

УДК 532.529

СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ И КАПЕЛЬ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКАХ

© 2019 г. А. Ю. Вараксин^{1, 2, *}

¹Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail: varaksin_a@mail.ru

Поступил в редакцию 21.09.2018 г.

После доработки 11.01.2019 г.

Принят к публикации 27.03.2019 г.

Рассмотрены проблемы и особенности учета столкновений частиц (капель) в турбулентных двухфазных потоках. Описаны развитые подходы определения ядер столкновений монодисперсных и бидисперсных частиц (капель) в однородной изотропной турбулентности, а также при совместном действии турбулентности, градиента осредненной скорости и силы тяжести. Приведены и проанализированы результаты экспериментальных и расчетно-теоретических исследований влияния столкновений на характеристики двухфазных струйных течений и течений в каналах.

DOI: 10.1134/S0040364419040239

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.

1. Основные характеристики процесса столкновений.

1.1. Частота и ядро столкновений.

1.2. Время и длина свободного пробега между столкновениями.

1.3. Столкновительное число Стокса.

2. Два подхода в теории столкновений частиц.

2.1. Цилиндрическая формулировка.

2.2. Сферическая формулировка.

2.3. Частные случаи.

3. Столкновения монодисперсных частиц в турбулентном потоке.

3.1. Частота столкновений монодисперсных частиц в изотропной турбулентности.

3.2. Частота столкновений частиц при совместном действии турбулентности и градиента осредненной скорости.

4. Столкновения бидисперсных частиц в однородном турбулентном потоке.

4.1. Частота столкновений бидисперсных частиц в изотропной турбулентности.

4.2. Частота столкновений частиц при совместном действии турбулентности и силы тяжести.

5. Развитые подходы для расчета процесса столкновения.

5.1. Методы определения места столкновения частиц (капель).

5.2. Методы определения характеристик частиц после столкновения.

5.3. Методы определения характеристик капель после столкновения.

6. Влияние столкновений на характеристики двухфазного потока.

6.1. Влияние столкновений на характеристики двухфазных турбулентных струйных течений.

6.2. Влияние столкновений на характеристики двухфазных турбулентных течений в каналах.

Заключение.

Список литературы.

ВВЕДЕНИЕ

Потоки сплошной среды, несущие дисперсную примесь в виде твердых частиц или жидких капель, имеют место в целом ряде природных явлений [1–8]: дожди, грады, воздушные и водяные смерчи, песчаные бури, извержения вулканов, лесные пожары и многие другие. Примерами технических устройств, в которых используются двухфазные течения, являются [9–14]: устройства термоподготовки угля в схемах энерготехнологического использования топлива, камеры сгорания тепловых двигателей, тракты твердоотопленных реактивных двигателей, теплообменники с двухфазными рабочими телами, устройства песко- и дробеструйной обработки различных поверхностей, пневмотранспортеры сыпучих материалов, пылеуловители различных типов и т.п.

Турбулентные двухфазные течения – крайне сложный предмет для изучения. Добавление в по-

ток дисперсной примеси в виде твердых частиц сильно осложняет картину течения. Во-первых, это связано с большим разнообразием свойств вводимых частиц (прежде всего, инерционности и концентрации), которые приводят к реализации многочисленных режимов (классов) течения газозвеси [15, 16]. Во-вторых, теория однофазных турбулентных потоков далека от своего завершения.

Исследования турбулентных двухфазных течений имеют своей целью решение двух основных классов задач — изучение поведения взвешенных в потоке дисперсных частиц (капель) и их обратного влияния на характеристики несущего их течения. В двухфазных потоках могут иметь место различные столкновительные процессы [17]: столкновения частиц между собой (частица — частица); столкновения частиц с телом, обтекаемым двухфазным течением (частица — тело); столкновения частиц со стенками, ограничивающими двухфазный поток (частица — стенка). Все указанные столкновительные процессы могут оказывать определяющее влияние на формирование статистических характеристик движения частиц (капель), а следовательно, оказывать влияние на характеристики несущего их потока газа. Поэтому установление роли контактных взаимодействий в контексте решения двух основных задач изучения двухфазных потоков представляется чрезвычайно актуальным, а исследования турбулентных двухфазных течений приобретают исключительную сложность.

В настоящем обзоре описаны и проанализированы результаты расчетно-теоретических и экспериментальных работ, посвященных нахождению характеристик процесса столкновений частиц (капель) в турбулентных потоках, а также его влияния на параметры течения несущей газовой фазы.

1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА СТОЛКНОВЕНИЙ

1.1. Частота и ядро столкновений

Частота столкновений рассматриваемой частицы со всеми другими частицами f_c при большом количестве частиц в двухфазной системе пропорциональна числовой концентрации (среднему числу частиц в единице объема) N

$$f_c = \beta N, \tag{1}$$

где β — ядро столкновений. Данное название эта величина получила, поскольку присутствует в качестве подынтегральной функции (ядра) в уравнении для изменения (эволюции) размера частиц вследствие коагуляции.

Число столкновений частиц, принадлежащих к разным сортам, в единице объема в единицу времени определяется следующим соотношением:

$$F_c = f_{c12}N_1 = f_{c21}N_2 = \beta N_1N_2, \tag{2}$$

где f_{c12} , f_{c21} — частоты столкновений соответственно частицы сорта 1 с частицами сорта 2 и частицы сорта 2 с частицами сорта 1; N_1 , N_2 — средние числовые концентрации частиц сортов 1 и 2 соответственно.

1.2. Время и длина свободного пробега между столкновениями

Важной характеристикой движения частиц является среднее время между соударениями τ_c , определяемое как

$$\tau_c = f_c^{-1}. \tag{3}$$

Времена между соударениями частиц, принадлежащих к разным сортам, имеют вид

$$\tau_{c12} = f_{c12}^{-1}, \tag{4}$$

$$\tau_{c21} = f_{c21}^{-1}, \tag{5}$$

где τ_{c12} , τ_{c21} — времена между последовательными столкновениями соответственно частицы сорта 1 с частицами сорта 2 и частицы сорта 2 с частицами сорта 1.

Одним из ключевых понятий молекулярной физики является понятие средней длины свободного пробега молекулы, т.е. среднего расстояния, которое пролетает молекула от одного столкновения до следующего. По аналогии с этим понятием в теории двухфазных потоков широко используется термин длина “свободного пробега” частиц. Если известно значение средней скорости частиц, то легко определить средние длины свободного пробега частиц сортов 1 и 2 между последовательными столкновениями как

$$l_{c12} = |\mathbf{V}_1| \tau_{c12}, \tag{6}$$

$$l_{c21} = |\mathbf{V}_2| \tau_{c21}. \tag{7}$$

1.3. Столкновительное число Стокса

Процесс релаксации скоростей сталкивающихся частиц (капель) может быть охарактеризован столкновительным числом Стокса [17–19]

$$Stk_c = \tau_p / \tau_c, \tag{8}$$

где τ_p — время динамической релаксации частиц, τ_c — характерное время между последовательными соударениями. Время динамической релаксации является комплексной характеристикой инерционности дисперсной фазы и представляется как

$$\tau_p = \frac{\tau_{p0}}{C} = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu C}, \tag{9}$$

где $C = \begin{cases} 1 + Re_p^{2/3}/6 & \text{при } Re_p \leq 10^3, \\ 0.11 Re_p/6 & \text{при } Re_p > 10^3. \end{cases}$

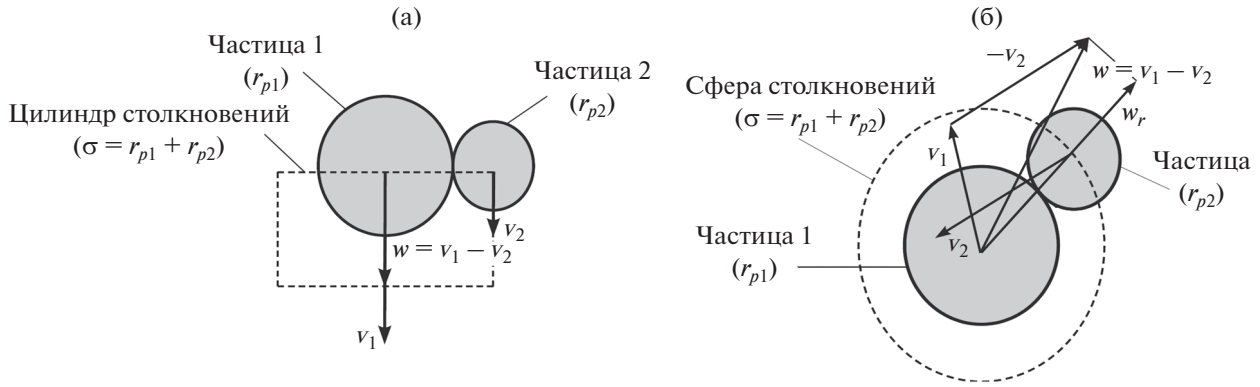


Рис. 1. Иллюстрация двух подходов в теории столкновений частиц: (а) – цилиндрическая формулировка, (б) – сферическая формулировка.

Здесь ρ_p – плотность материала частицы, d_p – ее диаметр, μ – динамическая вязкость несущего газа. В (9) τ_{p0} характеризует время динамической релаксации стоксовой частицы (капли) ($Re_p < 1$). Отметим, что инерционность стоксовой частицы зависит и от характеристик среды, в которой она движется. Выражение для τ_{p0} включает в себя коэффициент динамической вязкости среды. Поправочная функция S учитывает влияние сил инерции на время релаксации нестоксовой частицы (капли). Таким образом, в случае движения нестоксовой частицы ее инерционность зависит также и от такого безразмерного комплекса, как число Рейнольдса частицы (капли), вычисляемое по относительной скорости между фазами и диаметру дисперсной примеси, т.е. $Re_p = |\mathbf{W}|d_p/\nu = |\mathbf{U} - \mathbf{V}|d_p/\nu$.

Столкновительное число Стокса определяет степень влияния соударений на движение дисперсной фазы [17–19]. Если время динамической релаксации дисперсных включений мало по сравнению со временем между последовательными столкновениями ($Stk_c \rightarrow 0$), то частицы (капли) быстро восстанавливают свою первоначальную скорость. В этом случае соударения практически не оказывают влияния на динамику дисперсной фазы. В другом предельном случае время между столкновениями намного меньше времени динамической релаксации частиц (капель) ($Stk_c \rightarrow \infty$) и движение дисперсной фазы в значительной степени определяется процессами межчастичных (межкапельных) столкновений.

2. ДВА ПОДХОДА В ТЕОРИИ СТОЛКНОВЕНИЙ ЧАСТИЦ

Целью теоретического анализа процесса соударений частиц является нахождение ядра их столкновений. Данная характеристика напрямую связана с частотой соударений дисперсной фазы

двухфазного потока – одной из ключевых характеристик межчастичных столкновений (см. 1.1).

В этом разделе рассмотрены два возможных подхода (формулировки) к определению ядра столкновений частиц.

2.1. Цилиндрическая формулировка

Рассмотрим столкновения частиц сортов 1 и 2 с радиусами r_{p1} и r_{p2} . Согласно данному подходу вводится понятие о “цилиндре столкновений”. Центр рассматриваемой частицы радиусом r_{p1} находится на оси цилиндра с радиусом, равным сумме радиусов соударяющихся частиц, т.е. $\sigma = r_{p1} + r_{p2}$. В момент столкновения центр частицы сорта 2 находится на поверхности “цилиндра столкновений” (рис. 1а).

В рамках цилиндрической формулировки ядро столкновений β связывается с полной относительной скоростью двух частиц $|\bar{\mathbf{w}}|$ и радиусом столкновений σ , равным для одинаковых частиц их диаметру d_p , следующим образом:

$$\beta = \pi\sigma^2|\bar{\mathbf{w}}|. \quad (10)$$

Из (10) видно, что ядро столкновений равно объему цилиндра с площадью поперечного сечения $\pi\sigma^2$ и высотой, численно равной средней относительной скорости частиц различных сортов $|\bar{\mathbf{w}}|$.

Отметим, что целый ряд развитых аналитических моделей столкновений частиц (например, [20–23]) основан на широко распространенной в статистической механике цилиндрической формулировке задачи.

2.2. Сферическая формулировка

Аналогично тому, как делалось выше, рассмотрим столкновения частиц сортов 1 и 2 с радиусами r_{p1} и r_{p2} . Согласно рассматриваемому под-

ходу вводится понятие о “сфере столкновений”. Центр данной сферы находится в центре рассматриваемой частицы радиусом r_{p1} , а радиус сферы равен сумме радиусов соударяющихся частиц: $\sigma = r_{p1} + r_{p2}$. В момент столкновения центр частицы сорта 2 находится на поверхности “сферы столкновений” (рис. 1б).

В рамках сферической формулировки задачи ядро столкновений β выражается через осредненную радиальную компоненту относительной скорости $|\bar{w}_r|$ и радиус столкновений σ , равный для одинаковых частиц их диаметру d_p , при помощи соотношения

$$\beta = 2\pi\sigma^2 |\bar{w}_r|, \quad (11)$$

где $w_r = \mathbf{w}\mathbf{r}$ – радиальная компонента относительной скорости между частицами; $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ – относительная скорость частиц; \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 – скорости частиц сортов 1 и 2; \mathbf{r} – единичный вектор, направленный по линии удара от центра первой частицы к центру второй.

Из (11) видно, что ядро столкновений определяется как среднее значение объема жидкости (газа), входящего в “сферу столкновения” за единицу времени. Отметим очень важное обстоятельство. Так как внутри “сферы столкновений” нет источников (стоков), то объемы входящей и выходящей из нее жидкости должны быть равны между собой. Вследствие этого ядро столкновений, определяемое (11) как среднее значение входящего объема жидкости, находится как произведение половины поверхности “сферы столкновений” $2\pi\sigma^2$ и осредненного значения радиальной компоненты относительной скорости $|\bar{w}_r|$.

Разница этих формулировок для малых частиц связана с отличием продольной и поперечной структурных функций при малых расстояниях между двумя точками [24]. Проще говоря, эта разница определяется неравенством интенсивностей пульсаций относительных скоростей сталкивающихся частиц в разных направлениях.

В пионерской работе [25] делается вывод о том, что вид функции плотности вероятности (ФПВ) относительной скорости частиц, используемый при анализе, во многом определяет применимость той или иной формулировки. Однако, как показано в [26, 27], более корректной для ряда задач, например для определения частоты столкновений малоинерционных частиц в турбулентном потоке, является сферическая формулировка. Сделан вывод, что сферическое рассмотрение задачи является более общим, а цилиндрическая постановка приводит к сходным результатам только в некоторых частных случаях. Проанализируем их.

2.3. Частные случаи

Рассмотрим процессы столкновений частиц при их хаотическом движении и осаждении под действием силы тяжести с использованием обоих описанных выше подходов (формулировок).

Столкновения хаотически движущихся молекул (частиц). В этом случае отсутствует пространственная корреляция скоростей частиц, т.е.

$$\overline{w_x^2} = \overline{w_y^2} = \overline{w_z^2} = \chi^2. \quad (12)$$

Запишем ФПВ относительной скорости частиц \mathbf{w} в виде

$$p(\mathbf{w}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\chi)^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}{2\chi^2}\right) \quad (13)$$

и найдем осредненную относительную скорость частиц как

$$|\bar{\mathbf{w}}| = \int_0^\infty w p(\mathbf{w}) 4\pi w^2 dw = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\chi = 2|\bar{w}_r|, \quad (14)$$

где $w = |\mathbf{w}|$.

Из (14) следуют выражения для осредненных значений радиальной компоненты относительной скорости и вектора относительной скорости

$$|\bar{w}_r| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\chi, \quad (15)$$

$$|\bar{\mathbf{w}}| = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\chi. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (11) и (16) в (10), приходим к одному и тому же соотношению для ядра столкновений [25]

$$\beta = \sqrt{8\pi}\sigma^2\chi. \quad (17)$$

Таким образом, обе формулировки (сферическая и цилиндрическая) равнозначны при анализе столкновений хаотически движущихся частиц.

Столкновения частиц при гравитационном осаждении. В этом случае относительная скорость постоянна: $\mathbf{w} = (|\mathbf{W}_{ij}|, 0, 0)$, где $\mathbf{W}_{ij} = \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j$ – относительная скорость витания частиц. Используя цилиндрическую постановку задачи, из (10) имеем

$$\beta = \pi\sigma^2 |\mathbf{W}_{ij}|. \quad (18)$$

Для сферической формулировки можно получить [25]

$$\beta = \pi\sigma^2 \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sin\varphi |\mathbf{W}_{ij}| \cos\varphi d\varphi. \quad (19)$$

Производя интегрирование (19), имеем [25]

$$\beta = \pi\sigma^2 |\mathbf{W}_{ij}|. \quad (20)$$

Сравнивая (18) и (20), приходим к выводу о равнозначности обеих формулировок для случая гравитационного осаждения частиц.

Можно сделать заключение, что при пространственной корреляции скоростей частиц (отсутствует преимущественное направление движения), использование сферической формулировки является более корректным.

3. СТОЛКНОВЕНИЯ МОНОДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Турбулентность – один из основных механизмов, приводящих к столкновениям частиц друг с другом [24]. При вычислении частоты столкновений частиц и соответствующих “столкновительных членов” в уравнениях для характеристик дисперсной фазы обычно используются два основных допущения: 1) учитываются только парные столкновения, 2) процесс столкновений является марковским, т.е. не зависящим от предыдущих столкновений. Таким образом, с учетом описанных допущений для вычисления частоты столкновений необходимо определить ФПВ распределений скоростей двух частиц. Это может быть сделано двумя способами [24]. При первом способе допускается некоррелированность (независимость) движения сталкивающихся частиц по аналогии с процессом столкновений молекул в кинетической теории газов [24, 28–30]. В этом случае двухчастичная ФПВ находится как произведение одночастичных ФПВ. Однако такой способ может использоваться для описания столкновений лишь относительно инерционных частиц, время релаксации которых τ_p много больше характерного времени взаимодействия с турбулентными вихрями T_{Lp} ($\tau_p \gg T_{Lp}$). Движение таких частиц не коррелировано и аналогично хаотическому движению молекул. Вторым способом является моделирование процесса столкновений двух частиц с учетом коррелированности их пульсационного движения из-за взаимодействия с турбулентными вихрями несущего потока. Коррелированность движения частиц должна учитываться, если $\tau_p/T_{Lp} \leq 1$.

3.1. Частота столкновений монодисперсных частиц в изотропной турбулентности

Определение частоты столкновений твердых частиц (жидких капель) в турбулентных потоках представляет большой интерес для анализа целого ряда промышленных и метеорологических [31–33] процессов. Относительно простые решения указанной задачи могут быть получены в рамках приближения однородной изотропной турбулентности.

В этом разделе рассматриваются столкновения, обусловленные только взаимодействием частиц с турбулентными вихрями несущей среды.

Другие многочисленные факторы (броуновское движение [34–37], гравитационная седиментация [38–41], электрические силы [42–48], гидродинамические силы [49–51] и др.) не учитываются.

Взаимодействие инерционных частиц с турбулентными вихрями приводит к двум основным факторам, дающим вклад в ядро столкновений [24]: 1) относительная скорость соседних частиц (турбулентный транспортный эффект), 2) неоднородное распределение частиц в пространстве (эффект кластеризации). Эффект кластеризации или аккумуляции проявляется как тенденция к росту концентрации частиц в областях малой завихренности вследствие действия центробежной силы [52, 53].

Известные аналитические решения задачи о столкновениях частиц в турбулентном потоке получены в предельных случаях безинерционных и высокоинерционных частиц [25, 54].

Теория [25] справедлива для частиц, время релаксации которых меньше колмогоровского временного масштаба ($\tau_p < \tau_K$). Данные частицы полностью следуют турбулентным пульсациям скорости несущей среды и вовлекаются в движение самых мелких вихрей, ответственных за диссипацию энергии турбулентности. Решение [54] справедливо для другого предельного случая, когда время релаксации частиц много больше временного масштаба турбулентности ($\tau_p \gg T_L$). Для таких частиц достаточно учитывать их взаимодействие с энергосодержащими вихрями, а вкладом взаимодействия с мелкомасштабной турбулентностью в ядро столкновений можно пренебречь. Максимальная сложность в определении ядра столкновений возникает в случае наличия в потоке частиц средней инерционности ($\tau_K \leq \tau_p \leq T_L$), когда необходимо учитывать их взаимодействие со всем спектром турбулентных вихрей.

Рассмотрим кратко статистическую модель турбулентных столкновений, справедливую во всем диапазоне инерционности частиц [55–57].

Для определения $|\bar{w}_r|$ плотность вероятности пульсационной составляющей радиальной относительной скорости задается распределением Гаусса

$$p(w_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi w_r'^2}} \exp\left(-\frac{w_r'^2}{2w_r'^2}\right), \quad w_r = W_r + w_r'. \quad (21)$$

Здесь W_r и w_r' – осредненная и пульсационная составляющие радиальной относительной скорости. Интенсивность пульсаций радиальной скорости двух частиц при соударении определяется как

$$\overline{w_r'^2} = 2v'^2(1 - \zeta_{12}), \quad \zeta_{12} = \xi^2 F(\sigma). \quad (22)$$

В выражении (22) v'^2 – интенсивность пульсаций скоростей частиц, ζ_{12} – коэффициент корреляции скоростей двух соударяющихся частиц из-за их взаимодействия с турбулентными вихрями несущей фазы, ξ – коэффициент корреляции скоростей несущей фазы и частицы, $F(\sigma)$ – продольная компонента эйлеровой двухточечной корреляционной функции пульсаций скоростей при допущении о равенстве расстояния между частицами r радиусу столкновений σ .

Для случая, когда отсутствует осредненное относительное движение частиц в радиальном направлении ($W_r = 0$), распределение (21) позволяет выразить среднюю относительную радиальную скорость частиц через интенсивность пульсаций радиальной скорости

$$|\bar{w}_r| = \int_{-\infty}^{\infty} |w_r| p(w_r) dw_r = \left(\frac{2}{\pi} \overline{w_r'^2} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

В [24] показано, что в однородной изотропной стационарной турбулентности при отсутствии осредненного скоростного скольжения кинетическая энергия пульсаций скорости частиц и ковариация скоростей жидкости и частицы совпадают и выражаются через кинетическую энергию пульсаций скорости жидкости как

$$\overline{v'_k v'_k} = \overline{u'_k v'_k} = \overline{f_u u'_k u'_k}, \quad (24)$$

где

$$f_u = \frac{1}{\tau_p} \int_0^{\infty} \Psi_{Lp}(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p}\right) d\tau \quad (25)$$

– коэффициент вовлечения частиц в турбулентное движение.

В случае экспоненциальной автокорреляционной функции Ψ_{Lp} имеем

$$f_u = \left(1 + \frac{\tau_p}{T_{Lp}} \right)^{-1}, \quad (26)$$

где T_{Lp} – время взаимодействия частиц с энергетикой турбулентными вихрями. С учетом (24) коэффициент корреляции скоростей жидкости и частицы принимает вид

$$\xi = f_u^{1/2}. \quad (27)$$

Из (22) и (27) получаем соотношение для коэффициента корреляции скоростей двух частиц в момент столкновения

$$\zeta_{12} = f_u F(\sigma). \quad (28)$$

Из (28) следует вывод, что коэффициент корреляции скоростей частиц равен произведению коэффициента вовлечения частиц в турбулентное

движение f_u и корреляционной функции $F(\sigma)$, учитывающей пространственную коррелированность скоростей жидкости на расстоянии радиуса столкновений σ .

В случае малоинерционных частиц ($d_p < \eta$, $\eta = (v^3/\varepsilon)^{1/4}$ – колмогоровский пространственный микромасштаб) [24] корреляционная функция определяется как

$$F(\sigma) = 1 - \frac{\varepsilon \sigma^2}{30 u'^2 \nu} = 1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{60^{1/2} \text{Re}_\lambda}, \quad (29)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\eta}, \quad \text{Re}_\lambda = \left(\frac{15 u'^4}{\varepsilon \nu} \right)^{1/2}.$$

С учетом (22), (23), (28) и (29) средняя относительная радиальная скорость двух частиц представляется в виде

$$|\bar{w}_r| = \frac{2v'}{\pi^{1/2}} [1 - f_u F(\sigma)]^{1/2} = \frac{2u'}{\pi^{1/2}} \left[f_u \left[1 - f_u \left(1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{60^{1/2} \text{Re}_\lambda} \right) \right] \right]^{1/2}. \quad (30)$$

Подстановка (30) в (11) приводит к следующему соотношению для ядра столкновений:

$$\beta = 4\pi^{1/2} \sigma^2 v' [1 - f_u F(\sigma)]^{1/2} = 4\pi^{1/2} \sigma^2 u' \left[f_u \left[1 - f_u \left(1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{60^{1/2} \text{Re}_\lambda} \right) \right] \right]^{1/2}. \quad (31)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи, вытекающие из (31).

Безынерционные частицы. Для безынерционных частиц ($\tau_p = 0$, $f_u = 1$, $v' = u'$) выражение (31) преобразуется к виду [25]

$$\beta_{ST} = \left(\frac{8\pi\varepsilon}{15\nu} \right)^{1/2} \sigma^3. \quad (32)$$

Инерционный интервал. Большие числа Рейнольдса. В [24] анализируется инерционный интервал изменения времени релаксации частиц ($\tau_k \ll \tau_p \ll T_L$) в пределе больших чисел Рейнольдса ($\text{Re}_\lambda \rightarrow \infty$). В соответствии с колмогоровской теорией локального подобия [58] в инерционном интервале структурная функция представляется известным образом, что приводит к следующим соотношениям для лагранжевой корреляционной функции $\Psi_L(\tau)$ и коэффициента вовлечения частиц f_u :

$$\Psi_L(\tau) = 1 - \frac{C_{0\infty} \varepsilon \tau}{2u'^2}, \quad (33)$$

$$f_u = 1 - \frac{C_{0\infty} \varepsilon \tau_p}{2u'^2}. \quad (34)$$

Подстановка (34) в соотношение (31) приводит к выражению для ядра столкновений в инерционном интервале

$$\beta = b_1 (\varepsilon \tau_p)^{1/2} \sigma^2, \quad b_1 = (8\pi C_{0\infty})^{1/2}. \quad (35)$$

Высокоинерционные частицы. В другом предельном случае высокоинерционных частиц ($\tau_p \rightarrow \infty, f_u \rightarrow 0$) формула (31) переходит к виду [54]

$$\beta_A = 4\pi^{1/2} v' \sigma^2. \quad (36)$$

3.2. Частота столкновений частиц при совместном действии турбулентности и градиента осредненной скорости

В [59] анализируется процесс столкновений частиц, обусловленный совместным влиянием турбулентных пульсаций несущего газа и осредненной составляющей скорости одной частицы относительно другой. Для определения средней радиальной компоненты относительной скорости $|\bar{w}_r|$ необходимо выполнить осреднение по случайному распределению w_r и телесному углу, который характеризует пространственную ориентацию вектора скорости \mathbf{w} относительно вектора \mathbf{r} , соединяющего центры сталкивающихся частиц:

$$|\bar{w}_r| = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |w_r| p(w_r) \sin \varphi d\psi d\varphi dw_r, \quad (37)$$

где ψ – азимутальный угол между вектором \mathbf{r} и осью \mathbf{z} , направленной вертикально вверх; φ – полярный угол в плоскости (x, y) . Далее в [59] выполнено интегрирование (37) по w_r с учетом распределения Гаусса (21):

$$|\bar{w}_r| = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\left(\frac{2w_r'^2}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{W_r^2}{2w_r'^2} \right) + W_r \operatorname{erf} \frac{W_r}{2w_r'} \right] \sin \varphi d\psi d\varphi. \quad (38)$$

Приведенное выражение учитывает как наличие пульсаций радиальной составляющей относительной скорости частиц вследствие турбулентных пульсаций скорости газа, так и наличие радиальной составляющей осредненной относительной скорости. При отсутствии осредненной относительной скорости ($W_r = 0$) выражение (38) переходит в соотношение (23), учитывающее только первый из двух упомянутых факторов.

Поле осредненной скорости газа зададим в виде однородного сдвига $\mathbf{U} = (sz, 0, 0)$. Примем допущение о том, что частицы полностью отслежи-

вают осредненное движение несущей фазы, т.е. $\mathbf{V} = \mathbf{U}$. В этом случае радиальная компонента относительной скорости w_r , обусловленная сдвигом скорости и действием силы тяжести, будет иметь следующий вид:

$$W_r = s\sigma \cos \psi \sin \varphi \cos \varphi, \quad (39)$$

где σ – радиус сферы столкновений ($\sigma = r_{p1} + r_{p2}$).

Из (11) и (38) с учетом (39) в [59] получено выражение для β , учитывающее влияние сдвига скорости, в виде ряда. Не будем приводить конечное соотношение для β из-за его громоздкости. При $(sR)^2 / \overline{w_r'^2} \rightarrow \infty$ найденный ряд сходится к классическому решению [34]

$$\beta_s = \frac{4}{3} s \sigma^3. \quad (40)$$

Также в [59] предложена следующая простая аппроксимация полученного громоздкого выражения:

$$\beta = (\beta_t + \beta_s)^{1/2}, \quad (41)$$

где β_t – турбулентная составляющая суммарного ядра столкновений, β_s – составляющая ядра столкновений за счет сдвига скорости (определяется по (40)).

4. СТОЛКНОВЕНИЯ БИДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ В ОДНОРОДНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

В разделе рассматриваются столкновения в системе частиц, состоящей из частиц двух сортов, в однородном турбулентном потоке, что имеет большое практическое значение, так как относительно легко обобщается на общий случай полидисперсной системы [24].

4.1. Частота столкновений бидисперсных частиц в изотропной турбулентности

Ниже приводятся основные положения обобщения аналитической модели для турбулентного ядра столкновений монодисперсных частиц, рассмотренной в разделе 3.1, на бидисперсную систему [60–62]. Эта модель справедлива во всем диапазоне инерционности частиц, так как учитывает взаимодействие частиц с турбулентными вихрями всех масштабов. Модель основана на допущении, что одноточечная ФПВ скоростей жидкости и частицы представляется в виде нормального распределения. Двухточечная ФПВ скорости жидкости предполагается гауссовой. ФПВ скоростей двух частиц определяется введением совместной двухточечной ФПВ скоростей жидкости и частиц в соответствии с подходом [55]. Интегрированием двухчастичной ФПВ по нормальным к вектору скорости, соединяющему центры

частиц, компонентам скоростей в [24] получена ФПВ для распределения радиальных компонент скоростей частиц.

Двухчастичная ФПВ приводит к распределению (21) для радиальной компоненты относительной скорости пары частиц с интенсивностью пульсаций радиальной скорости двух частиц при контакте [24]

$$\overline{w_r'^2} = v_1'^2 + v_2'^2 - 2\zeta_{12}v_1'v_2'. \quad (42)$$

С учетом соотношения (24) для кинетической энергии пульсаций скоростей частиц и ковариации скоростей жидкости и частиц в однородной изотропной стационарной турбулентности коэффициент корреляции радиальных компонент скоростей сталкивающихся частиц примет вид [24]

$$\zeta_{12} = (f_{u1}f_{u2})^{1/2}F(\sigma). \quad (43)$$

Из (43) видно, что коэффициент корреляции скоростей частиц при контакте (столкновении) равен произведению среднегеометрического из коэффициентов вовлечения частиц в турбулентное движение и корреляционной функции, принимающей во внимание пространственную коррелированность скорости жидкости на расстоянии радиуса столкновений σ . Таким образом, радиальная относительная скорость сталкивающихся частиц согласно (23), (42) и (43) есть [24]

$$|\overline{w}_r| = \left[\frac{2}{\pi} (f_{u1} + f_{u2} - 2f_{u1}f_{u2}F(\sigma)) \right]^{1/2} u'. \quad (44)$$

Для малоинерционных частиц ($d_p < \eta$) подстановка (29) и (44) в (11) дает следующее выражение для ядра столкновений:

$$\begin{aligned} \beta &= \left(8\pi \overline{w_r'^2} \right)^{1/2} = (8\pi)^{1/2} \sigma^2 \times \\ &\times \left(v_1'^2 + v_2'^2 - 2\zeta_{12}v_1'v_2' \right)^{1/2} = \\ &= (8\pi)^{1/2} \sigma^2 u' \left[f_{u1} + f_{u2} - 2f_{u1}f_{u2} \left(1 - \frac{\overline{\sigma^2}}{60^{1/2} \text{Re}_\lambda} \right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (45)$$

В случае монодисперсных частиц (45) переходит в (31). Рассмотрим некоторые предельные случаи.

Безынерционные частицы. Для безынерционных частиц группы 2 ($\tau_{p2} = 0, f_{u2} = 1$) выражение (45) приобретает следующий вид:

$$\beta = (8\pi)^{1/2} \sigma^2 u' \left(1 - f_{u1} + \frac{f_{u1}\overline{\sigma^2}}{15^{1/2} \text{Re}_\lambda} \right)^{1/2}. \quad (46)$$

Если частицы группы 1 также безынерционны ($\tau_{p1} = 0, f_{u1} = 1$), то выражение (45) переходит в полученную в [25] классическую формулу (32).

Инерционный интервал. Большие числа Рейнольдса. В инерционном интервале изменения времен динамической релаксации частиц ($\tau_K \ll \tau_{p\alpha} \ll T_L$)

при больших числах Рейнольдса ($\text{Re}_\lambda \rightarrow \infty$) с учетом приведенного ранее соотношения (34) ядро столкновений (45) записывается как

$$\beta = 2\sigma^2 \left[\pi C_{0\infty} \varepsilon (\tau_{p1} + \tau_{p2}) \right]^{1/2}. \quad (47)$$

Высокоинерционные частицы. В другом предельном случае высокоинерционных частиц ($\tau_{p\alpha} \rightarrow \infty$) их движение оказывается полностью некоррелированным ($\zeta_{12} \rightarrow 0$) и выражение (45) приводит к ядру столкновений [54]

$$\beta_A = (8\pi)^{1/2} \sigma^2 \left(v_1'^2 + v_2'^2 \right)^{1/2}, \quad (48)$$

являющемуся аналогом (36) для случая бидисперсных частиц.

4.2. Частота столкновений частиц при совместном действии турбулентности и силы тяжести

В [24] найдено ядро столкновений частиц в результате одновременного действия двух эффектов — турбулентности и средней относительной скорости частиц различных групп. В качестве причины возникновения осредненной скорости рассмотрено действие силы тяжести. Для нахождения $|\overline{w}_r|$ поступим аналогичным образом (см. 3.2). С этой целью необходимо выполнить осреднение по случайному распределению w_r и телесному углу, который характеризует пространственную ориентацию вектора скорости \mathbf{w} относительно вектора \mathbf{g} , соединяющего центры сталкивающихся частиц согласно (37). В результате интегрирования с учетом гауссова распределения для пульсационной составляющей радиальной компоненты относительной скорости получим выражение (38).

Обусловленная силой тяжести радиальная компонента осредненной относительной скорости двух частиц определяется как

$$W_r = W_g \cos \varphi, \quad (49)$$

где $W_g = |\tau_{p2} - \tau_{p1}|g$ — разность скоростей седиментации (осаждения) двух частиц, g — ускорение силы тяжести.

При интегрировании (38) с учетом (49) и последующей подстановки в (11) можно получить выражение для ядра столкновений, где принимается во внимание суммарное влияние турбулентности и силы тяжести:

$$\beta = \left(8\pi \overline{w_r'^2} \right)^{1/2} \sigma^2 \left[\frac{\exp(-\Sigma^2)}{2} + \frac{\pi^{1/2}}{2} \left(\Sigma + \frac{1}{2\Sigma} \right) \text{erf} \Sigma \right]. \quad (50)$$

Здесь $\Sigma = W_g / (2\overline{w_r'^2})^{1/2}$ — параметр, учитывающий отношение эффектов гравитации и турбулентности на ядро столкновений.

При малых Σ из (50) следует соотношение для ядра столкновений, совпадающее с решением [25] при слабом влиянии гравитации:

$$\beta = \beta_r \left(1 + \frac{\Sigma^2}{3} \right), \quad (51)$$

где β_r – турбулентная составляющая ядра столкновений (45).

В другом предельном случае ($\Sigma \rightarrow \infty$) выражение (50) переходит в известное соотношение [17, 24] для ядра столкновений частиц под действием силы тяжести

$$\beta_g = \pi \sigma^2 W_g. \quad (52)$$

В [24] отмечается, что соотношение (50) справедливо для учета влияния осредненной относительной скорости на ядро столкновений в изотропной турбулентности не только силы тяжести, но и любой другой внешней силы, вызывающей относительное движение частиц. Выражение (50) впервые получено в [54] и затем воспроизведено в [59, 62, 63].

5. РАЗВИТЫЕ ПОДХОДЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОЦЕССА СТОЛКНОВЕНИЯ

Обычно используемый для расчета столкновений алгоритм включает в себя две стадии. Первая предполагает определение места столкновения, вторая – характеристики частиц (капель) после соударения. Необходимо отметить, что в случае столкновения капля расчет характеристик осложняется, так как могут реализовываться различные режимы взаимодействия (отскок, коагуляция, слияние с последующим “растягивающим” или “возвратным” разделением).

5.1. Методы определения места столкновения частиц (капель)

Первым из основных двух этапов учета столкновений частиц (капель) в двухфазных потоках является определение координаты столкновений. На сегодняшний день развито три основных метода (подхода): 1) полностью детерминистский [64], 2) детерминистско-стохастический [65–67], 3) полностью стохастический [68, 69]. Первый подход предполагает полную геометрическую реконструкцию траекторий сталкивающихся частиц и является самым дорогостоящим с точки зрения затрат компьютерного времени. Второй требует определения вероятности столкновения для каждой пары частиц в пределах расчетной ячейки. Третий не требует никакой информации о соседних частицах, но предполагает генерацию фиктивной частицы.

Остановимся подробнее на описании третьего подхода. Учет межчастичного взаимодействия производится посредством генерации некой фиктивной частицы на каждом временном шаге

расчета траектории движения “реальной” частицы. Характеристики генерируемой частицы, такие как диаметр и скорость, определяются исходя из ранее найденных функций распределений свойств частиц (размер, скорость) и корреляций пульсации скорости фиктивной частицы с ее размером. Например, пульсация скорости фиктивной частицы (индекс 2) определяется посредством следующего соотношения [55]:

$$v'_{2,i} = R(\text{Stk}_L) v'_{1,i} + \sigma_i \sqrt{1 - R^2(\text{Stk}_L)} \xi_n, \quad (53)$$

где $R(\text{Stk}_L) = \exp(-0.55 \text{Stk}_L^{0.4})$ – функция числа Стокса в крупномасштабном пульсационном движении ($\text{Stk}_L = \tau_p / T_L$, T_L – макромасштаб турбулентности), $v'_{1,i}$ – i -я составляющая пульсационной скорости “реальной” частицы (индекс 1), σ_i – i -я составляющая среднего значения (rms) скорости частицы в рассматриваемом контрольном объеме, ξ_n – случайное число, подчиняющееся гауссову распределению с математическим ожиданием, равным нулю, и среднеквадратичным отклонением, равным единице.

Затем производится вычисление частоты столкновений между рассматриваемой и фиктивной частицами как

$$f_c = \frac{\pi}{4} (d_{p1} + d_{p2})^2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| N, \quad (54)$$

где \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 – мгновенные скорости реальной и “фиктивной” частиц, N – среднее число частиц в единице объема.

Вероятность столкновения является следующей простой функцией частоты столкновений и лагранжевого временного шага

$$P_c = 1 - \exp(-f_c \Delta t). \quad (55)$$

Далее производится генерация равномерно распределенного случайного числа Ψ , сравнимого затем с вероятностью столкновения. Столкновение имеет место, если $P_c > \Psi$. В противном случае $P_c < \Psi$ столкновение отсутствует, и составляющие скорости реальной частицы не претерпевают изменения.

5.2. Методы определения характеристик частиц после столкновения

Для расчета характеристик частиц после столкновения обычно используются следующие допущения: 1) частицы имеют сферическую форму, 2) рассматриваются только бинарные (парные) столкновения, 3) рассматриваются упругие столкновения (пластическая деформация частиц отсутствует), 4) столкновения происходят мгновенно.

Теоретическое описание процесса столкновения двух частиц в общей постановке на основе

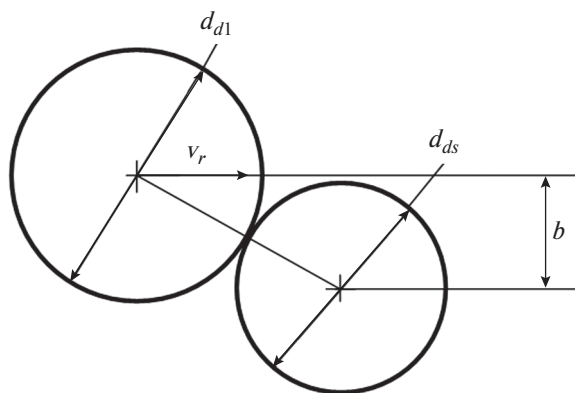


Рис. 2. Схема соударения двух капель.

классической механики приводится в различных монографиях (например, [17, 70, 71]). Соотношения для определения трех проекций линейных и трех проекций угловых скоростей после соударения для первой и второй частиц выводятся с использованием законов сохранения импульса и момента импульса для сталкивающихся частиц.

Для примера приведем соотношения для нахождения линейных скоростей центров тяжести обеих частиц после соударения [17, 70, 71]

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^0 - (\mathbf{w}^0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} + k_f \boldsymbol{\tau})(1 + k_n) \frac{m_{p2}}{m_{p1} + m_{p2}}, \quad (56)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2^0 + (\mathbf{w}^0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} + k_f \boldsymbol{\tau})(1 + k_n) \frac{m_{p1}}{m_{p1} + m_{p2}}, \quad (57)$$

где \mathbf{v}_1^0 и \mathbf{v}_2^0 – соответствующие скорости до удара, \mathbf{w}^0 – относительная скорость центров тяжести частиц до соударения, \mathbf{n} – единичный вектор, направленный по линии удара к центру второй частицы, $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, выходящий из точки касания и направленный перпендикулярно линии удара, m_{p1} и m_{p2} – массы частиц. Приведенные соотношения содержат две важные характеристики процесса столкновения – коэффициент восстановления k_n и коэффициент трения k_f .

Коэффициент восстановления обычно представляют как

$$k_n = - \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{w}^0 \cdot \mathbf{n}}, \quad (58)$$

где \mathbf{w} – относительная скорость центров тяжести частиц после соударения. Он изменяется в диапазоне от нуля до единицы. В случае абсолютно упругого удара $k_n = 1$, а при абсолютно неупругом ударе $k_n = 0$.

Уравнения (56) и (57) соответствуют случаю, когда во время соударения обе частицы как бы скользят по поверхности друг друга. Если же

скольжение частиц прекращается, то результаты будут другими [17, 70, 71]. Условие наличия скольжения имеет вид

$$\frac{\mathbf{w}_{ct}^0 \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{w}_{ct}^0|} < \frac{2}{7f(1 + k_n)}, \quad (59)$$

где \mathbf{w}_{ct}^0 – тангенциальная составляющая относительной скорости соприкасающихся точек частиц до соударения.

Например, в работе [72], посвященной численному исследованию процессов пневмотранспорта частиц стекла (диаметр 130 мкм) в горизонтальном канале, было принято $k_n = 0.9$ и $k_f = 0.4$.

5.3. Методы определения характеристик капель после столкновения

Выше отмечалось, что в случае столкновения капля расчет характеристик осложняется вследствие реализации различных режимов взаимодействия (столкновение с отскоком, слияние (коагуляция), слияние с последующим разделением).

Процесс столкновения капель в общем виде определяется пятью безразмерными параметрами – числами Вебера We, Рейнольдса Re, Онезорге Oh, ударным параметром B и отношением размеров сталкивающихся капель Δ , определяемыми следующим образом:

$$\begin{aligned} We &= \frac{\rho V_r^2 d_{d0}}{\sigma}, & Re &= \frac{\rho V_r d_{d0}}{\mu}, \\ Oh &= \frac{\mu}{\sqrt{\rho \sigma d_{d0}}}, & B &= \frac{b}{r_{ds} + r_{dl}}, & \Delta &= \frac{d_{ds}}{d_{dl}}, \end{aligned} \quad (60)$$

где ρ , σ , μ – плотность, поверхностное натяжение и динамическая вязкость материала капель соответственно; V_r – относительная скорость; d_{d0} – характерный диаметр капли для построения безразмерных параметров; b – проекция расстояния между центрами капель на плоскость, перпендикулярную относительной скорости, в момент соударения (рис. 2); r_{ds} , r_{dl} , d_{ds} , d_{dl} – радиусы и диаметры маленькой и большой капель соответственно.

Необходимо отметить, что $Oh = \sqrt{We}/Re$, т.е. из трех параметров Oh, We и Re только два являются независимыми. Таким образом, общее число независимых определяющих параметров будет равно четырем, а не пяти.

В случае столкновения капель разных размеров в качестве характерного размера принимается, как правило, диаметр мелкой капли, т.е. $d_{d0} = d_{ds}$ [73]. При столкновении капель одинакового размера $d_{ds} = d_{dl} = d_{d0}$ и $\Delta = 1$. Ударный па-

раметр изменяется в диапазоне $0 \leq B < 1$. В случае центрального удара $B = 0$.

Схематичная карта возможных режимов столкновения капель в зависимости от величины двух определяющих критериев (We и B) приведена на рис. 3 [74]. На карте выделены пять основных областей, соответствующих различным режимам: отскоку, слиянию (коагуляции), слиянию с последующим “растягивающим” и “возвратным” разделением. В работах [73–78] найдены конкретные числовые значения основных безразмерных параметров (We , B , Δ), а также пограничные (между различными режимами) кривые и соответствующие им реперные точки для столкновения капель различной вязкости, имеющих большую разницу в размерах и т.п.

Например, в работе [75] найдено семейство кривых, определяющих нижнюю границу для отскока, в виде функций $B = f(We, \Delta, \Psi)$, где Ψ – некоторый формпараметр, зависящий от степени деформации капель в течение соударения. Для капель этанола получено $\Psi = 3.351$. В [76–78] найдены аналогичные семейства кривых, разделяющих режим слияния (коагуляции) и режимы растягивающего (stretching) и возвратного (reflexive) разделений.

Для расчета столкновения капель используются различные модели [79–83]. Большое распространение получили так называемые энергетические модели. В соответствии с ними критерием коагуляции является количество кинетической энергии, которое должно быть трансформировано в потенциальную и внутреннюю энергии перед тем, как капли коагулируют. В работе [84] эффективность коагуляции связывается с критическим значением относительной скорости капель при столкновении (в момент соударения). В [85] для фиксации перехода “соударение–коагуляция” используется критическое число Вебера We_{cr} . Оно достигается, когда капли переходят из режима соударения (отскока) в режим коагуляции (слияния). Такой подход восходит к работе [86], в которой различные режимы процесса столкновений характеризовались различными значениями числа Вебера. Критическое число We_{cr} найдено в экспериментах [87]. В [85], используя его, находят соответствующую разницу между кинетическими энергиями капель, где в качестве определяющей скорости выступает относительная скорость между двумя каплями в предположении, что обе капли имеют близкие по величине скорости. Затем найденная кинетическая энергия для We_{cr} интерпретируется как кинетическая энергия, необходимая для трансформации или диссипируемая вследствие вязкости до того момента, когда капли коагулируют (сольются).

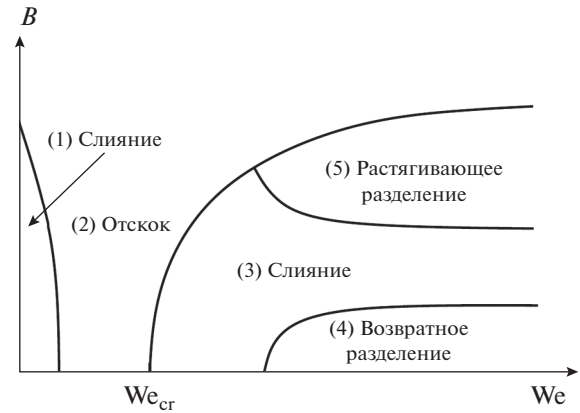


Рис. 3. Схематичная карта возможных режимов столкновения капель [74]. Критическое число Вебера We_{cr} показывает переход от ударного режима к режиму коагуляции.

Обозначим ΔE_{kcr} критическое значение кинетической энергии, которое должно трансформироваться или диссипировать, и определяемое как разность между начальным значением кинетической энергии E_{k0} и в момент коагуляции E_{kc} :

$$\Delta E_{kcr} = E_{k0} - E_{kc} = \frac{1}{2} m_{d\Sigma} V_{rcr}^2, \quad (61)$$

где $m_{d\Sigma} = \sum_{i=1}^{N=2} m_i$ – суммарная масса сталкивающихся капель, N – их количество, V_{rcr} – критическое значение относительной скорости капель, которое связано с критическим числом Вебера We_{cr} как

$$V_{rcr}^2 = \frac{We_{cr} \sigma}{2\rho r_d}. \quad (62)$$

Критерий коагуляции [85]:

если

$$\Delta E_k(\tau) \geq \Delta E_{kcr}, \quad (63)$$

коагуляция происходит;

если

$$\Delta E_k(\tau) < \Delta E_{kcr}, \quad (64)$$

коагуляция отсутствует.

Здесь текущее изменение кинетической энергии

$$\Delta E_k(\tau) = E_k(\tau) - E_{k0}, \quad (65)$$

где

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} m_{d\Sigma} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_d)^2 \quad (66)$$

– кинетическая энергия двух сталкивающихся капель, \mathbf{V} – вектор относительной скорости, \mathbf{r}_d – вектор расстояния между центрами масс двух сталкивающихся капель.

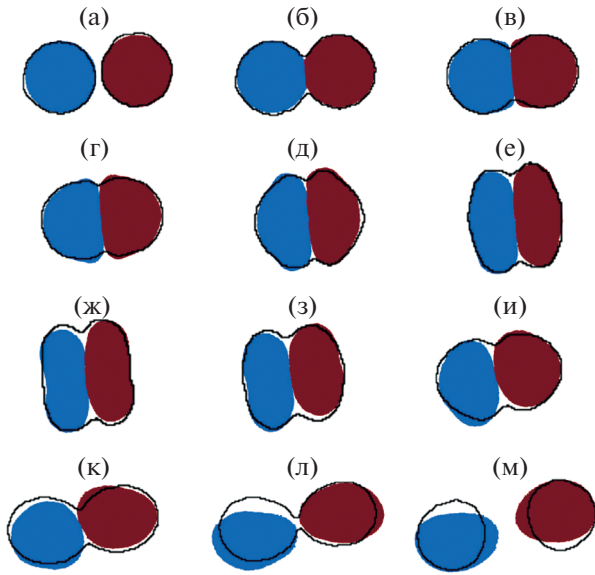


Рис. 4. Иллюстрация соударения двух ньютоновских капель (режим отскока в разные моменты, $We = 8.6$, $B = 0.08$, $r_d = 153$ мкм, $Re = 105.9$): (а) – $\tau = 0.06$ мс, (б) – 0.10, (в) – 0.15, (г) – 0.20, (д) – 0.28, (е) – 0.34, (ж) – 0.43, (з) – 0.54, (и) – 0.65, (к) – 0.76, (л) – 0.91, (м) – 0.99; заливка – результаты расчетов [85], контур – экспериментальные данные [87].

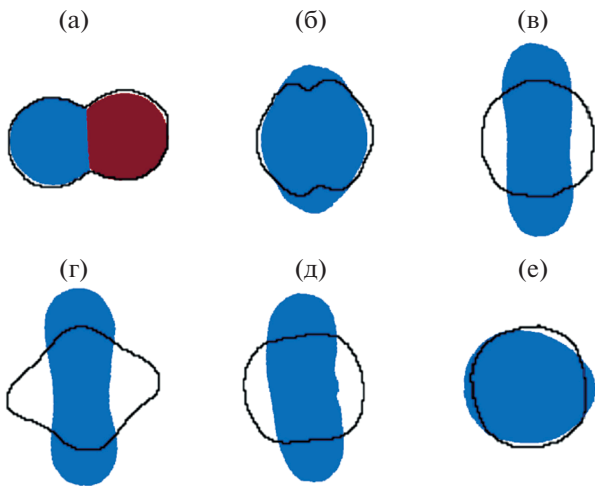


Рис. 5. Иллюстрация соударения двух ньютоновских капель (режим слияния) в разные моменты времени, $We = 19.4$, $B = 0.05$, $r_d = 151$ мкм, $Re = 157.3$): (а) – $\tau = 0.08$ мс, (б) – 0.24, (в) – 0.45, (г) – 0.53, (д) – 0.80, (е) – 1.12; заливка – результаты расчетов [85], контур – экспериментальные данные [87].

При проведении расчетов две капли мгновенно начинают рассматриваться как одна [85], если $\Delta E_{кр}$ достигается.

Примеры столкновений двух капель при реализации режима отскока ($We < We_{cr}$) и режима слияния ($We > We_{cr}$) приведены на рис. 4 и 5 соответственно. Для рассматриваемого случая $We_{cr} = 10.1$.

6. ВЛИЯНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА

В этом разделе приводятся и анализируются лишь некоторые работы, демонстрирующие важность учета процесса межчастичных (межкапельных) столкновений при определении характеристик обеих фаз двухфазного потока.

6.1. Влияние столкновений на характеристики двухфазных турбулентных струйных течений

Имеется значительное количество исследований (например, [88–91]), в которых авторы пытались учесть влияние столкновений на характеристики турбулентных струйных течений.

В [88] развита математическая модель, позволяющая анализировать пульсационное движение частиц в двухфазном потоке с учетом их обратного влияния на характеристики несущей фазы и межчастичных столкновений. Модель основывается на уравнениях для отдельных компонент тензора напряжений Рейнольдса для дисперсной фазы, а также для смешанных моментов газа и частиц. Предложенные замыкающие соотношения позволили достичь приемлемого согласия между расчетными и экспериментальными данными.

В [89] выполнено численное моделирование нисходящей круглой струи воздуха, содержащей частицы стекла, при высоких массовых концентрациях дисперсной фазы (до $M = 180\%$). Для $M = 30\%$ и 90% результаты хорошо описывают имеющиеся экспериментальные данные [90]. Для указанных значений массовых расходных концентраций не было выявлено различия в характеристиках двухфазной струи в случае учета межчастичных столкновений на основе стохастического подхода (см. раздел 5.1), развитого в [68]. Для $M = 180\%$ данные экспериментов отсутствовали, но расчеты были выполнены. Учет межчастичных столкновений приводил к выполаживанию профиля осредненной скорости частиц и снижению (до 20%) анизотропии их пульсационных скоростей. Выявлен также эффект уширения (на 15%) поперечного сечения струи на расстоянии 40 диаметров от сопла. Это исследование показало, что в отсутствие стенок, ограничивающих течение, влияние столкновений между частицами начинается с более высоких значений концентрации последних.

В работе [91] проведено численное исследование влияния межчастичных столкновений на дисперсию частиц различной инерционности для трехмерной турбулентной двухфазной струи, истекающей из плоского горизонтального сопла. Для расчета движения воздуха использовался метод прямого численного моделирования (DNS), а для расчета поведения частиц – лагранжев траек-

торный метод и детерминистский подход (см. раздел 5.1) для учета их столкновений. Обратным влиянием частиц на течение несущего воздуха пренебрегалось. Число Стокса варьировалось в широком диапазоне 0.01–100 и определялось следующим образом:

$$\text{Stk}_f = \frac{\rho_p d_p^2 U_0}{18\mu D}, \quad (67)$$

где ρ_p – плотность частиц, d_p – диаметр частиц, μ – динамическая вязкость воздуха, U_0 – скорость воздуха на выходе из центра сопла, D – высота плоского сопла.

Частицы для каждого расчетного случая вбрасывались порционно (по 462 штуки) через некоторые постоянные интервалы времени. Во время вбрасывания они располагались равномерно, при этом начальная скорость частиц равнялась локальной скорости воздуха.

В результате расчетов визуализированы картины двухфазного течения: построены мгновенные расположения частиц различной инерционности с указанием мест их столкновений в разные моменты времени. Пример полученных пространственных расположений частиц в момент времени (безразмерное) $\bar{\tau} = 42$ показан на рис. 6. Обезразмеривание производилось с использованием значения скорости воздуха на выходе из центра сопла U_0 и его высоты D . Анализ дисперсии частиц различной инерционности позволил сделать следующие выводы. Малоинерционные частицы ($\text{Stk}_f = 0.01$ и 0.1) распределены в пространстве практически однородно вследствие их дисперсии турбулентными вихрями несущей фазы. Более инерционные частицы ($\text{Stk}_f = 1$) концентрируются преимущественно на внешних границах крупномасштабных турбулентных вихрей. Частицы, обладающие еще большей инерционностью ($\text{Stk}_f = 10$), практически не взаимодействуют с турбулентными вихрями. Наиболее инерционные частицы ($\text{Stk}_f = 100$) движутся почти прямолинейно и концентрируются в центральной области струи, где и сталкиваются между собой.

Также в [91] проанализировано влияние инерционности (числа Стокса) на среднее число столкновений, определяемое как

$$N_a = \frac{N}{\Delta\tau}, \quad (68)$$

где N – общее число столкновений в течение временного шага $\Delta\tau$.

Очевидно, что среднее число столкновений не является простой линейной функцией от числа Stk_f (рис. 7). Сначала оно растет с увеличением инерционности частиц и при $\text{Stk}_f = 0.1$ достигает

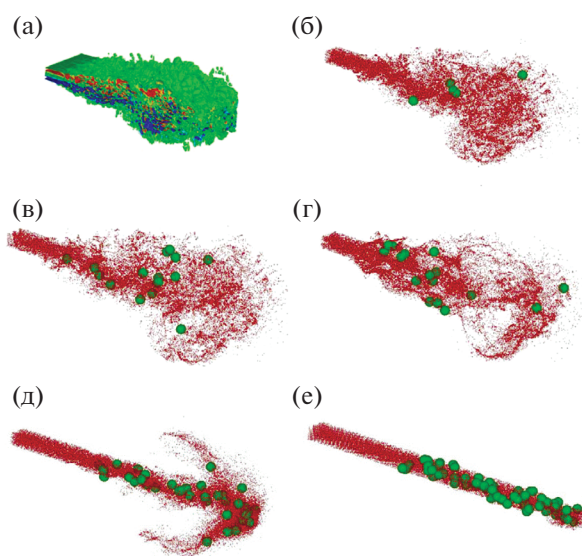


Рис. 6. Пространственное расположение частиц (точки) и мест их столкновений (сферы) в зависимости от их инерционности в момент времени $\bar{\tau} = 42$: (а) – азимутальная завихренность; (б) – $\text{Stk}_f = 0.01$, (в) – 0.1 , (г) – 1 , (д) – 10 , (е) – 100 .

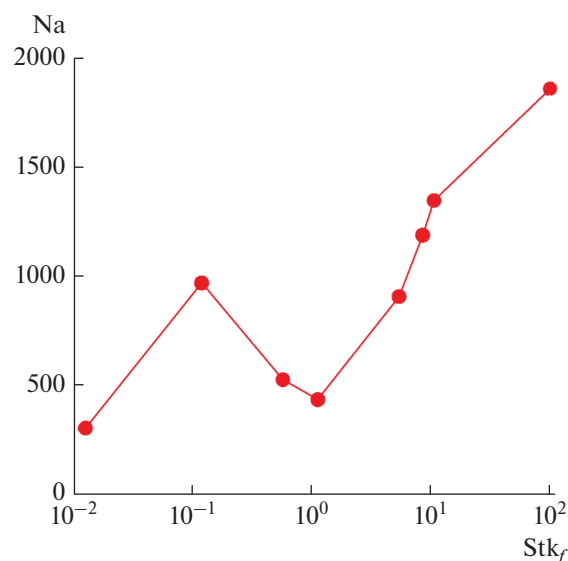


Рис. 7. Зависимость среднего числа межчастичных столкновений от их инерционности.

локального максимума, затем снижается и имеет локальный минимум при $\text{Stk}_f = 1$. В дальнейшем среднее число столкновений растет с увеличением числа Стокса.

Такое сложное поведение описанной зависимости определяется двумя основными факторами, каждый из которых вызывает эффект пересечения траекторий частиц и способствует межчастичным столкновениям: 1) частицы имеют

тенденцию собираться (аккумулироваться) в областях низкой завихренности, что вызывает рост их локальной концентрации в струях [92–95]; 2) инерция частиц влияет на относительное движение соседних частиц, изменяя таким образом их относительную скорость.

Вследствие вышесказанного при малых числах Стокса увеличение числа столкновений (с ростом инерционности) объясняется влиянием эффекта аккумуляции частиц вследствие их взаимодействия с мелкомасштабными вихрями (при $Stk_f = 0.1$ этот механизм играет главенствующую роль). При $Stk_f = 1$ время динамической релаксации частиц сравнимо с характерным временем крупномасштабных вихрей. Для таких частиц эффект аккумуляции имеет место на начальной стадии развития струи, где доминируют крупномасштабные вихревые структуры. Однако по мере развития струи частицы, имеющие $Stk_f = 1$, не могут аккумулятироваться и их распределение становится однородным, так как крупномасштабные вихри сменяются мелкомасштабными. Из этого следует, что среднее число столкновений за все время “развития” струи становится минимальным. При дальнейшем росте инерционности ($Stk_f > 5$) воздействие несущего воздуха на частицы становится все меньше и меньше вследствие их большой инерционности. Такие частицы имеют прямолинейные траектории, движутся преимущественно в центральной области струи без дисперсии в вертикальном и поперечном направлениях, что способствует сокращению расстояний между ними. С ростом инерционности частицы имеют тенденцию сталкиваться все чаще и чаще.

Результаты [91] показали важность учета межчастичных столкновений даже в случае слабоконцентрированной двухфазной турбулентной струи.

6.2. Влияние столкновений на характеристики двухфазных турбулентных течений в каналах

Имеется целый ряд расчетно-теоретических исследований двухфазных турбулентных течений с частицами, в которых авторы пренебрегали столкновениями частиц между собой (см., например, [96, 97]).

Первая попытка учета межчастичных столкновений была предпринята в [18], где исследовалось поведение частиц в вертикальной трубе без учета их обратного влияния на параметры течения несущей фазы. Было показано, что влиянием столкновений между частицами на их дисперсию в нормальном (по отношению к среднему течению) направлении нельзя пренебрегать даже в случае слабозапыленного потока, т.е. когда $\Phi = O(10^{-4})$. Отметим, что столкновения частиц рассчитыва-

лись на основе детерминистского подхода (см. раздел 5.1).

Дальнейшее изучение влияния столкновений между частицами на характеристики двухфазных потоков продолжено в целом ряде работ.

В [98] выполнено численное исследование условий формирования кластеров (областей повышенной концентрации частиц) в двухфазном воздушном потоке (скорость воздуха 5 м/с) в канале шириной 80 мм. Диаметр частиц равнялся 500 мкм, их плотность – 2620 кг/м³, массовая расходная концентрация дисперсной фазы на входе – 400%. Учет межчастичных столкновений проведен путем использования прямого моделирования по методу Монте-Карло (DSMC). Указанный метод, являющийся разновидностью детерминистско-стохастического подхода (см. раздел 5.1), впервые развит в работе [99]. Расчет столкновений частиц производился по алгоритму [100], учитывающему суммарную вероятность столкновений всех рассматриваемых в одной расчетной ячейке частиц в течение временного шага. В результате было показано, что нестабильность потока и формирование кластеров инициируются неупругостью ($k_n = 0.94$) и трением ($k_f = 0.28$) при межчастичных столкновениях.

Детальные экспериментальные исследования двухфазных потоков с частицами в горизонтальных каналах проведены в [101, 102]. В [102] использовались горизонтальные каналы прямоугольного сечения (высота 35 мм, ширина 350 мм) с гладкой (“нормальная” шероховатость) и шероховатой (“повышенная” шероховатость) стенками. Измерения показали, что средние глубины микронеровностей стенки (нержавеющая сталь) в продольном и поперечном направлениях равны 3.5–4.3 мкм и 7 мкм для гладкой и шероховатой стенок соответственно. В качестве дисперсной фазы в экспериментах применялись сферические частицы стекла с номинальными диаметрами 60, 100, 190 и 625 мкм. Массовая расходная концентрация частиц изменялась в диапазоне $M = 0–100\%$. Эксперименты проводились для трех значений осредненной скорости несущего воздуха в центре канала: $U_{xc} = 14.25$, $U_{xc} = 19.7$ и $U_{xc} = 25.6$ м/с.

Были выполнены подробные измерения осредненных и пульсационных (среднеквадратичных) скоростей несущего воздуха и частиц при различных концентрациях последних. Анализ полученных результатов позволил сделать следующие выводы о влиянии концентрации дисперсной фазы, размера частиц, шероховатости стенки на энергию пульсаций скорости частиц [102]:

1) повышенная шероховатость стенки приводит к существенному росту энергии пульсаций скорости частиц как в продольном, так и в нормальном направлениях;

2) рост концентрации частиц приводит к подавлению энергии пульсаций скорости частиц вследствие диссипации энергии из-за межчастичных столкновений;

3) увеличение размера частиц способствует росту энергии пульсаций дисперсной фазы, так как влияние повышенной шероховатости особенно значительно для крупных частиц;

4) степень снижения энергии пульсаций частиц с ростом концентрации особенно высока при повышенной шероховатости стенки и в случае движения малоинерционных частиц.

В большинстве описанных выше исследований не делался акцент на отличия параметров двухфазного течения с учетом и без учета межчастичных столкновений.

В работе [103] выполнено численное моделирование нисходящего развитого турбулентного двухфазного течения между двумя параллельными стенками на основе метода крупных вихрей (LES) для несущей фазы и лагранжевого траекторного метода для расчета движения частиц с использованием детерминистского подхода (см. раздел 5.1) к определению местоположения их соударений. Обнаружено, что учет межчастичных столкновений значительно улучшает совпадение получаемых результатов с имеющимися экспериментальными данными [104].

Показано, что столкновения интенсифицируют поперечное “перемешивание” дисперсной фазы, что приводит к выполаживанию профилей осредненной скорости и концентрации частиц. Проведена наглядная визуализация мгновенных картин двухфазного потока. Отчетливо показан эффект формирования “облаков” (скоплений) частиц небольшой инерционности вследствие их взаимодействия с турбулентными вихрями несущей фазы (так называемый эффект кластеризации) в случае, если межчастичные столкновения не учитывались. Появление “облаков” частиц изменяло результаты расчетов, проводимых с учетом обратного влияния частиц на несущую фазу и без учета последнего. Это является следствием модификации структуры турбулентности в случае эффекта кластеризации.

Учет межчастичных столкновений приводит к росту дисперсии частиц в поперечном направлении, что сказывается на их пространственном распределении. Влияние столкновений между частицами на эффект их аккумуляции (кластеризации) в плоскостях, параллельных стенкам канала, определяется соотношением между числами Стокса, построенными с использованием времени между соударениями и временным масштабом турбулентности.

В пристенной области межчастичные столкновения оказывают влияние на высокоинерционные частицы, в то время как в приосевой (цен-

тральной) области, напротив, — на движение малоинерционных частиц.

В [105] проведены расчеты двухфазных течений с частицами на основе эйлерова-лагранжева моделирования при высоких значениях концентрации последних. Используемые при проведении численного исследования расчетные сетки позволяли применить вихреразрешающие методы (LES) для расчета течения воздуха в условиях сложной геометрии и учитывать как обратное влияние частиц на несущую фазу, так и столкновения частиц между собой на основе детерминистского подхода (см. раздел 5.1). Развитая методология апробирована путем решения тестовых задач (плоское течение в канале, течение в камере сгорания). Результаты расчетов [105] и имеющиеся экспериментальные данные [106, 107] хорошо согласуются между собой.

Для турбулентного течения в плоском канале ($M_0 = 15\%$, $\Phi_0 = 7.3 \times 10^{-5}$ — средние по сечению канала концентрации) выявлено сильное влияние межчастичных столкновений на характеристики движения частиц вследствие реализации в пристенной области высокой локальной концентрации дисперсной фазы ($M \gg M_0$, $\Phi \gg \Phi_0$). Учет межчастичных столкновений приводил к выполаживанию профиля осредненной скорости частиц вследствие интенсивного обмена импульсом между ними. В пользу этого свидетельствует увеличение (до трех раз) поперечных пульсаций скорости частиц при учете столкновений. Что касается профиля продольных пульсаций скорости частиц, то он становился более пологим. Это легко объяснить следующим образом. Если частица движется из области, характеризующейся малой скоростью, в область с более высокой скоростью, то пульсация ее скорости будет меньшей в случае более пологого профиля осредненной скорости. Было также найдено, что присутствие частиц не оказывало влияния на профили осредненной скорости и продольных пульсаций скорости несущей фазы. Влияние дисперсной фазы на поперечные пульсации скорости воздуха было незначительным.

Для “холодного” течения в модели камеры сгорания при более высоких начальных концентрациях частиц ($M_0 = 22\%$, $\Phi_0 = 10^{-4}$ и $M_0 = 110\%$, $\Phi_0 = 5 \times 10^{-4}$) не обнаружено различия в результатах в случае учета и неучета межчастичных столкновений вследствие уменьшения концентрации частиц в отрывной зоне ($M < M_0$, $\Phi < \Phi_0$).

В [108] выполнено численное моделирование нисходящего полностью развитого турбулентного течения воздуха ($Re = 13800$) в канале (ширина 4 см, длина 1 м), содержащего 50 мкм частицы стекла и 70 мкм частицы меди. Массовая кон-

центрация частиц изменялась в диапазоне $M = 2\text{--}100\%$. Расчеты выполнены на основе эйлерово-лагранжевого метода с учетом обратного влияния частиц на характеристики воздуха и межчастичных столкновений. Для условий постоянного расхода несущей фазы не выявлено влияния частиц на профиль осредненной скорости воздуха, что согласуется с данными экспериментов [104]. Учет столкновений между частицами приводил к выполаживанию профиля осредненной скорости дисперсной фазы. Межчастичные столкновения оказывали более сильное влияние на движение частиц меди. Эти частицы приводили также к более сильному изменению (подавлению) энергии турбулентности воздуха. Эффект подавления турбулентности возрастал с увеличением концентрации частиц, числа Стокса и расстояния от стенки. Интересным является тот факт, что учет межчастичных столкновений изменял направление воздействия частиц на несущую среду с ламинаризирующего на турбулизирующий.

В [109] проведено численное исследование восходящего турбулентного течения в канале для очень высоких содержаний частиц – $M = 1950\%$ ($\Phi = 1.3\%$). Целью работы было установление как влияния частиц на характеристики несущей фазы, так и влияния межчастичных столкновений на параметры движения обеих фаз. Для достижения указанной цели выполнены три серии расчетов: 1) расчет турбулентного течения без частиц, 2) расчет турбулентного течения с частицами без учета их столкновений, 3) расчет турбулентного течения со сталкивающимися частицами.

Учет столкновений приводил к существенно изменению распределений (профилей) как осредненных, так и всех компонент (осевой, нормальной, азимутальной) пульсационных скоростей обеих фаз. Наличие межчастичных столкновений приводило к выполаживанию профиля осредненной скорости воздуха в центральной области течения, увеличивая при этом ее градиент вблизи стенки. Профиль осредненной скорости частиц также становился более пологим. При учете столкновений максимумы в распределениях осевых пульсаций скорости как воздуха, так и частиц сменялись на минимумы в центральной области течения. Здесь же выявлен рост (примерно в 1.5 раза) нормальных и азимутальных пульсаций скорости воздуха. Что касается аналогичных составляющих пульсаций скорости частиц, то их рост был еще более значительным (в 3–3.5 раза).

В заключение кратко остановимся на рассмотрении работ, посвященных проблеме эрозии. Эрозия – основная причина выхода из строя трубопроводов, транспортирующих газозвеси (запыленные среды). В ранних работах исследовалось влияние скорости и концентрации песка на

эрозию [110], изменение толщины стенки на разных расстояниях от входа в канал [111], а также для различных материалов трубы [112]. В более поздних экспериментальных работах применялись совершенные профилометры [113] и бесконтактные ультразвуковые приборы [114] для измерения глубины эрозии, а также PIV для измерения динамического скольжения между транспортирующим воздухом и частицами песка [115]. При проведении численных исследований использовались, как правило, лагранжевы траекторные методы [116–122] наряду со стохастическим подходом при учете межчастичных столкновений.

Остановимся на анализе одной из последних работ [122]. Чтобы предсказать явления эрозии в коленчатой алюминиевой трубе, в этом исследовании использованы нестационарные осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса при расчете несущей фазы вместе с лагранжевым траекторным подходом для частиц. Была предпринята попытка учета всех определяющих факторов (сила аэродинамического сопротивления, подъемная сила, вращение частиц, межчастичные столкновения, взаимодействие частиц со стенкой, межфазный обмен импульсом). Для выявления роли межчастичных столкновений расчеты выполнялись при шести разных значениях массовой концентрации ($M = 3.85\text{--}90\%$). Результаты вычислений выявили, что интенсивность эрозии в существенной степени связана с процессом взаимодействия частиц со стенками трубы. При этом определяющими параметрами процесса являются скорость частиц, угол их соударения со стенкой, а также частота столкновений. Показано, что при самой малой концентрации учет межчастичных столкновений не влиял на получаемые результаты. С ростом концентрации частиц межчастичное взаимодействие оказывало существенное влияние на все определяющие параметры процесса взаимодействия частиц со стенкой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены и проанализированы результаты расчетно-теоретических и экспериментальных исследований влияния столкновений частиц (капель) на параметры турбулентных двухфазных потоков. Описаны имеющиеся методы определения характеристик процесса столкновений монодисперсных (бидисперсных) частиц в однородной изотропной турбулентности, а также при совместном действии турбулентности, градиента осредненной скорости и силы тяжести. Приведены некоторые работы, демонстрирующие важность учета процесса межчастичных (межкапельных) столкновений при расчетах двухфазных потоков.

Отметим, что целый ряд принципиальных вопросов, касающихся столкновений частиц (ка-

пель), остался вне рассмотрения вследствие ограниченности объема обзора: случай существенно различия размеров сталкивающихся частиц [123]; влияние несферичности частиц [124–128]; генерация турбулентных следов за движущимися частицами [129]; наличие ударно-волновых процессов [130–133]; эффект кластеризации дисперсной фазы в турбулентных и вихревых потоках [52, 134–141]; особенности межчастичных соударений при обтекании тел двухфазными потоками [142–150] и др.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-01382).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наливкин Д.В.* Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность. Л.: Наука, 1969. 487 с.
2. *Хргиан А.Х.* Физика атмосферы. Т. 2. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 318 с.
3. *Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2005. 504 с.
4. *Баутин С.П.* Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
5. *Арсеньев С.А., Бабкин В.А., Губарь А.Ю., Николаевский В.Н.* Теория мезомасштабной турбулентности. Вихри атмосферы и океана. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. 308 с.
6. *Varaksin A. Yu., Romash M. E., Kopeitsev V. N.* Tornado. New York: Begell House, 2015. 394 p.
7. *Вараксин А.Ю.* Воздушные и огненные концентрированные вихри: физическое моделирование (обзор) // ТВТ. 2016. Т. 54. № 3. С. 430.
8. *Вараксин А.Ю.* Воздушные торнадоподобные вихри: математическое моделирование // ТВТ. 2017. Т. 55. № 2. С. 291.
9. *Owen P. R.* Pneumatic Transport // J. Fluid Mech. 1969. V. 39. Pt. 2. P. 407.
10. *Бусройд Р.* Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир, 1975. 384 с.
11. *Дейч М.Е., Филиппов Г.А.* Газодинамика двухфазных сред. М.: Энергоиздат, 1981. 356 с.
12. *Перельман Р.Г., Пряхин В.В.* Эрозия элементов паровых турбин. М.: Энергоатомиздат, 1986. 181 с.
13. *Борисов Ю.С., Борисова А.Л.* Плазменные порошковые покрытия. Киев: Техника, 1986. 222 с.
14. *Алхимов А.П., Клинков С.В., Косарев В.Ф., Фомин В.М.* Холодное газодинамическое напыление. Теория и практика. М.: Физматлит, 2010. 536 с.
15. *Вараксин А.Ю.* Влияние частиц на турбулентность несущего потока газа // ТВТ. 2015. Т. 53. № 3. С. 441.
16. *Вараксин А.Ю.* Обтекание тел дисперсными газовыми потоками // ТВТ. 2018. Т. 56. № 2. С. 282.
17. *Вараксин А.Ю.* Столкновения в потоках газа с твердыми частицами. М.: Физматлит, 2008. 312 с.
18. *Tanaka T., Tsuji Y.* Numerical Simulation of Gas-Solid Two-Phase Flow in a Vertical Pipe: on the Effect of Inter-Particle Collision // In Proc. 4th Int. Symp. Gas-Solid Flows. 1991. ASME FED. V. 121. P. 123.
19. *Yamamoto Y., Potthoff M., Tanaka T., Kajishima T., Tsuji Y.* Large-Eddy Simulation of Turbulent Gas-Particle Flow in a Vertical Channel: Effect of Considering Inter-Particle Collisions // J. Fluid Mech. 2001. V. 442. P. 303.
20. *Williams J.J.E., Crane R.I.* Particle Collision Rate in Turbulent Flow // Int. J. Multiphase Flow. 1983. V. 9. № 4. P. 421.
21. *Yuu S.* Collision Rate of Small Particles in a Homogeneous and Isotropic Turbulence // AIChE J. 1984. V. 30. P. 802.
22. *Kruis F.E., Kusters K.A.* The Collision Rate of Particles in Turbulent Media // J. Aerosol Sci. 1996. V. 27. Suppl. 1. P. S263.
23. *Деревич И.В.* Столкновения частиц в турбулентном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 104.
24. *Зайчик Л.И., Алипченков В.М.* Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости. М.: Физматлит, 2007. 312 с.
25. *Saffman P.G., Turner J.S.* On the Collision of Drops in Turbulent Cloud // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. P. 16.
26. *Wang L.-P., Wexler A.S., Zhou Y.* On the Collision Rate of Small Particles in Isotropic Turbulence. I. Zero-Inertia Case // Phys. Fluids. 1998. V. 10. P. 266.
27. *Wang L.-P., Wexler A.S., Zhou Y.* Statistical Mechanical Description and Modelling of Turbulent Collision of Inertial Particles // J. Fluid Mech. 2000. V. 415. P. 117.
28. *Chapman S., Cowling T.G.* The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge University Press, 1970. 423 p.
29. *Lun C.K.K., Savage S.B., Jeffrey D.J., Chepurnyi N.* Kinetic Theories for Granular Flow: Inelastic Particles in Couette Flow a Slightly Inelastic Particles in a General Flow Field // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 223.
30. *Ding J., Gidaspow D.* A Bubbling Fluidization Model Using Kinetic Theory of Granular Flow // AIChE J. 1990. V. 36. № 4. P. 523.
31. *Вараксин А.Ю., Ромаши М.Э., Конейцев В.Н.* О возможностях визуализации при моделировании воздушных смерчей // ТВТ. 2010. Т. 48. № 4. С. 617.
32. *Вараксин А.Ю., Ромаши М.Э., Конейцев В.Н., Горбачев М.А.* Моделирование свободных тепловых вихрей: генерация, устойчивость, управление // ТВТ. 2010. Т. 48. № 6. С. 965.
33. *Вараксин А.Ю., Ромаши М.Э., Конейцев В.Н., Горбачев М.А.* Метод воздействия на свободные нестационарные воздушные вихри // ТВТ. 2012. Т. 50. № 4. С. 533.
34. *Smoluchowski M.V.* Versuch einer Matematischen theorie der Koagulationskinetik kolloider Losungen // Zeit. Phys. Chem. 1917. Bd. 92. S. 129.
35. *Guichard R., Taniere A., Belut E., Rimbart N.* Simulation of Nanoparticle Coagulation Under Brownian Motion and Turbulence in a Differential-Algebraic

- Framework: Developments and Applications // Int. J. Multiphase Flow. 2014. V. 64. № 9. P. 73.
36. *Bruggeman C., Sarantsev A.* Multiple Collisions in Systems of Competing Brownian Particles // *Bernoulli*. 2018. V. 24. № 1. P. 156.
 37. *Xie M.L., Yu M.Z.* Thermodynamic Analysis of Brownian Coagulation Based on Moment Method // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2018. V. 122. P. 922.
 38. *Протасов М.В., Вараксин А.Ю.* Анализ столкновений твердых бидисперсных частиц при их гравитационном осаждении // *ТВТ*. 2013. Т. 51. № 4. С. 557.
 39. *Alexander C.M., Goodisman J.* Size Histograms of Gold Nanoparticles Measured by Gravitational Sedimentation // *J. of Colloid and Interface Science*. 2014. V. 418. P. 103.
 40. *Arkhipov V., Usanina A.* Gravitational Sedimentation of Cloud of Solid Spherical Particles at Small Reynolds Numbers // *Thermophysical Basis of Energy Technologies. EPJ Web of Conf.* 2015. V. 82. Article ID 01017.
 41. *Chen X.L., Feng Y., Zhong W.Q., Sun B.B., Tao F.* Numerical Investigation of Particle Deposition in a Triple Bifurcation Airway due to Gravitational Sedimentation and Inertial Impaction // *Powder Technology*. 2018. V. 323. P. 284.
 42. *Мучник В.М.* Физика грозы. Л.: Гидрометеиздат, 1974. 352 с.
 43. *Ваулина О.С., Петров О.Ф., Фортвов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А.* Пылевая плазма: эксперимент и теория. М.: Физматлит, 2009. 316 с.
 44. *Complex and Dusty Plasmas: From Laboratory to Space / Eds Fortov V.E., Morfill G.E.* CRC Press, 2010. 440 p.
 45. *Коршунов О.В., Чиннов В.Ф., Кавыршин Д.И.* Кинетическая модель окисления Al в гетерогенной алюмо-водяной плазме. Отрицательные ионы // *ТВТ*. 2017. Т. 55. № 2. С. 189.
 46. *Мессерле А.В., Мессерле В.Е., Устименко А.Б.* Плазменная термохимическая подготовка к сжиганию пылеугольного топлива // *ТВТ*. 2017. Т. 55. № 3. С. 366.
 47. *Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А.* Динамика заряженной газозвезды с начальным пространственно неравномерным распределением средней плотности дисперсной фазы при переходе к равновесному состоянию // *ТВТ*. 2017. Т. 55. № 4. С. 509.
 48. *Костановский А.В., Костановская М.Е.* О роли потока в нестационарной тепловой задаче охлаждения сферы из молибдена в эксперименте электростатической левитации // *ТВТ*. 2017. Т. 55. № 6. С. 696.
 49. *Zheng X., Silber-Li Z.* The Influence of Saffman Lift Force on Nanoparticle Concentration Distribution Near a Wall // *Applied Physics Letters*. 2009. V. 95. № 12. Article ID 124105.
 50. *Gorchakov G.I., Karpov A.V., Kopeikin V.M., Sokolov A.V., Buntov D.V.* Influence of the Saffman Force, Lift Force, and Electric Force on Sand Grain Transport in a Wind-Sand Flow // *Doklady Earth Sciences*. 2016. V. 467. № 1. P. 314.
 51. *Breault R.W., Roman S.L., Monazam E., Stewart K.T.* Lateral Particle Size Segregation in a Riser Under Core Annular Flow Conditions due to the Saffman Lift Force // *Powder Technology*. 2016. V. 299. P. 119.
 52. *Squires K.D., Eaton J.K.* Preferential Concentration of Particles by Turbulence // *Phys. Fluids A*. 1991. V. 3. № 5. P. 1169.
 53. *Вараксин А.Ю.* Кластеризация частиц в турбулентных и вихревых двухфазных потоках // *ТВТ*. 2014. Т. 52. № 5. С. 777.
 54. *Abrahamson J.* Collision Rate of Small Particles in a Vigorously Turbulent Fluid // *Chem. Engng Sci*. 1975. V. 30. P. 1371.
 55. *Lavieville J., Deutsch E., Simonin O.* Large Eddy Simulation of Interactions between Colliding Particles and a Homogeneous Isotropic Turbulence Field // *In Proc. 6th Int. Symp. on Gas-Particle Flows*. 1995. ASME FED. V. 228. P. 347.
 56. *Lavieville J., Simonin O., Berlemont A., Chang Z.* Validation of Inter-Particle Collision Models Based on Large Eddy Simulation in Gas-Solid Turbulent Homogeneous Shear Flow // *In Proc. 7th Int. Symp. on Gas-Particle Flows, ASME Fluids Eng. Division Summer Meeting*. 1997. FEDSM97-3623.
 57. *Zaichik L.I., Simonin O., Alipchenkov V.M.* Two Statistical Models for Predicting Collision Rates of Inertial Particles in Homogeneous Isotropic Turbulence // *Phys. Fluids*. 2003. V. 15. № 10. P. 2995.
 58. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М: Наука, 1967. 720 с.
 59. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И.* Частота столкновений частиц в турбулентном потоке // *Изв. РАН. МЖГ*. 2001. № 4. С. 93.
 60. *Fede P., Simonin O.* Modelling of Kinetic Energy Transfer by Collision of a Non-Settling Binary Mixture of Particles Suspended in a Turbulent Homogeneous Isotropic Flow // *In Proc. 4th ASME-JSME Joint Fluids Eng. Conf.* 2003. FEDSM2003-45735.
 61. *Зайчик Л.И., Симонин О., Алипченков В.М.* Столкновения бидисперсных частиц в условиях изотропной турбулентности // *ТВТ*. 2005. Т. 43. № 3. С. 408.
 62. *Gourdel C., Simonin O., Brunier E.* Two-Maxwellian Equilibrium Distribution Function for the Modeling of a Binary Mixture of Particles // *In Proc. 6th Int. Conf. on Circulating Fluidized Beds*. 1999. P. 205.
 63. *Dodin Z., Elperin T.* On the Collision Rate in Turbulent Flow with Gravity // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14. № 8. P. 2921.
 64. *Sundaram S., Collins L.R.* Numerical Considerations in Simulating a Turbulent Suspension of Finite-Volume Particles // *J. Comp. Phys*. 1996. V. 124. P. 337.
 65. *O'Rourke.* Collective Drop Effects in Vaporizing Liquid Sprays / Los Alamos National Laboratory. 1981. Report LA-9069-T.
 66. *O'Rourke P.J., Wadt W.R.* A Two-Dimensional, Two-Phase Numerical Model for Spray Dryers. Los Alamos National Laboratory. 1982. Report LA-9423-MS.
 67. *Gu X., Basu S., Kumar R.* Vaporization and Collision Modeling of Liquid Fuel Sprays in a Co-Axial Fuel and Air Pre-Mixer // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2012. V. 55. P. 5322.

68. *Sommerfeld M.* Validation of a Stochastic Lagrangian Modelling Approach for Inter-Particle Collisions in Homogeneous Isotropic Turbulence // *Int. J. Multiphase Flow.* 2001. V. 27. № 10. P. 1829.
69. *Berlemont A., Achim P., Chang Z.* Lagrangian Approaches for Particle Collisions: The Colliding Particle Velocity Correlation in the Multiple Particles Tracking Method and in the Stochastic Approach // *Phys. Fluids.* 2001. V. 13. № 9. P. 2946.
70. *Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Y.* *Multiphase Flows with Droplets and Particles.* Boca Raton, Florida, USA: CRC Press, 1998.
71. *Varaksin A.Yu.* *Collisions in Particle-Laden Gas Flows.* N.Y.: Begell House, 2013. 370 p.
72. *Lain S., Sommerfeld M.* Numerical Calculation of Pneumatic Conveying in Horizontal Channels and Pipes: Detailed Analysis of Conveying Behaviour // *Int. J. Multiphase Flow.* 2012. V. 39. P. 105.
73. *Pasternak L., Sommerfeld M.* Experimental Investigation of Size Effects in Colliding Droplets // *ILASS-Europe 2017.* In Proc. 28th Conf. on Liquid Atomization and Spray Systems. Valencia, Spain. 2017. Article ID 4781.
74. *Qian J., Law C.K.* Regimes of Coalescence and Separation in Droplet Collision // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 331. P. 59.
75. *Estrade J.-P., Carentz H., Lavergne G., Biscos Y.* Experimental Investigation of Dynamic Binary Collision of Ethanol Droplets – A Model for Droplet Coalescence and Bouncing // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 1999. V. 20. P. 486.
76. *Brazier-Smith P.R., Jennings S.G., Latham J.* The Interaction of Falling Water Drops: Coalescence // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1972. V. 326. P. 393.
77. *Ashgriz N., Poo J.Y.* Coalescence and Separation in Binary Collisions of Liquid Drops // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 221. P. 183.
78. *Jiang Y.J., Umemura A., Law C.K.* An Experimental Investigation on the Collision Behavior of Hydrocarbon Droplets // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 234. P. 171.
79. *Bardia R., Liang Z., Keblinski P., Trujillo M.F.* Continuum and Molecular-Dynamics Simulation of Nanodroplet Collisions // *Phys. Rev. E.* 2016. V. 93. Article ID 053104.
80. *Focke C., Kuschel M., Sommerfeld M., Bothe D.* Collision between High and Low Viscosity Droplets: Direct Numerical Simulations and Experiments // *Int. J. Multiphase Flow.* 2013. V. 56. P. 81.
81. *Nikolopoulos N., Nikas K.-S., Bergeles G.* A Numerical Investigation of Central Binary Collision of Droplets // *Comput. Fluids.* 2009. V. 38. № 6. P. 1191.
82. *Mazloomi M.A., Chikatamarla S.S., Karlin I.V.* Entropic Lattice Boltzmann Method for Multiphase Flows // *Phys. Rev. Lett.* 2015. V. 114. Article ID 174502.
83. *Peng B., Wang S., Lan Z., Xu W., Wen R., Ma X.* Analysis of Droplet Jumping Phenomenon with Lattice Boltzmann Simulation of Droplet Coalescence // *Appl. Phys. Lett.* 2013. V. 102. № 15. Article ID 151601.
84. *Lehr F.* Bubble-Size Distributions and Flow Fields in Bubble Columns // *AIChE J.* 2002. V. 48. P. 2426.
85. *Hirschler M., Oger G., Nieken U., Le Touze D.* Modelling of Droplet Collisions Using Smoothed Particle Hydrodynamics // *Int. J. Multiphase Flow.* 2017. V. 95. P. 175.
86. *Orme M.* Experiments on Droplet Collisions, Bounce, Coalescence and Disruption // *Prog. Energy Combust. Sci.* 1997. V. 23. № 1. P. 65.
87. *Qian J., Law C.K.* Regimes of Coalescence and Separation in Droplet Collision // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 331. P. 59.
88. *Simonin O.* Prediction of the Dispersed Phase Turbulence in Particle-Laden Jets // *Proc. 4th Int. Symp. Gas-Solid Flows.* ASME FED. 1991. V. 121. P. 197.
89. *Lain S., Garcia J.A.* Study of Four-Way Coupling on Turbulent Particle-Laden Jet Flows // *Chemical Engineering Science.* 2006. V. 61. P. 6775.
90. *Garcia J.A.* Experimental Study of an Axisymmetric Two-Phase Jet. Measurements of Concentration and Particle Flow Intensity. Dispersion Characteristics (in Spanish) / Ph. D. Thesis. University of Zaragoza (Spain). 2000.
91. *Yan J., Luo K., Fan J., Tsuji Y., Cen K.* Direct Numerical Simulation of Particle Dispersion in a Turbulent Jet Considering Inter-Particle Collisions // *Int. J. Multiphase Flow.* 2008. V. 34. P. 723.
92. *Chung M.K., Troutt T.R.* Simulation of Particle Dispersion in an Axisymmetric Jet // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 186. P. 199.
93. *Uchiyama T., Naruseb M.* Vortex Simulation of Slit Nozzle Gas-Particle Two-Phase Jet // *Powder Technology.* 2003. V. 131. P. 156.
94. *Fan J.R., Luo K., Ha M.Y., Cen K.F.* Direct Numerical Simulation of Near-Field Particle-Laden Plane Turbulent Jet // *Phys. Rev. E.* 2004. V. 70. Article ID 026303.
95. *Luo K., Klein M., Fan J.R., Cen K.F.* Effects on Particle Dispersion by Turbulent Transition in a Jet // *Phys. Lett.* 2006. A 357. P. 345.
96. *Rouson D.W., Eaton J.K.* Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow with Immersed Particles // *Numerical Methods in Multiphase Flows.* ASME FED. 1995. V. 185. P. 47.
97. *Wang Q., Squires K.D.* Large Eddy Simulation of Particle-Laden Turbulent Channel Flow // *Phys. Fluids.* 1996. V. 8. P. 1207.
98. *Yonemura S., Tanaka T., Tsuji Y.* Cluster Formation in Gas-Solid Flow Predicted by the DSMC Method // *Gas-Solid Flows.* ASME FED. 1993. V. 166. P. 303.
99. *Bird G.A.* *Molecular Gas Dynamics.* London: Oxford Univ. Press, 1976. 238 p.
100. *Illner R., Neunzert H.* On Simulation Methods for the Boltzmann Equation // *Transport Theory and Statistical Phys.* 1987. V. 16. P. 141.
101. *Sommerfeld M.* The Importance of Inter-Particle Collisions in a Horizontal Gas-Solid Channel Flows // *Gas-Particle Flows.* ASME FED. 1995. V. 228. P. 335.
102. *Kussin J., Sommerfeld M.* Experimental Studies on Particle Behaviour and Turbulence Modification in Horizontal Channel Flow with Different Wall Roughness // *Exp. Fluids.* 2002. V. 33. P. 143.

103. Yamamoto Y., Potthoff M., Tanaka T., Kajishima T., Tsuji Y. Large-Eddy Simulation of Turbulent Gas-Particle Flow in a Vertical Channel: Effect of Considering Inter-Particle Collisions // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 442. P. 303.
104. Kulick J.D., Fessler J.R., Eaton J.K. Particle Response and Turbulence Modification in Fully Developed Channel Flow // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 277. P. 109.
105. Breuer M., Aletto M. Efficient Simulation of Particle-Laden Turbulent Flows with High Mass Loadings Using LES // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2012. V. 35. P. 2.
106. Benson M., Tanaka T., Eaton J.K. Effects of Wall Roughness on Particle Velocities in a Turbulent Channel Flow // *Trans. ASME. J. Fluids Eng.* 2005. V. 127. P. 250.
107. Boree J., Ishima T., Flour I. The Effects of Mass Loading and Inter-Particle Collision on the Development of Polydispersed Two-Phase Flow Downstream of a Confined Bluff Body // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 443. P. 129.
108. Nasr H., Ahmadi J. The Effect of Two-Way Coupling and Inter-Particle Collisions on Turbulence Modulation in a Vertical Channel Flow // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2007. V. 28. P. 1507.
109. Vreman B., Geurts B.J., Deen N.J., Kuipers J.A.M., Kuerten J.G.M. Two-Way and Four-Way Coupled Euler-Lagrangian Large-Eddy Simulation of Turbulent Particle-Laden Channel Flow // *Flow, Turbulence and Combustion.* 2009. V. 82. P. 47.
110. Tolle G.C., Greenwood D.R. Design of Fittings to Reduce Wear Caused by Sand Erosion. American Petroleum Institute. 1977. Project №6.
111. Eyler R.L. Design and Analysis of a Pneumatic Flow Loop. M.S.M.E. West Virginia University. PhD Thesis. 1987.
112. Bourgoyne A. Experimental Study of Erosion in Diverter Systems Due to Sand Production. // *Proc. SPE/IADS Drilling Conf. New Orleans, Louisiana.* 1989. P. 807.
113. Solnordal C.B., Wong C.Y., Boulanger J. An Experimental and Numerical Analysis of Erosion Caused by Sand Pneumatically Conveyed Through a Standard Pipe Elbow // *Wear.* 2015. V. 336–337. P. 43.
114. Kesana N.R., Grubb S.A., McLaury B.S., Shirazi S.A. Ultrasonic Measurement of Multiphase Flow Erosion Patterns in a Standard Elbow // *J. Energy Resour. Tech.* 2013. V. 135. № 3. Article ID 32905.
115. Vieira R.E., Mansouri A., McLaury B.S., Shirazi S.A. Experimental and Computational Study of Erosion in Elbows Due to Sand Particles in Air Flow // *Powder Technology.* 2016. V. 288. P. 339.
116. Brown G. Erosion Prediction in Slurry Pipeline Tee-Junctions // *Appl. Math. Model.* 2002. V. 26. № 2. P. 155.
117. Pereira G.C., de Souza F.J., de Moro Martins D.A. Numerical Prediction of the Erosion Due to Particles in Elbows // *Powder Technology.* 2014. V. 261. P. 105.
118. Parsi M., Agrawal M., Srinivasan V., Vieira R.E., Torres C.F., McLaury B.S., Shirazi S.A. CFD Simulation of Sand Particle Erosion in Gas-Dominant Multiphase Flow // *J. Nat. Gas Sci. Eng.* 2015. V. 27. P. 706.
119. Mansouri A., Arabnejad H., Shirazi S., McLaury B. A Combined CFD/Experimental Methodology for Erosion Prediction // *Wear.* 2015. V. 332–333. P. 1090.
120. Mansouri A., Arabnejad H., Karimi S., Shirazi S.A., McLaury B.S. Improved CFD Modeling and Validation of Erosion Damage Due to Fine Sand Particles // *Wear.* 2015. V. 338–339. P. 339.
121. Duarte C.A.R., de Souza F.J., dos Santos V.F. Numerical Investigation of Mass Loading Effects on Elbow Erosion // *Powder Technology.* 2015. V. 283. P. 593.
122. Duarte C.A.R., de Souza F.J., de Vasconcelos Salvo R., dos Santos V.F. The Role of Inter-Particle Collisions on Elbow Erosion // *Int. J. Multiphase Flow.* 2017. V. 89. P. 1.
123. Ariane M., Sommerfeld M., Alexiadis A. Wall Collision and Drug-Carrier Detachment in Dry Powder Inhalers: Using DEM to Devise a Sub-Scale Model for CFD Calculations // *Powder Technology.* 2018. V. 334. P. 65.
124. Zhong W.Q., Yu A.B., Liu X.J., Tong Z.B., Zhang H. DEM/CFD-DEM Modelling of Non-Spherical Particulate Systems: Theoretical Developments and Applications // *Powder Technology.* 2016. V. 302. P. 108.
125. Ouchene R., Khalij M., Arcen B., Taniere A. A New Set of Correlations of Drag, Lift and Torque Coefficients for Non-Spherical Particles and Large Reynolds Numbers // *Powder Technology.* 2016. V. 303. P. 33.
126. Voth G.A., Soldati A. Anisotropic Particles in Turbulence // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2017. V. 49. P. 249.
127. Arcen B., Ouchene R., Khalij M., Taniere A. Prolate Spheroidal Particles Behavior in a Vertical Wall-Bounded Turbulent Flow // *Phys. Fluids.* 2017. V. 29. Article ID 093301.
128. Sommerfeld M., Qadir Z. Fluid Dynamic Forces Acting on Irregular Shaped Particles: Simulations by the Lattice-Boltzmann Method // *Int. J. Multiphase Flow.* 2018. V. 101. P. 212.
129. Зайчик Л.И., Вараксин А.Ю. Влияние следа за крупными частицами на интенсивность турбулентности несущего потока // *ТВТ.* 1999. Т. 37. № 4. С. 683.
130. Гуреницов Е.В., Еремин А.В., Мухеева Е.Ю. Исследование термодинамических свойств углеродных наночастиц методом лазерного нагрева // *ТВТ.* 2017. Т. 55. № 5. С. 737.
131. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р. Экспериментальное исследование коагуляции и осаждения газозвеси в закрытой трубе при переходе к ударно-волновому режиму // *ТВТ.* 2017. Т. 55. № 3. С. 484.
132. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р. Динамика аэрозоля в открытой трубе при колебаниях различной интенсивности вблизи резонанса // *ТВТ.* 2018. Т. 56. № 1. С. 145.
133. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Влияние фазовых переходов на отражение акустических волн от границы парогазожидкостной смеси // *ТВТ.* 2018. Т. 56. № 2. С. 317.
134. Eaton J.K., Fessler J.R. Preferential Concentration of Particles by Turbulence // *Int. J. Multiphase Flow.* 1994. V. 20. P. 169.

135. *Reade W.C., Collins L.R.* Effect of Preferential Concentration on Turbulent Collision Rate // *Phys. Fluids*. 2000. V. 12. P. 2530.
136. *Varaksin A.Y., Romash M.E., Kopeitsev V.N.* Effect of Net Structures on Wall-Free Non-Stationary Air Heat Vortices // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2013. V. 64. P. 817.
137. *Varaksin A.Y., Romash M.E., Kopeitsev V.N.* Tornado-Like Gas-Solid Flow // *The 6th Int. Symp. on Multiphase Flow, Heat Mass Transfer and Energy Conversion*. AIP Conference Proc. 2010. V. 1207. P. 342.
138. *Zaichik L.I., Alipchenkov V.M.* Pair Dispersion and Preferential Concentration of Particles in Isotropic Turbulence // *Phys. Fluids*. 2003. V. 15. P. 1776.
139. *Zaichik L.I., Alipchenkov V.M.* Statistical Models for Predicting Particle Dispersion and Preferential Concentration in Turbulent Flows // *Int. J. Heat Fluid Flow*. 2005. V. 26. P. 416.
140. *Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н.* О возможности воздействия на вихревые атмосферные образования // *ТВТ*. 2010. Т. 48. № 3. С. 433.
141. *Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Горбачев М.А.* Физическое моделирование воздушных смерчей: некоторые безразмерные параметры // *ТВТ*. 2011. Т. 49. № 2. С. 317.
142. *Volkov A.N., Tsirkunov Y.M., Oesterle B.* Numerical Simulation of a Supersonic Gas-Solid Flow over a Blunt Body: the Role of Inter-Particle Collisions and Two-Way Coupling Effects // *Int. J. Multiphase Flow*. 2005. V. 31. P. 1244.
143. *Ревизников Д.Л., Способин А.В., Сухарев Т.Ю.* Численное моделирование обтекания затупленного тела сверхзвуковым полидисперсным потоком // *ТВТ*. 2017. Т. 55. № 3. С. 418.
144. *Ревизников Д.Л., Способин А.В., Иванова И.Э.* Изменение структуры течения под воздействием высокоинерционной частицы при обтекании тела сверхзвуковым гетерогенным потоком // *ТВТ*. 2018. Т. 56. № 6. С. 968.
145. *Котельников А.Л., Баженова Т.В., Бивол Г.Ю., Ленкевич Д.А.* Воздействие на преграду потока воздуха, содержащего твердые частицы // *ТВТ*. 2017. Т. 55. № 1. С. 158.
146. *Моллесон Г.В., Стасенко А.Л.* Обтекание тела газодисперсной струей в широкой области значений параметров торможения // *ТВТ*. 2017. Т. 55. № 1. С. 94.
147. *Моллесон Г.В., Стасенко А.Л.* Газодинамическое ускорение микрочастиц и их взаимодействие с твердым телом // *ТВТ*. 2017. Т. 55. № 6. С. 742.
148. *Вараксин А.Ю., Протасов М.В.* О влиянии вдува газа на защиту поверхностей тел, обтекаемых двухфазным потоком // *ТВТ*. 2017. Т. 55. № 6. С. 785.
149. *Алексеев В.Б., Залкинд В.И., Низовский В.Л., Низовский Л.В., Хямяляйнен Л.Т., Шигель С.С.* Исследование осаждения мелкодисперсных капель воды из двухфазного потока при обтекании коротких плоских профилей в условиях впрыска перегретой воды // *ТВТ*. 2018. Т. 56. № 3. С. 439.
150. *Вараксин А.Ю., Михатулин Д.С., Полежаев Ю.В., Поляков А.Ф.* Измерения полей скоростей газа и твердых частиц в пограничном слое турбулизированного гетерогенного потока // *ТВТ*. 1995. Т. 33. № 6. С. 915.