ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 2019, том 57, № 5, с. 694–701

ТЕПЛОМАССООБМЕН И ФИЗИЧЕСКАЯ ГАЗОДИНАМИКА

УДК 536.2.001

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООБМЕНА

© 2019 г. Э. М. Карташов*

МИРЭА – Российский технологический университет
(Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова), Москва, Россия
**E-mail: kartashov@mitht.ru*

Поступила в редакцию 25.12.2018 г.
После доработки 25.12.2018 г.
Принята к публикации 27.03.2019 г.

Рассмотрены практически важные задачи нестационарной теплопроводности с переменным во времени относительным коэффициентом теплообмена. Приведена систематизация различных подходов при нахождении аналитического решения задачи: метод расщепления обобщенного интегрального преобразования Фурье, разложение искомой температурной функции в степенной ряд, сведение задачи к интегральному уравнению Вольтера второго рода. Показано, что во всех случаях решение сводится к бесконечному ряду последовательных приближений различной функциональной формы и главной целью каждого из подходов является нахождение наиболее удачного первого приближения. Рассмотрены частные случаи временной зависимости относительного коэффициента теплообмена: линейная, экспоненциальная, степенная, корневая. Приведены аналитические решения и численные эксперименты, выявлены особенности температурных кривых для ряда указанных зависимостей. Установлено, что для линейного закона во времени коэффициента теплоотдачи картина изменения температурной кривой по сравнению с классическим случаем для постоянного коэффициента существенно изменяется, в то время как экспоненциальная зависимость не вносит существенных изменений.

DOI: 10.1134/S0040364419050077

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании температурного режима твердых тел в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой наиболее существенные результаты получены для случая постоянного относительного коэффициента теплообмена $h = \alpha/\lambda$ (α – коэффициент теплообмена, λ – теплопроводность) [1]; считается, что α определяется только температурным напором. Однако, как показывают экспериментальные исследования [2], в ряде нестационарных процессов теплообмена коэффициент теплоотдачи является неравновесным и намного сильнее зависит от времени, чем от температуры, т.е. $h = h(t)$.

Соответствующие задачи теплопроводности с граничными условиями вида $(\partial T/\partial n)_\Gamma = h(t)[T|_\Gamma - T_C]$, $t > 0$ представляют большой практический интерес, и этим случаям в аналитической теории теплопроводности традиционно уделялось повышенное внимание [2, 3]. Зависимость $h(t)$ наблюдается при формировании теплового пограничного слоя в условиях нестационарного обтекания твердых поверхностей охлаждающей жидкостью; нагреве тел пульсирующим потоком жидкости или газа; движении баллистического тела в среде с переменной плотностью и температурой; теплообмене прокатываемого металла с валками и окружающей средой; изучении явлений турбулентности при контактном измерении температуры выходных газов; нестационарном охлаждении термоэлектрических устройств; в процессах диффузии в условиях переменной температуры при изучении физической химии металлов; фазовых переходах и др. [2, 3]. Помимо технологических имеется также ряд других причин изменения коэффициента теплообмена во времени: изменение физических характеристик теплоносителя (скорости движения, степени черноты, плотности и т.п.) или изменение с течением времени состояния поверхности нагреваемого тела (окисление, засорение пылью, растрескивание и т.п.).

До настоящего времени не найдено точного решения задачи теплопроводности в замкнутой форме при произвольном законе изменения коэффициента $h(t)$: искомая температурная функция не выражается в квадратурах и точное решение задачи имеет вид бесконечного ряда последовательных приближений. Трудность заключается в том, что невозможно, оставаясь в рамках классических методов математической физики, согласовать решение уравнения теплопроводности с граничным условием теплопроводности при переменном $h(t)$. Объяснение этому факту достаточно простое. Для произвольной временной зависимости относительного коэффициента теплообмена собственные значения и собственные функции как решения соответствующей спектральной задачи формально зависят от времени, а это значит, что решение исходной задачи не может быть записано в виде интеграла Фурье–Ханкеля для частично ограниченной области или в виде ряда Фурье–Ханкеля для конечной области канонического типа. Последнее означает, что метод разделения переменных Фурье, лежащий в основе практически всех подходов классических дифференциальных уравнений математической физики, к цели не приводит. Характерной особенностью указанного класса задач при поиске их решений является возможность варьирования различными подходами. Это объясняется тем, что решение одной и той же тепловой задачи можно искать в различных классах функций, когда выявляются особенности структуры получаемых решений. Эти функции должны удовлетворять ряду требований: во-первых, они должны достаточно легко рассчитываться; во-вторых, обеспечивать сходимость процесса настолько хорошо, чтобы можно было сделать требуемые в задаче заключения о свойствах полученного решения; в-третьих, обеспечивать существование всех операций, допускаемых в процессе преобразований; в-четвертых, быть удобными в практическом плане при рассмотрении конкретных (частных) законов $h(t)$ после нахождения решения задачи для произвольной зависимости коэффициента теплообмена. В связи с этим на практике используются различные подходы, дающие точные (в виде бесконечного ряда) или приближенные решения такого класса задач для пластины, цилиндра, шара, полуограниченного стержня при произвольном законе $h(t)$ и его частных зависимостях: экспоненциальной, степенной, корневой, линейной, периодической, импульсной, пульсирующей и т.д.

Таковыми являются метод тепловых потенциалов, когда уравнение теплопроводности сводится к интегральному уравнению Вольтера второго рода и далее используется пикаровский процесс разложения по параметру; интегральный метод Кармана–Польгаузена из теории гидродинамического пограничного слоя; метод разложения по малому параметру (методы возмущений); операционный с использованием метода последовательных приближений; метод бичастотной передаточной функции; метод осреднения функциональных поправок; метод сведения уравнения теплопроводности к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием функции Грина; вариационный метод; метод расщепления обобщенного интегрального преобразования Фурье, дающего интегральную форму первого приближения при произвольной зависимости $h(t)$; асимптотические методы; метод координатных функций с использованием фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий и др. ([2–4] (и ссылки в них). Несмотря на многообразие подходов, каждый из них в конечном счете приводит решение задачи к бесконечному ряду последовательных приближений и главной целью каждого из подходов является поиск наиболее удачного первого приближения.

РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ПИКАРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим некоторые подходы при нахождении аналитического решения задачи с переменным относительным коэффициентом теплообмена с использованием пикаровского процесса последовательных приближений. В безразмерных переменных

$$x = \frac{z}{l},\quad \mathrm{F}_0 = \frac{at}{l^2},\quad \mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0) = \frac{\alpha(t)\,l}{\lambda},$$
$$T(x,t) = \frac{W(z,t) - T_0}{T_C - T_0},$$

где l — выбранная единица масштаба, имеем задачу

$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{F}_0} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\quad x > 0,\quad \mathrm{F}_0 > 0, \tag{1}$$

$$T(x,\mathrm{F}_0)\big|_{\mathrm{F}_0=0} = 0,\quad x \ge 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,\mathrm{F}_0)}{\partial x}\right|_{x=0} = \mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)\left[T(x,\mathrm{F}_0)\big|_{x=0} - 1\right],\quad \mathrm{F}_0 > 0, \tag{3}$$

$$\left|T(x,\mathrm{F}_0)\right| < \infty,\quad x \ge 0,\quad \mathrm{F}_0 \ge 0. \tag{4}$$

Здесь $\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)$ — непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция. Искомое решение:

$$T(x,t) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}),$$
$$\mathrm{grad}\,T(x,t) \in C^0(\bar{\Omega}),\quad \bar{\Omega} = (x \ge 0, t \ge 0).$$

Для решения задачи применим метод расщепления обобщенного интегрального преобразования Фурье. В отличие от [5, 6], где реализованы основы этого метода, в настоящей работе дан ряд обобщений и добавлений при рассмотрении практически важных случаев. Введем интегральное преобразование

$$L[T(x,\mathrm{F}_0)] = \tilde{T}(\xi,\mathrm{F}_0) =$$
$$= \int_0^\infty T(x,\mathrm{F}_0)\left[\cos\xi x + \frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)}{\xi}\sin\xi x\right]dx, \tag{5}$$

функции $T(x,\mathrm{F}_0)$ с формулой обращения

$$T(x,\mathrm{F}_0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{T}(\xi,\mathrm{F}_0)\times \\ \times\left[\cos\xi x+\frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)}{\xi}\sin\xi x\right]\frac{\xi^2 d\xi}{\xi^2+\mathrm{Bi}^2(\mathrm{F}_0)}. \quad (6)$$

Если ввести обозначения

$$\omega(\xi,\mathrm{F}_0)=1-i\frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)}{\xi},\quad \bar{\omega}(\xi,\mathrm{F}_0)=1+i\frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)}{\xi},\quad (7)$$

при которых

$$\cos\xi x+\frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)}{\xi}\sin\xi x= \\ =\frac{1}{2}\left[\omega\exp(i\xi x)+\bar{\omega}\exp(-i\xi x)\right], \quad (8)$$

а также

$$\bar{A}(\xi,\mathrm{F}_0)=\int_0^\infty T(x,\mathrm{F}_0)\exp(i\xi x)dx, \quad (9)$$

$$A(\xi,\mathrm{F}_0)=\int_0^\infty T(x,\mathrm{F}_0)\exp(-i\xi x)dx, \quad (10)$$

то изображение

$$\tilde{T}(\xi,\mathrm{F}_0)=\frac{1}{2}\left[\omega(\xi,\mathrm{F}_0)A(\xi,\mathrm{F}_0)+\bar{\omega}(\xi,\mathrm{F}_0)\bar{A}(\xi,\mathrm{F}_0)\right]. \quad (11)$$

Для перевода уравнения (1) в пространство изображений понадобиться еще два соотношения:

$$\frac{\partial\tilde{T}(\xi,\mathrm{F}_0)}{\partial F_0}= \\ =\frac{1}{2}\left[\omega(\xi,\mathrm{F}_0)\frac{\partial A(\xi,\mathrm{F}_0)}{\partial\mathrm{F}_0}+\bar{\omega}(\xi,\mathrm{F}_0)\frac{\partial\bar{A}(\xi,\mathrm{F}_0)}{\partial\mathrm{F}_0}\right], \quad (12)$$

$$L\left[\frac{\partial^2 T(\xi,\mathrm{F}_0)}{\partial x^2}\right]=\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)- \\ -\frac{1}{2}\xi^2\left[\omega(\xi,\mathrm{F}_0)A(\xi,\mathrm{F}_0)+\bar{\omega}(\xi,\mathrm{F}_0)\bar{A}(\xi,\mathrm{F}_0)\right]. \quad (13)$$

Переведем задачу (1)–(4) в пространство изображений (5):

$$\begin{cases}\omega\dfrac{\partial A}{\partial\mathrm{F}_0}+\bar{\omega}\dfrac{\partial\bar{A}}{\partial\mathrm{F}_0}+\xi^2(\omega A+\bar{\omega}\bar{A})=2\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0),\quad \mathrm{F}_0>0,\\ A(\xi,\mathrm{F}_0)\big|_{\mathrm{F}_0=0}=\bar{A}(\xi,\mathrm{F}_0)\big|_{\mathrm{F}_0=0}=0.\end{cases} \quad (14)$$

Рассмотрим подробнее:

$$\omega\frac{\partial A}{\partial\mathrm{F}_0}+\bar{\omega}\frac{\partial\bar{A}}{\partial\mathrm{F}_0}+\xi^2(\omega A+\bar{\omega}\bar{A})-2\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)= \\ =\int_0^\infty\frac{\partial T}{\partial\mathrm{F}_0}\left[\cos\xi x+\frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)}{\xi}\sin\xi x\right]dx+ \\ +\xi^2\int_0^\infty T(x,\mathrm{F}_0)\left[\cos\xi x+\frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)}{\xi}\sin\xi x\right]dx= \\ =\theta(\xi,\mathrm{F}_0)=0, \quad (15)$$

$$\tilde{T}(\xi,\mathrm{F}_0)=\mathrm{Re}\left[\omega(\xi,\mathrm{F}_0)A(\xi,\mathrm{F}_0)\right]= \\ =\int_0^\infty T(x,\mathrm{F}_0)\left[\cos\xi x+\frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)}{\xi}\sin\xi x\right]dx. \quad (16)$$

Раскрывая соотношение $\omega\left(\frac{\partial A}{\partial\mathrm{F}_0}+\xi^2 A\right)-\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)$ с учетом (15), (16), находим

$$\omega\left(\frac{\partial A}{\partial\mathrm{F}_0}+\xi^2 A\right)-\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)=\theta(\xi,\mathrm{F}_0)+i\psi(\xi,\mathrm{F}_0),\ \mathrm{F}_0>0,$$

или

$$\omega\left(\frac{\partial A}{\partial\mathrm{F}_0}+\xi^2 A\right)-\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)=i\psi(\xi,\mathrm{F}_0),\quad \mathrm{F}_0>0, \quad (17)$$

где

$$\psi(\xi,\mathrm{F}_0)=\frac{1}{\xi}\left\{\left[\mathrm{Bi}^2(\mathrm{F}_0)+\xi^2\right]T(0,\mathrm{F}_0)-\mathrm{Bi}^2(\mathrm{F}_0)\right\}. \quad (18)$$

Таким образом, можно перейти к задаче Коши относительно функции $A(\xi,\mathrm{F}_0)$ вида

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial A}{\partial\mathrm{F}_0}+\xi^2 A=\frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)}{\omega}+i\frac{\psi(\xi,\mathrm{F}_0)}{\omega},\quad \mathrm{F}_0>0,\\ &A_0(\xi,\mathrm{F}_0)\big|_{\mathrm{F}_0=0}=0.\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Функцию $\frac{i\psi(\xi,\mathrm{F}_0)}{\omega}=i\frac{\bar{\omega}}{|\omega|^2}\psi(\xi,\mathrm{F}_0)$ представим как

$$i\frac{\bar{\omega}}{|\omega|^2}\psi(\xi,\mathrm{F}_0)=\psi_1(\xi,\mathrm{F}_0)+i\psi_2(\xi,\mathrm{F}_0)= \\ =\left[\frac{\mathrm{Bi}^3(\mathrm{F}_0)}{\mathrm{Bi}^2(\mathrm{F}_0)+\xi^2}-\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)T(0,\mathrm{F}_0)\right]+ \\ +i\left[\xi T(0,\mathrm{F}_0)-\frac{\mathrm{Bi}^2(\mathrm{F}_0)\xi}{\mathrm{Bi}^2(\mathrm{F}_0)+\xi^2}\right]. \quad (20)$$

Решение задачи Коши (19) имеет вид

$$A(\xi,\mathrm{F}_0)=\int_0^{\mathrm{F}_0}\frac{\mathrm{Bi}(\tau)\bar{\omega}(\xi,\tau)}{|\omega|^2}\exp\left[-\xi^2(\mathrm{F}_0-\tau)\right]d\tau+ \\ +i\int_0^{\mathrm{F}_0}\frac{\psi(\xi,\tau)\bar{\omega}(\xi,\tau)}{|\omega|^2}\exp\left[-\xi^2(\mathrm{F}_0-\tau)\right]d\tau \quad (21)$$

и далее из (21) находим искомое изображение $\tilde{T}(\xi,\mathrm{F}_0)$ с учетом (20):

$$\tilde{T}(\xi,\mathrm{F}_0)=\mathrm{Re}\left[\omega(\xi,\mathrm{F}_0)A(\xi,\mathrm{F}_0)\right]= \\ =\int_0^{\mathrm{F}_0}\frac{\xi^2+\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)\mathrm{Bi}(\tau)}{\xi^2+\mathrm{Bi}^2(\tau)}\mathrm{Bi}(\tau)\exp\left[-\xi^2(\mathrm{F}_0-\tau)\right]d\tau+ \\ +\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)\int_0^{\mathrm{F}_0}\left[T(0,\tau)-\frac{\mathrm{Bi}^2(\tau)}{\mathrm{Bi}^2(\tau)+\xi^2}\right]\times \\ \times\exp\left[-\xi^2(\mathrm{F}_0-\tau)\right]d\tau. \quad (22)$$

После упрощения выражение (22) приводится к окончательному виду

$$\tilde{T}(\xi, \mathrm{F}_0) = \int_0^{\mathrm{F}_0} \mathrm{Bi}(\tau) \exp\left[-\xi^2(\mathrm{F}_0 - \tau)\right] d\tau + \\ + \int_0^{\mathrm{F}_0} [\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0) - \mathrm{Bi}(\tau)] T(0, \tau) \exp\left[-\xi^2(\mathrm{F}_0 - \tau)\right] d\tau. \quad (23)$$

Теперь по формуле обращения (6) можно записать для искомой функции $T(x, \mathrm{F}_0)$:

$$T(x, \mathrm{F}_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\mathrm{F}_0} \mathrm{Bi}(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \left[\cos \xi x + \frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)}{\xi} \sin \xi x\right] \times \\ \times \frac{\xi^2 \exp\left[-\xi^2(\mathrm{F}_0 - \tau)\right]}{\xi^2 + \mathrm{Bi}^2(\mathrm{F}_0)} d\xi + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\mathrm{F}_0} [\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0) - \mathrm{Bi}(\tau)] T(0, \tau) d\tau \times \\ \times \int_0^{\infty} \left[\cos \xi x + \frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)}{\xi} \sin \xi x\right] \frac{\xi^2 \exp\left[-\xi^2(\mathrm{F}_0 - \tau)\right]}{\xi^2 + \mathrm{Bi}^2(\mathrm{F}_0)} d\xi. \quad (24)$$

Одним из доказательств справедливости найденного соотношения (24) является рассмотрение частного (классического) случая $\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0) = \mathrm{Bi}^* = \mathrm{const}$. Для этого случая соотношение (24) автоматически дает классическое решение

$$T(x, \mathrm{F}_0) = \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\mathrm{F}_0}}\right) - \\ - \exp\left(\mathrm{Bi}^* x + \mathrm{Bi}^{*2} \mathrm{F}_0\right) \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\mathrm{F}_0}} + \mathrm{Bi}^* \sqrt{\mathrm{F}_0}\right), \quad (25)$$

где $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$, $\Phi(z)$ – функция Лапласа.

Правая часть (24) зависит от неизвестной величины $T(0, \mathrm{F}_0)$. Полагая в (24) $x = 0$, приходим к интегральному уравнению Вольтера второго рода относительно $T(0, \mathrm{F}_0)$:

$$T(0, \mathrm{F}_0) = \theta_1(\mathrm{F}_0) + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\mathrm{F}_0} \theta_2(\mathrm{F}_0, \tau) T(0, \tau) d\tau, \quad (26)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \theta_1(\mathrm{F}_0) &= \int_0^{\mathrm{F}_0} \mathrm{Bi}(\tau) \psi_0(\mathrm{F}_0, \tau) d\tau, \\ \theta_2(\mathrm{F}_0, \tau) &= [\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0) - \mathrm{Bi}(\tau)] \psi_0(\mathrm{F}_0, \tau), \\ \psi_0(\mathrm{F}_0, \tau) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 \exp\left[-\xi^2(\mathrm{F}_0 - \tau)\right]}{\xi^2 + \mathrm{Bi}^2(\mathrm{F}_0)} d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Решение уравнения (26) с использованием пикаровского процесса последовательных приближений представим в виде

$$T(0, \mathrm{F}_0) = T_0(\mathrm{F}_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n T_n(\mathrm{F}_0), \quad (28)$$

где

$$\left.\begin{aligned} T_0(\mathrm{F}_0) &= \theta_1(\mathrm{F}_0), \\ T_n(\mathrm{F}_0) &= \int_0^{\mathrm{F}_0} \theta_2(\mathrm{F}_0, \tau) T_{n-1}(\tau) d\tau, \quad n \geq 1. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Из (28), (29) находим искомую величину $T(0, \mathrm{F}_0)$ в виде бесконечного ряда последовательных приближений

$$T(0, \mathrm{F}_0) = \theta_1(\mathrm{F}_0) + \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\mathrm{F}_0} \theta_2(\mathrm{F}_0, \tau) d\tau \times \\ \times \int_0^{\tau} \theta_2(\tau, \tau_1) d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{n-2}} \theta_1(\tau_{n-1}) \theta_2(\tau_{n-2}, \tau_{n-1}) d\tau_{n-1}. \quad (30)$$

Покажем, что ряд (30) сходится равномерно при всех $\mathrm{F}_0 > 0$ в любом конечном промежутке изменения F_0. Будем считать, что функция $\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)$ ограничена на отрезке $[0, \mathrm{F}_0]$, т.е. $|\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)| \leq M/2$. Тогда ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (30), будет мажорироваться рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} M^{n+1}}{\left(\sqrt{\pi}\right)^{3n+1}} \int_0^{\mathrm{F}_0} \frac{d\tau}{\sqrt{\mathrm{F}_0 - \tau}} \int_0^{\tau} \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau - \tau_1}} \times \\ \times \int_0^{\tau_1} \frac{d\tau_2}{\sqrt{\tau_1 - \tau_2}} \cdots\cdots \int_0^{\tau_{n-1}} \frac{d\tau_n}{\sqrt{\tau_{n-1} - \tau_n}}. \quad (31)$$

Можно определить общий член этого ряда. Вычислим несколько первых интегралов

$$\int_0^{\tau_{n-1}} \frac{d\tau_n}{\sqrt{\tau_{n-1} - \tau_n}} = 2\left(\sqrt{\tau_{n-1}}\right)^1,$$

$$\int_0^{\tau_{n-2}} \frac{\left(\sqrt{\tau_{n-1}}\right)^1 d\tau_{n-1}}{\sqrt{\tau_{n-2} - \tau_{n-1}}} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\tau_{n-2}}\right)^2,$$

$$\int_0^{\tau_{n-3}} \frac{\left(\sqrt{\tau_{n-2}}\right)^2 d\tau_{n-2}}{\sqrt{\tau_{n-3} - \tau_{n-2}}} = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\tau_{n-3}}\right)^3$$

и, проверяя по индукции, замечаем, что

$$\int_0^{\tau_{n-m}} \frac{\left(\sqrt{\tau_{n-(m-1)}}\right)^{m-1} d\tau_{n-(m-1)}}{\sqrt{\tau_{n-m} - \tau_{n-(m-1)}}} = \lambda_m \left(\sqrt{\tau_{n-m}}\right)^m,$$

где λ_m – пока неизвестна. Для нахождения λ_m сделаем в интеграле замену переменной $\tau_{n-(m-1)} = \tau_{n-m}\sin^2\varphi$. Тогда получим

$$\lambda_m\left(\sqrt{\tau_{n-m}}\right)^m = \left(\sqrt{\tau_{n-m}}\right)^m 2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^m\varphi d\varphi.$$

Отсюда

$$\lambda_m = 2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^m\varphi d\varphi = \begin{cases} 2\dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & m = 2k-1, \\ \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi, & m = 2k \end{cases} \quad (k = 1,\ 2,\ 3\ldots).$$

Заметим, что $\lambda_m \to 0$ при $m \to \infty$ и $(n+1)$-й член ряда (31) содержит $(n+1)$ интеграл, следовательно, он равен $\left[2^{n-1}M^{n+1}\big/\left(\sqrt{\pi}\right)^{3n+1}\right] \times \lambda\lambda_1\lambda_2.....\lambda_{n+1}\left(\sqrt{\mathrm{F}_0}\right)^{n+1}$. Вычислим коэффициенты

$$d_{n+1} = \frac{1}{\left(\sqrt{\pi}\right)^{n+1}}\lambda_1\lambda_2.....\lambda_{n+1} = \begin{cases} \pi^{-1/2}2^{(2n+1)/2}\dfrac{1}{(n+1)!!}, & n = 2k-1, \\ 2^{(2n+1)/2}\dfrac{1}{(n+1)!!}, & n = 2k. \end{cases}$$

Таким образом, ряд (31) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}M^{n+1}d_{n+1}}{\left(\sqrt{\pi}\right)^{2n}}\left(\sqrt{\mathrm{F}_0}\right)^{n+1}. \qquad (32)$$

Сходимость ряда (32) для всех $\mathrm{F}_0 > 0$ легко проверить по признаку Даламбера.

В качестве примеров рассмотрим случаи, представляющие интерес для процессов теплообмена прокатываемого металла с валками и окружающей средой [3]. В первом случае $\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0) = \mathrm{Bi}^* + \mathrm{Pd}\mathrm{F}_0$ (Pd – число Прандтля), во втором – $\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0) = \mathrm{Bi}^* + \beta\exp(-\mathrm{Pd}\mathrm{F}_0)$.

На рис. 1 приведены значения приближений температурной функции (30) $\Psi_1(\mathrm{F}_0) = T_0(\mathrm{F}_0)$, $\Psi_2(\mathrm{F}_0) = T_0(\mathrm{F}_0) + (2/\pi)T_1(\mathrm{F}_0)$, $\Psi_3(\mathrm{F}_0) = T_0(\mathrm{F}_0) + (2/\pi)T_1(\mathrm{F}_0) + (2/\pi)^2T_2(\mathrm{F}_0)$ для первого случая, рассчитанные в зависимости от критерия F_0 в сечении $x = 0.5$ при $\mathrm{Bi}^* = 0.5$, $\mathrm{Pd} = 1$. Видно, что первое и второе приближения берут в вилку третье приближение, что позволяет с достаточной для практики точностью ограничиться тремя первыми приближениями.

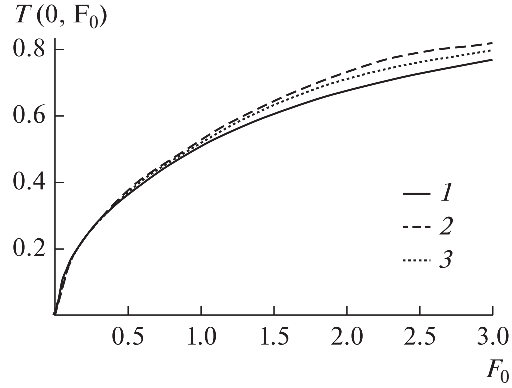

Рис. 1. Температурные кривые приближений на границе $x = 0$ области при $\mathrm{Bi}^* = 0.5$, $\mathrm{Pd} = 1$ для $\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0) = \mathrm{Bi}^* + \mathrm{Pd}\mathrm{F}_0$: *1* – Ψ_1, *2* – Ψ_2, *3* – Ψ_3.

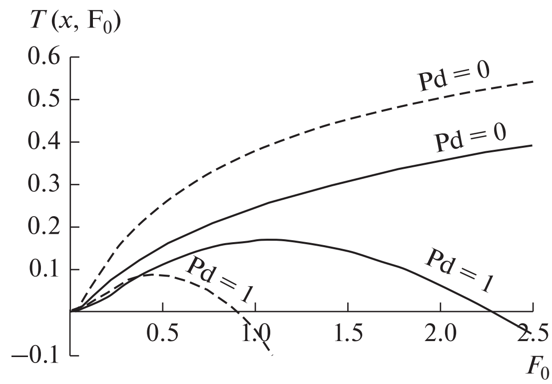

Рис. 2. Температурная кривая $T(0, 5, \mathrm{F}_0)$ для $\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0) = \mathrm{Bi}^* + \mathrm{Pd}\mathrm{F}_0$ при $\mathrm{Bi}^* = 0.5$ (сплошные кривые) и $\mathrm{Bi}^* = 1$ (штриховые кривые), Pd = 0 (классический случай) и Pd = 1 (влияние переменного во времени коэффициента).

На рис. 2 приведены кривые распределения температуры $T(x, \mathrm{F}_0)$ (24) в сечении $x = 0.5$ в зависимости от F_0 для первого случая изменения $\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)$ при $\mathrm{Bi}^* = 0.5$ и 1 (при трех приближениях в (30)) для $\mathrm{Pd} = 0$ (классический случай (25)) и $\mathrm{Pd} = 1$. Видно, что наличие переменного во времени линейного относительного коэффициента теплообмена резко меняет картину тепловой реакции области на нагрев: температура возрастает, достигает максимума и затем убывает, заходя в отрицательную область значений (последнее, по-видимому, ограничивает область значений числа Фурье при конкретных расчетах).

На рис. 3 приведены кривые распределения температуры $T(x, \mathrm{F}_0)$ (24) в сечении $x = 0.5$ в зависимости от числа Фурье для второго случая изменения $\mathrm{Bi}(\mathrm{F}_0)$ (при трех приближениях в (30)) для $\beta = 0$ (классический случай (25)) $\beta = 1$, $\mathrm{Pd} = 1$. Видно, что в интервале практических значений

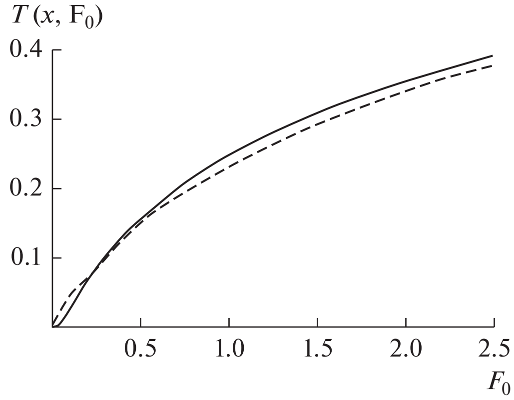

Рис. 3. Температурная кривая $T(0, 5, F_0)$ для $\mathrm{Bi}(F_0) = \mathrm{Bi}^* + \beta\exp(-\mathrm{Pd}F_0)$ при $\mathrm{Bi}^* = 0.5$ для $\beta = 1$, $\mathrm{Pd} = 1$ (штриховая кривая) и $\beta = 0$ (сплошная кривая).

числа Фурье влияние экспоненциального во времени коэффициента $\mathrm{Bi}(F_0)$ не существенно.

Продолжим изучение указанного класса задач теплопроводности и рассмотрим следующий подход для решения задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0; \tag{33}$$

$$T(x,t)\big|_{t=0} = T_0, \quad x \geq 0; \quad |T(x,t)| < +\infty, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0; \tag{34}$$

$$(\partial T/\partial x)\big|_{x=0} = h(t)\,T(x,t)\big|_{x=0}, \quad t > 0. \tag{35}$$

Для простоты записи положено $a = 1$, $T_C = 0$, что не ограничивает общности рассуждения. Решение уравнения (33) записывается в виде

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi, \tag{36}$$

и на отрицательной полуоси x в качестве начальной подбирается такая функция $F(x)$, чтобы (36) удовлетворяло граничному условию (35). Последнее приводит к функциональному уравнению вида

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^{\infty} f\left(2\sqrt{xt}\right)\exp(-x)\,dx = T_0\gamma(t) + \gamma(t)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\int\limits_0^{\infty} f\left(2\sqrt{xt}\right)x^{-1/2}\exp(-x)\,dx, \tag{37}$$

где $f(x) = F(-x) - T_0$, $\gamma(t) = h(t)\sqrt{\pi t}$. Если предположить, что функция $h(t)$ раскладывается в ряд по степеням $t^{1/2}$, т.е. $\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^{n/2}$, и искать функцию $f(x)$ в виде ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то уравнение (37) дает для коэффициентов соотношение

$$a_n = \frac{T_0\gamma_n + \sum\limits_{m=0}^{n-1} 2^{m-1}\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right) a_m \dfrac{\gamma_{n-m}}{\sqrt{\pi}}}{2^{n-1}\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right)},$$

а вместе с этим решение $T(x,t)$ в виде

$$T(x,t) = T_0 + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\infty} \xi^n \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right] d\xi. \tag{38}$$

Метод последовательных приближений для уравнения $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ с нулевым начальным условием (34) и граничным условием $(\partial T/\partial x)_{x=0} = h(t)[T(0,t) - \varphi(t)]$ дает решение задачи в другом виде

$$T(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{a\pi}} \int\limits_0^t \frac{A(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau,$$
$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)^{n+1} \times \tag{39}$$
$$\times \int\limits_0^t \frac{h(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_0^{\tau} \frac{h(\tau_1)}{\sqrt{\tau-\tau_1}} \cdots\cdots \int\limits_0^{\tau_{n-1}} \frac{h(\tau_n)\,\varphi(\tau_n)}{\sqrt{\tau_{n-1}-\tau_n}}\, d\tau_n.$$

Для ограниченной на отрезке $[0,t]$ функции $h(t)$ ряд (39) сходится абсолютно и равномерно при всех $x > 0$ и $t > 0$ в любом конечном промежутке изменения и допускает ряд частных случаев, представляющих практический интерес. Так, для $h(t) = h_0 t^m$, $\varphi(t) = T_C t^r$, где m, r – действительные числа, выражение (39) принимает вид

$$T(x,t) = \frac{T_C x}{2\sqrt{a\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(h_0\sqrt{\frac{a}{\pi}}\right)^n \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{n} B\left(r + \frac{1}{2} + k\left(m + \frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right) \times \tag{40}$$
$$\times \int\limits_0^t \frac{\tau^{r+n(m+1/2)}}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau,$$

где $B(c,d)$ – бета-функция. Предполагается, что $[r + 1/2 + k(m+1/2)] > 0$. При $m = -(1/2)$, т.е. $h(t) = h_0 t^{-1/2}$ и $r = 0$, выражение (40) дает компактное решение

$$T(x,t) = T_C \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(h_0\sqrt{a\pi}\right)^n = \frac{T_C h_0\sqrt{a\pi}}{1 + h_0\sqrt{a\pi}} \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

при условии, что $h_0\sqrt{a\pi} < 1$. Аналогично могут быть представлены и другие случаи.

Рассмотрим далее подход, основанный на функциональных преобразованиях Гринберга (ссылки в [2]) при решении задачи

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{41}$$

$$T(x,t)\big|_{t=0} = T_0, \quad x \ge 0, \quad |T(x,t)| < \infty, \quad x \ge 0, \quad t \ge 0, \tag{42}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = h(t)T(x,t)\big|_{x=0}, \quad t > 0. \tag{43}$$

Введем функцию $R(t) = 1\big/h(t)$ и запишем (43) в виде

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{R(t)}T(x,t)\Big|_{x=0}, \quad t > 0. \tag{44}$$

Пусть $y = x\big/R(t)$, $T(x,t) = \Theta(y,t)$. Тогда (41), (42), (44) записываются в виде

$$R^2(t)\frac{\partial\Theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + y\dot{R}R\frac{\partial\Theta}{\partial y}, \quad y > 0, \quad t > 0, \tag{45}$$

$$\Theta\big|_{t=0} = T_0, \ y \ge 0, \quad |\Theta(y,t)| < \infty, \quad y \ge 0, \quad t \ge 0, \tag{46}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta(y,t)}{\partial y}\right|_{y=0} = \Theta(y,t)\big|_{y=0}, \quad t > 0. \tag{47}$$

Здесь $\dot{R}(t) = dR(t)\big/dt$. Введем далее новую функцию с помощью преобразования

$$\Theta(y,t) = T_0 + \frac{1}{R}\exp\left[-\frac{y^2R\dot{R}}{4a}\right]W(y,t), \tag{48}$$

что позволит записать (45)–(47) в виде

$$R^2\frac{\partial W}{\partial t} = a\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{R^3\ddot{R}}{4a}y^2W, \quad y > 0, \quad t > 0, \tag{49}$$

$$W(y,t)\big|_{t=0} = 0, \quad y \ge 0, \quad |W(y,t)| < \infty, \quad y \ge 0, \quad t \ge 0, \tag{50}$$

$$\left[\frac{\partial W(y,t)}{\partial y} - W(y,t)\right]_{y=0} = T_0\sqrt{R(t)}, \quad t > 0. \tag{51}$$

Рассмотрим для (49) случаи, допускающие точное решение. Пусть $R^3\ddot{R} = -M^2 = \text{const}$, что означает изменение $R(t)$ по закону $R(t) = \sqrt{(At+B)^2 - A^2B}$. Этот случай встречается при изучении нестационарного охлаждения термоэлектрических элементов (ссылки в [2]). Собственные функции задачи (49)–(51) при данном условии представляют

$$\frac{1}{\sqrt{z}}W_{\frac{\nu_n}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right), \quad z = y\sqrt{M}, \tag{52}$$

где $W_{\nu,\mu}(x)$ – функция Уиттекера. Собственные числа ν_n образуют дискретный спектр и удовлетворяют уравнению

$$\Gamma^{-1}\left(\frac{1-\nu_n}{2}\right) - \sqrt{2}\Gamma^{-1}\left(-\frac{\nu_n}{2}\right) = 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ldots, \tag{53}$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функция. Решение этой задачи возможно получить на основе разложения в ряд Фурье искомой функции по системе (52), (53). Если $M^2 = 0$, $R(t) = At \pm B$, то собственные функции (52) переходят в тригонометрические функции, спектр собственных чисел становится непрерывным.

Рассмотрим подробно последний случай. В (49)–(51) при $R^3\ddot{R} = 0$ введем новые переменные

$$\tau = L(t) = \int_0^t \frac{dz}{R^2(z)}, \quad W(y,t) = U(y,\tau). \tag{54}$$

Так как величина $1\big/R^2(t) > 0$, то τ монотонно возрастает вместе с t и задача (49)–(51) записывается в виде

$$\frac{\partial U}{\partial\tau} = a\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad y > 0, \quad \tau > 0, \tag{55}$$

$$U(y,\tau)\big|_{\tau=0} = 0, \quad y \ge 0, \quad |U(y,\tau)| < \infty, \quad y \ge 0, \quad \tau \ge 0, \tag{56}$$

$$\left.\frac{\partial U(y,\tau)}{\partial y}\right|_{y=0} = \left[U(y,\tau)\big|_{y=0} - \varphi(\tau)\right], \quad \tau > 0. \tag{57}$$

Здесь $\varphi(\tau) = T_0\sqrt{R(t)}\Big|_{t=L^{-1}(\tau)}$. Заметим, что размерность $[\tau] = c\big/M^2$. Решение $U(y,\tau)$ получим, используя подход, развитый в [7]. Интегральное представление аналитического решения задачи (55)–(57) имеет вид

$$U(y,\tau) = a\int_0^\tau \varphi(\tau')G(y,y',\tau-\tau')\big|_{y'=0}d\tau',$$

где $G(y,y',\tau-\tau')$ – функция Грина:

$$G(y,y',\tau-\tau') = \frac{1}{2\sqrt{\pi a(\tau-\tau')}}\times \left\{\exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4a(\tau-\tau')}\right] + \exp\left[-\frac{(y+y')^2}{4a(\tau-\tau')}\right]\right\} - \exp\left[a(\tau-\tau') + (y+y')\right]\Phi^*\times \left[\frac{y+y'}{2\sqrt{a(\tau-\tau')}} + \sqrt{a(\tau-\tau')}\right].$$

Здесь $\Phi^*(x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(x) = 2\big/\sqrt{\pi}\int_0^x \exp(-y^2)dy$ – функция Лапласа.

В качестве еще одного примера, имеющего многочисленные приложения [3], рассмотрим для (33)–(35) случай, когда условие теплообмена (35) задается в виде свертки двух функций

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \int_0^t h(t-\tau)\,T(0,\tau)\,d\tau,\ \ t>0.$$

В пространстве изображений (по Лапласу) решение имеет вид

$$\frac{\overline{T}(x,p)}{T_0} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\exp\left(-x\sqrt{p}\right)\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{\overline{h}(p)}{\sqrt{p}}\right]^{n+1}.$$

Тогда для оригинала можно записать

$$\frac{T(x,t)}{T_0} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\sqrt{\pi})^{n+1}}\times$$
$$\times\int_0^t \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)d\tau\int_0^{\tau}\frac{h(\tau_1)}{\sqrt{\tau-\tau_1}}d\tau_1\times$$
$$\times\int_0^{\tau_1}\frac{h(\tau_2)}{\sqrt{\tau_1-\tau_2}}d\tau_2\ldots\int_0^{\tau_n}\frac{h(\tau_{n+1})}{\sqrt{\tau_n-\tau_{n+1}}}d\tau_{n+1}.$$

Доказательство сходимости этого ряда аналогично доказательству сходимости ряда (30).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, приведенные подходы дают разные функциональные выражения для первых слагаемых бесконечного ряда последовательных приближений и лишь для небольшого числа частных зависимостей $h(t)$ в (35) можно получить аналитическое решение задачи в замкнутой форме. Решение класса такого рода зависимостей $h(t)$ представляет собой одну из открытых проблем аналитической теории теплопроводности для краевых задач нестационарного тепло- и массопереноса с переменным во времени относительным коэффициентом теплообмена (массообмена). Дальнейшее развитие этой проблемы — переход к теории теплопроводности на основе гипотезы Максвелла–Каттанео–Лыкова–Вернотта [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 601 с.
2. *Карташов Э.М.* Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в области с движущимися границами (обзор) // ИФЖ. 2001. Т. 74. № 2. С. 171.
3. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
4. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012. 653 с.
5. *Аттетков А.В., Волков И.К.* Решение одного класса задач нестационарной теплопроводности в области с движущейся границей методом расщепления обобщенного интегрального преобразования Фурье // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 1998. № 1. С. 40.
6. *Карташов Э.М.* Теплопроводность при переменном во времени относительном коэффициенте теплообмена // Изв. РАН. Энергетика. 2015. № 2. С. 138.
7. *Карташов Э.М.* Интегральное преобразование для третьей краевой задачи нестационарной теплопроводности с непрерывным спектром собственных значений // Тонкие химические технологии. 2017. Т. 12. № 3. С. 83.