delta^0) - f(y_k, \varphi)$, $k = \overline{1, R}$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$, характеризующих предельно допустимыми отклонениями, достигаемыми на различных сечениях $y_k = \text{const}$ по объему тела $y_k \in [0, 1]$. При этом число точек альтернанса на совокупности зависимостей $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$ во времени $\varphi \in [0, \varphi^*]$ соотносится с количеством искомых параметров оптимального управления, но достигаются они в точках с разными координатами y_k .

Методика решения двумерных граничных ОЗТ, основанная на минимаксной оптимизации погрешности аппроксимации наблюдаемого температурного поля, может быть сведена к следующей последовательности действий.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА

Решается последовательность задач полубесконечной оптимизации (14), ориентированных на выявление формы кривой $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$ для различных значений N и M , поочередно возрастающих, начиная с $N = M = 0$. На каждом этапе система равенств (15) трансформируется в систему R расчетных соотношений

$$\theta(x^*, y_k^0, \varphi_k^0, \Delta^0) - f(y_k^0, \varphi_k^0) = \pm I^0(\Delta^0), \quad k = \overline{1, R}, \quad (16)$$

с R неизвестными: $N + M + 1$ параметрами оптимального управления $u^0(y, \varphi)$ и величиной минимакса $I_{NM}^0(\Delta^0)$. Эта система фиксирует достижение предельно допустимых отклонений $\pm I^0$ в R точках. Для определения дополнительных неиз-

вестных – координат внутренних, отличных от границ заданной области Ω , точек минимума или максимума поверхности $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$, – используются соотношения – условия существования экстремумов в этих точках по соответствующему временному

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, y_{ex\ i}^0, \varphi_{ex\ j}^0, \tilde{\Delta}^0) - f(y_{ex\ i}^0, \varphi_{ex\ j}^0)) = 0 \quad (17)$$

или пространственному аргументу

$$\frac{\partial}{\partial y} (\theta(x^*, y_{ex\ i}^0, \varphi_{ex\ j}^0, \tilde{\Delta}^0) - f(y_{ex\ i}^0, \varphi_{ex\ j}^0)) = 0. \quad (18)$$

Для каждого конкретного случая, заданного значениями N и M , проблема сводится к выбору соответствующей системы (16)–(18) и вычислению ее корней. При этом на первых этапах вычислительной процедуры могут использоваться аналогии с одномерными ситуациями, позволяющими конкретизировать расположение точек альтернанса и соответствующую расчетную систему уравнений. Например, результаты решения одномерных задач [11, 17] показывают, что первыми претендентами на роль точек альтернанса являются точки на границах $\partial\Omega|_{\substack{0 \leq y \leq 1, \varphi = \varphi^* \\ y = 1, 0 \leq \varphi \leq \varphi^*}}$ рассмат-

риваемой пространственно-временной области. В двумерном случае, для демонстрируемого ниже примера, простейший случай $N = M = 0$, соответствующий постоянному управлению $u(y, \varphi) = \tilde{\Delta}_0$, приводит к очевидному варианту формы разности $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$ с двумя точками экстремума на сечениях $y_1^0 = 1$ и $y_2^0 = 0$ в моменты времени $\varphi_1^0 = \varphi^*$ и $\varphi_2^0 = \varphi_{ex}^0$ (рис. 1). При этом в точках $z_1^0 = (y_1^0, \varphi_1^0)$ и $z_2^0 = (y_2^0, \varphi_2^0)$ достигаются соответственно максимальное и минимальное значения температурной невязки, что согласуется с законом знакочередования предельных отклонений [14].

При увеличении значений N или M в расчетной конфигурации $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$ появляются дополнительные точки с предельно допустимыми отклонениями $\pm I^0$. По-прежнему, варианты $y^0 = 1$ или $y^0 = 0$, в том числе соответствующие расположению в “угловых” точках ($y^0 = 1, \varphi^0 = \varphi^*$) или ($y^0 = 0, \varphi^0 = \varphi^*$), остаются первоочередными, но при этом предельно допустимые отклонения достигаются также во внутренних точках $0 < y^0 < 1$, число которых возрастает с увеличением порядков N и M . Ситуация усложняется тем, что для двумерной модели температурного поля в общем случае не выполняется правило знакочередования предельных температурных отклонений, которое существенно ограничивает число вариантов конфигурации $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$.

Таким образом, число претендентов на роль точек z^0 может оказаться больше их минимально необходимого количества, равного R , и заранее выявить конкретный, зависящий от исходных данных, вариант расположения точек альтернанса из всех возможных уже не удастся.

В этом случае возможно применить специальным образом организованную вычислительную процедуру, подобную [14, 18], основанную на решении ряда задач оптимизации для возрастающих с достаточно малым шагом значений очередного $N + 1$ -го или $M + 1$ -го параметра относительно решенной на предыдущем шаге задачи, заданной N и M параметрами.

Пусть на очередном этапе найдено решение $\Delta^0 = (\tilde{\Delta}_0^0, \tilde{\Delta}_1^0, \dots, \tilde{\Delta}_{N^*}^0, \tilde{\Delta}_1^0, \dots, \tilde{\Delta}_{M^*}^0)$ минимаксной задачи (14) в классе полиномиальных функций при $N = N^*, M = M^*$. Конфигурация $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$ характеризуется наличием $N^* + M^* + 2$ точек альтернанса. Пусть на следующем этапе увеличивается порядок аппроксимирующей функции $u^{(2)}(\varphi)$, т.е. $N = N^*, M = M^* + 1$, и искомым вектор параметров имеет вид $\Delta^0 = (\tilde{\Delta}_0^0, \tilde{\Delta}_1^0, \dots, \tilde{\Delta}_{N^*}^0, \tilde{\Delta}_1^0, \dots, \tilde{\Delta}_{M^*}^0, \tilde{\Delta}_{M^*+1}^0)$. Решается задача оптимизации, заданная соответствующей системой расчетных уравнений (16)–(18), для ряда увеличивающихся с достаточно малым шагом значений $\tilde{\Delta}_{M^*+1}^0$ до тех пор, пока абсолютное значение невязки температуры в какой-либо из вновь появляющихся точек экстремумов не сравняется со значениями невязки в других точках z^0 и не станет равным $I_{N^*M^*+1}^0(\Delta^0)$. Такая ситуация соответствует наличию в форме $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$, $N^* + M^* + 3$ точек альтернанса. Начальные приближения для решения очередной задачи могут основываться на результатах решения расчетной системы на предыдущем шаге.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

Решение прямой задачи теплопроводности производилось на основе двумерной модели, найденной в результате последовательного применения двух конечных интегральных преобразований [19] по пространственным аргументам x и y с ядрами, равными собственным функциям $K(\mu_m x) = \cos \mu_m x$ и $K^*(\lambda_n y) = \cos \lambda_n y$, где $\mu_m^2 = \pi^2 m^2$, $m = 0, 1, 2, \dots$ и $\lambda_n^2 = \pi^2 n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ – собственные числа, полученные на основе решения уравнений $\sin \mu = 0$ и $\sin \lambda = 0$ соответственно. Расчетное температурное поле задается в виде двумерного бесконечного ряда относительно коэффициентов (временных мод) $\bar{\theta}(\mu_m, \lambda_n, \varphi)$ разложения $\theta(x, y, \varphi)$ по $K(\mu_m x)$ и $K^*(\lambda_n y)$ [19]

$$\begin{aligned} \theta(x, y, \varphi) &= \int_0^\varphi q_{00}(\tau) d\tau + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^\infty \cos(\mu_m x) \int_0^\varphi q_{m0}(\tau) e^{-\mu_m^2(\varphi-\tau)} d\tau + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^\infty \cos(\lambda_n y) \int_0^\varphi q_{0n}(\tau) e^{-\lambda_n^2(\varphi-\tau)} d\tau + \\ &+ 4 \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \cos(\mu_m x) \cos(\lambda_n y) \int_0^\varphi q_{mn}(\tau) e^{-(\mu_m^2 + \lambda_n^2)(\varphi-\tau)} d\tau, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$q_{mn}(\varphi) = q_n(\varphi) \cos \pi m, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \tag{20}$$

– изображение функции $q(y, \varphi)$,

$$q_n(\varphi) = \int_0^1 q(y, \varphi) \cos(\pi n y) dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{21}$$

Искомая функция $q^*(y, \varphi)$, согласно (6), представлена в виде

$$q^*(y, \varphi) = \sin(\alpha \pi y) (e^{\beta \varphi} - 1). \tag{22}$$

Соотношения (19)–(21) с учетом (22) приводят к выражению для температурного поля при $\alpha \neq 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \theta(x, y, \varphi) &= \frac{1}{\pi \alpha} (1 - \cos \pi \alpha) \frac{e^{\beta \varphi} - \beta \varphi - 1}{\beta} + \\ &+ \frac{2}{\pi \alpha} (1 - \cos \pi \alpha) \sum_{m=1}^\infty (-1)^m \cos(\pi m x) \Psi_1(\varphi, m, 0) + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^\infty \cos(\pi n y) \Psi_2(\alpha, n) \Psi_1(\varphi, 0, n) + \\ &+ 4 \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty (-1)^m \cos(\pi m x) \cos(\pi n y) \Psi_2(\alpha, n) \Psi_1(\varphi, m, n), \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(\varphi, m, n) &= \frac{e^{\beta \varphi} - e^{-\pi^2(m^2+n^2)\varphi}}{\beta + \pi^2(m^2 + n^2)} - \frac{1 - e^{-\pi^2(m^2+n^2)\varphi}}{\pi^2(m^2 + n^2)}, \\ \Psi_2(\alpha, n) &= \frac{\alpha}{\pi} \frac{1 - (-1)^n \cos \pi \alpha}{\alpha^2 - n^2}. \end{aligned}$$

На основе выражения (23) в результате проведения вычислительного эксперимента на интервале $\varphi \in [0, \varphi^*]$ в точках на линии ($x = x^*$; $y \in [0, 1]$) были получены двумерные температурные распределения $f(y, \varphi) = \theta(x^*, y, \varphi)$, используемые как входная информация при решении обратной задачи.

Серия ОЗТ была решена для случая возрастающих значений N и M в классе $N = \overline{0, 3}$, $M = \overline{0, 3}$. В общем случае при $N = M = 3$ искомое управление имеет вид

Точность решения задачи в зависимости от значений N и M

N	M	Погрешность аппроксимации	
		температурного распределения $I^0(\Delta)$, %	искомой характеристики $\max_{y,\varphi} u(y, \varphi, \Delta^0) - q^*(y, \varphi) $, %
0	0	27.83	74.94
0	1	16.52	68.87
1	1	3.96	15.74
1	2	1.72	15.94
2	2	0.43	4.39
2	3	0.16	2.44
3	3	0.031	0.32

$$u(y, \varphi) = \tilde{\Delta}_0 \left(1 + \tilde{\Delta}_1^y y + \tilde{\Delta}_2^y y^2 + \tilde{\Delta}_3^y y^3 \right) \times \left(1 + \tilde{\Delta}_1^\varphi \varphi + \tilde{\Delta}_2^\varphi \varphi^2 + \tilde{\Delta}_3^\varphi \varphi^3 \right) \quad (24)$$

и определяется вектором параметров $\Delta = (\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1^y, \tilde{\Delta}_2^y, \tilde{\Delta}_3^y, \tilde{\Delta}_1^\varphi, \tilde{\Delta}_2^\varphi, \tilde{\Delta}_3^\varphi)$. Ситуации $N < 3$ или

$M < 3$ можно рассматривать как “частные случаи” управления (24) при равных нулю соответствующих коэффициентах $\tilde{\Delta}_i^y = 0, i = \overline{N+1, 3}$ или $\tilde{\Delta}_j^\varphi = 0, j = \overline{M+1, 3}$.

Параметризованная форма расчетного температурного поля имеет вид

$$\theta(x, y, \varphi) = \tilde{\Delta}_0 \left(1 + \frac{\tilde{\Delta}_1^y}{2} + \frac{\tilde{\Delta}_2^y}{3} + \frac{\tilde{\Delta}_3^y}{4} \right) \times \left(\varphi + \frac{\tilde{\Delta}_1^\varphi}{2} \varphi^2 + \frac{\tilde{\Delta}_2^\varphi}{3} \varphi^3 + \frac{\tilde{\Delta}_3^\varphi}{4} \varphi^4 \right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos(\pi m x) \tilde{\Delta}_0 \left(1 + \frac{\tilde{\Delta}_1^y}{2} + \frac{\tilde{\Delta}_2^y}{3} + \frac{\tilde{\Delta}_3^y}{4} \right) \times \Psi_3(\varphi, m, 0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n y) \Psi_4(\alpha, n) \Psi_3(\varphi, 0, n) + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m \cos(\pi m x) \cos(\pi n y) \times \Psi_4(\alpha, n) \Psi_3(\varphi, m, n),$$

где

$$\Psi_3(\varphi, m, n) = \frac{1}{(\pi^2(m^2 + n^2))^2} \left(\pi^2(m^2 + n^2) \left(1 - e^{-\pi^2(m^2+n^2)\varphi} \right) + \tilde{\Delta}_1^\varphi \left(\pi^2(m^2 + n^2)\varphi - 1 + e^{-\pi^2(m^2+n^2)\varphi} \right) + \tilde{\Delta}_2^\varphi \left(\pi^2(m^2 + n^2)\varphi^2 - 2\varphi + \frac{2}{\pi^2(m^2 + n^2)} \left(1 - e^{-\pi^2(m^2+n^2)\varphi} \right) \right) + \tilde{\Delta}_3^\varphi \left(\pi^2(m^2 + n^2)\varphi^3 - 3\varphi^2 + \frac{6}{\pi^2(m^2 + n^2)} \left(\varphi - \frac{1 - e^{-\pi^2(m^2+n^2)\varphi}}{\pi^2(m^2 + n^2)} \right) \right) \right),$$

$$\Psi_4(\alpha, n) = \frac{\tilde{\Delta}_0}{\pi^2 n^2} \left(\tilde{\Delta}_1^y \left((-1)^n - 1 \right) + \left(2\tilde{\Delta}_2^y + 3\tilde{\Delta}_3^y \right) (-1)^n - \frac{6\tilde{\Delta}_3^y}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \right).$$

Некоторые результаты решения соответствующих ОЗТ при $N = \overline{0, 3}, M = \overline{0, 3}$ приведены в таблице 1 и на рис. 1–4.

Как видно из представленных результатов, увеличение значений N и M приводит к уменьшению погрешности аппроксимации температур-

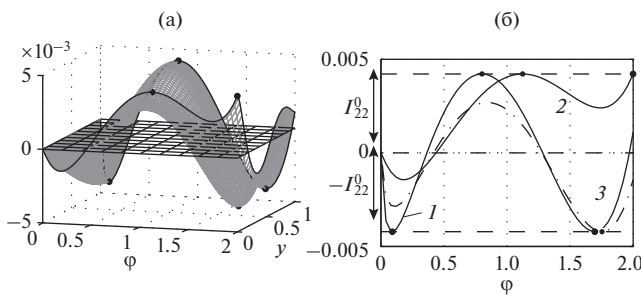


Рис. 2. Конфигурация $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi), y \in [0, 1], \varphi \in [0, \varphi^*]$ (а); $1 - y_1^0 = 1, 2 - y_2^0 = 0, 3 - y_3^0 = y_{ex1}^0$ (б) при $N = M = 2$.

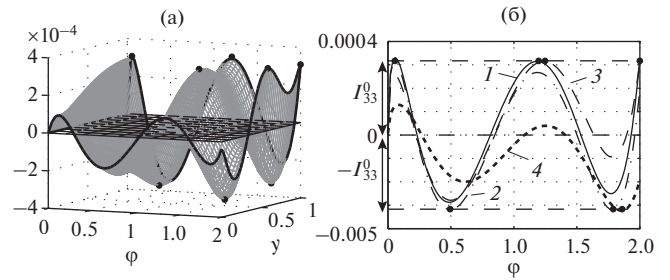


Рис. 3. Конфигурация $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi), y \in [0, 1], \varphi \in [0, \varphi^*]$ (а); $1 - y_1^0 = 1, 2 - y_2^0 = y_{ex1}^0, 3 - y_3^0 = y_{ex2}^0, 4 - y_4^0 = y_{ex3}^0$ (б) при $N = M = 3$.

ного поля, которая стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$ и $M \rightarrow \infty$.

В подавляющем большинстве практических ситуаций на первых этапах вычислительной процедуры при малых значениях N и M величина $I^0(\Delta^0)$ и соответствующее значение ошибки $\max_{y,\varphi} |u(y, \varphi, \Delta^0) - q^*(y, \varphi)|$ идентификации управляющего воздействия значительно превышают допустимую погрешность решения задачи. Эти этапы выполняются для того, чтобы получить решение, которое может служить начальным приближением на последующем шаге.

Например, в классе $N = M = 0$ постоянных управлений $u(y, \varphi) = \tilde{\Delta}_0$ конфигурация $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$ характеризуется двумя точками $z_j^0 = (y_j^0, \varphi_j^0), j = 1, 2$ с предельно допустимыми, противоположными по знаку, отклонениями $I_{00}^0(\Delta^0)$ (рис. 1) и задача (14) сводится к решению относительно единственного параметра управления $\tilde{\Delta}_0$, величины I_{00}^0 и неизвестной координаты φ_{ex}^0 системы трех уравнений (система конкретизирована для рассматриваемого случая):

$$\begin{aligned} \theta(x^*, 1, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - f(1, \varphi^*) &= I_{00}^0, \\ \theta(x^*, 0, \varphi_{ex}^0, \tilde{\Delta}^0) - f(0, \varphi_{ex}^0) &= -I_{00}^0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, 0, \varphi_{ex}^0, \tilde{\Delta}^0) - f(0, \varphi_{ex}^0)) &= 0. \end{aligned}$$

Далее с увеличением значений N и M в общем случае может возникать несколько вариантов конфигурации $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$, отвечающих системе (15). Для рассматриваемого примера (22), (23), (25) при $N = M = 2$ система расчетных уравнений, соответствующая конфигурации, представленной на рис. 2, имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(x^*, 1, \varphi^{(1)}, \Delta^0) - f(1, \varphi^{(1)}) &= (-1)^s I_{22}^0; \\ \varphi^{(1)} &= (\varphi_{ex\ s}^0), \quad s = \overline{1, 3}; \\ \theta(x^*, 0, \varphi^{(0)}, \Delta^0) - f(1, \varphi^{(0)}) &= I_{22}^0; \\ \varphi^{(0)} &= (\varphi_{ex4}^0, \varphi^*); \\ \theta(x^*, y_{ex}^0, \varphi_{ex5}^0, \Delta^0) - f(y_{ex}^0, \varphi_{ex5}^0) &= -I_{22}^0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, 1, \varphi^{(1)}, \Delta^0) - f(1, \varphi^{(1)})) &= 0; \\ \varphi^{(1)} &= (\varphi_{ex\ s}^0), \quad s = \overline{1, 3}; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, 0, \varphi_{ex4}^0, \Delta^0) - f(0, \varphi_{ex4}^0)) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, y_{ex}^0, \varphi_{ex5}^0, \Delta^0) - f(y_{ex}^0, \varphi_{ex5}^0)) &= 0; \end{aligned}$$

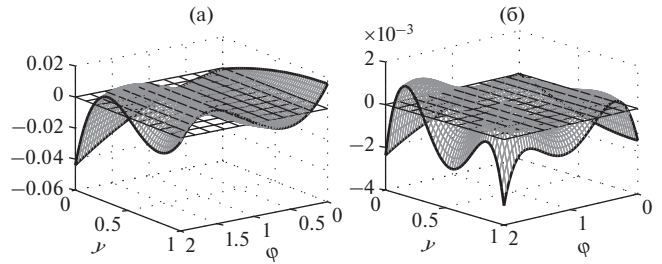


Рис. 4. Погрешность аппроксимации идентифицируемого воздействия $u(y, \varphi, \Delta^0) - q^*(y, \varphi)$, $y \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$: (а) – $N = M = 2$, (б) – $N = M = 3$.

$$\frac{\partial}{\partial y} (\theta(x^*, y_{ex}^0, \varphi_{ex5}^0, \Delta^0) - f(y_{ex}^0, \varphi_{ex5}^0)) = 0.$$

При $N = M = 3$ количество сечений y_k , на которых достигаются предельно допустимые отклонения, опять увеличивается, что ведет к возрастанию числа вариантов конфигурации $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - f(y, \varphi)$. Результирующая система уравнений, обеспечивающая решение задачи (14), соответствует варианту, представленному на рис. 3, и имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(x^*, 1, \varphi^{(1)}, \Delta^0) - f(1, \varphi^{(1)}) &= I_{33}^0; \\ \varphi^{(1)} &= (\varphi_{ex\ s}^0, \varphi^*), \quad s = 1, 2; \\ \theta(x^*, y_{ex1}^0, \varphi_{ex\ s}^0, \Delta^0) - f(y_{ex1}^0, \varphi_{ex\ s}^0) &= -I_{33}^0; \quad s = 3, 4; \\ \theta(x^*, y_{ex2}^0, \varphi^{(ex2)}, \Delta^0) - f(y_{ex2}^0, \varphi^{(ex2)}) &= I_{33}^0; \\ \varphi^{(ex2)} &= (\varphi_{ex5}^0, \varphi^*); \\ \theta(x^*, y_{ex3}^0, \varphi_{ex6}^0, \Delta^0) - f(y_{ex3}^0, \varphi_{ex6}^0) &= -I_{33}^0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, 1, \varphi^{(1)}, \Delta^0) - f(1, \varphi^{(1)})) &= 0; \\ \varphi^{(1)} &= (\varphi_{ex\ s}^0), \quad s = 1, 2; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, y_{ex\ d}^0, \varphi^{(ex\ d)}, \Delta^0) - f(y_{ex\ d}^0, \varphi^{(ex\ d)})) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial y} (\theta(x^*, y_{ex\ d}^0, \varphi^{(ex\ d)}, \Delta^0) - f(y_{ex\ d}^0, \varphi^{(ex\ d)})) &= 0; \\ d = \overline{1, 3}; \quad \varphi^{(ex1)} &= (\varphi_{ex3}^0, \varphi_{ex4}^0); \\ \varphi^{(ex2)} &= \varphi_{ex5}^0; \quad \varphi^{(ex3)} = \varphi_{ex6}^0. \end{aligned}$$

Погрешность $\max_{y,\varphi} |u(y, \varphi, \Delta^0) - q^*(y, \varphi)|$ приближения идентифицируемой функции в общем случае убывает с ростом N и M , но их взаимосвязь имеет немонотонный характер. При практической реализации поочередное увеличение значений N и M заканчивается при выполнении на оче-

редном l -м шаге неравенства $I_l^0(\Delta) \leq \delta_1$ или $|I_l^0(\Delta) - I_{l-1}^0(\Delta)| \leq \delta_2$, где δ_1 и δ_2 задаются априори. Опыт решения конкретных задач показывает, что в большинстве ситуаций при $\delta_1 \leq 1\%$ обеспечивается погрешность идентификации $u(y, \varphi)$ до 10%, а при $\delta_1 \leq 0.1\%$ – в пределах одного процента. Максимальные отклонения наблюдаются в “угловых” точках – в последний момент времени ($y^0 = 1, \varphi^0 = \varphi^*$) или ($y^0 = 0, \varphi^0 = \varphi^*$) или в начале интервала идентификации ($y^0 = 1, \varphi^0 = 0$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в работе метод решения ОЗТ на основе минимаксной оптимизации погрешности аппроксимации наблюдаемого температурного состояния позволяет получить приближенное аналитическое описание плотности теплового потока, зависящей от пространственной координаты и времени в виде произведения двух полиномиальных функций одной переменной.

Сужение класса искоемых решений обеспечивает приведение исходной некорректно поставленной обратной задачи к задаче математического программирования, решение которой относительно параметров идентифицируемого воздействия осуществляется на основе специального метода, учитывающего альтернативные свойства оптимальных решений, и позволяет сохранить качественные особенности процессов с распределенными параметрами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-08-00565).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
3. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989. 312 с.
4. Мацевитый Ю.М., Гайшун И.В., Борухов В.Т., Костиков А.О. Параметрическая и функциональная идентификация тепловых процессов // Пробл. машиностроения. 2011. Т. 14. № 3. С. 40.
5. Алифанов О.М., Егоров Ю.В. Алгоритм и результаты решения граничной обратной задачи теплопроводности в двумерной постановке // ИФЖ. 1985. Т. 48. № 4. С. 658.
6. Алифанов О.М., Ненарокомов А.В. Трехмерная граничная обратная задача теплопроводности // ТВТ. 1999. Т. 37. № 2. С. 231.
7. Guerrier B., Benard C. Two-dimensional Linear Transient Inverse Heat Conduction Problem – Boundary Condition Identification // J. Thermophys. Heat Transfer. 1993. V. 7. № 3. P. 472.
8. Кузин А.Я. Регуляризованное численное решение нелинейной двумерной обратной задачи теплопроводности // ПМиТФ. 1995. № 1. С. 106.
9. Колесник С.А., Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л. О граничной обратной задаче теплопроводности по восстановлению тепловых потоков к границам анизотропных тел // ТВТ. 2015. Т. 53. № 1. С. 72.
10. Алифанов О.М., Керов Н.В. Определение параметров внешнего теплового нагружения из решения двумерной обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1981. Т. 41. № 4. С. 581.
11. Рапопорт Э.Я., Плишивцева Ю.Э. Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности // Изв. РАН. Энергетика. 2002. № 5. С. 144.
12. Diligenskaya A. Estimation of the Heat Flux Density During the Induction Heating Process Based on the Parametric Optimization // Int. J. Microstruct. Mater. Prop. 2016. V. 11. № 1/2. P. 5.
13. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения. М.: Наука, 1978. 271 с.
14. Рапопорт Э.Я. Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. 336 с.
15. Рапопорт Э.Я. Точный метод в задачах оптимизации нестационарных процессов теплопроводности // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1978. № 4. С. 137.
16. Рапопорт Э.Я., Плишивцева Ю.Э. Алгоритмически точный метод параметрической оптимизации в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Автоматика. 2009. Т. 45. № 5. С. 103.
17. Дилигенская А.Н., Рапопорт Э.Я. Аналитические методы параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности с внутренним тепловыделением // ИФЖ. 2014. Т. 87. № 5. С. 1082.
18. Рапопорт Э.Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Металлургия, 1993. 278 с.
19. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Наука, 1970. 712 с.