

УДК 536.491

## СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ СЕЛЕКТИВНОГО ЛАЗЕРНОГО СПЕКАНИЯ И СПЛАВЛЕНИЯ

© 2019 г. С. И. Жаворонок<sup>1</sup>, А. С. Курбатов<sup>1</sup>, Л. Н. Рабинский<sup>1</sup>\*, Ю. О. Соляев<sup>1</sup><sup>1</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

\*E-mail: rabinskiy@mail.ru

Поступил в редакцию 29.04.2019 г.

После доработки 16.05.2019 г.

Принят к публикации 16.05.2019 г.

Анализируются тепловые процессы, возникающие при реализации аддитивных технологий селективного лазерного спекания и сплавления металлов и сплавов. Проблема адекватного описания теплопереноса при реализации аддитивных технологических процессов, связанных с высокоинтенсивным локальным нагревом движущимся лучом лазера, и порождаемых тепловым полем фазовых переходов — расплавления порошкового полуфабриката, кристаллизации и сопутствующих эффектов в наращиваемом элементе — является ключевой для получения представления о микроструктуре и эффективных свойствах получаемого материала, а также для предотвращения остаточных деформаций (поводки) изделия. В настоящее время основными причинами непрогнозируемого производственного брака представляются отклонения конечной формы изделия от заданной геометрии и высокоамплитудные остаточные напряжения, способные инициировать разрушение изделия при нагрузках, существенно меньших расчетных значений, а также возникновение микроскопических дефектов (пор, границ раздела слоев и т.д.). Разработка математических моделей, с одной стороны, достаточно точных для прогнозирования перечисленных явлений, с другой стороны — допускающих практическую реализацию в инженерных расчетах, представляется основой дальнейшего развития технологий лазерного спекания и сплавления металлических материалов. В то же время, как показывает анализ современного состояния проблемы, ключевым элементом практической реализации моделей является разработка экономичных численных методов, обеспечивающих приемлемые вычислительные затраты при сохранении точности. Представляется эффективным метод, основанный на разномасштабном связанном моделировании механического и теплового состояния наращиваемого тела — на локальном уровне в области бассейна расплава, на промежуточном уровне окрестности бассейна расплава и прилегающих к нему слоев и на уровне всего изделия в целом, при этом построение вычислительного процесса на глобальном уровне может опираться на сочетание метода конечных элементов, необходимость применения которого на практике бесспорна, и аналитических решений, обеспечивающих локальное уточнение решения.

DOI: 10.1134/S0040364419060176

### СОДЕРЖАНИЕ

#### Введение

1. Особенности аддитивного производства металлов, влияющие на качество изделия
2. Физические процессы, составляющие основу селективного лазерного сплавления и спекания
3. Основы математического моделирования процессов селективного сплавления и спекания
4. Постановки задач
  - 4.1. Постановка начально-краевой задачи на локальном уровне
  - 4.2. Модели источника тепла, применяемые при моделировании селективного лазерного сплавления
    - 4.2.1. Геометрические модели источника тепла

4.2.2. Модели поглощения света слоем порошкового полуфабриката

4.3. Постановка задачи теплопереноса на переходном уровне

5. Аналитические решения задач о тепловом состоянии твердых тел при локальном источнике тепла

6. Моделирование на глобальном уровне

6.1. Модель наращиваемых термоупругих и термовязкоупругих тел при конечных деформациях

6.2. Концепция моделирования аддитивного производства изделий. Общая формулировка задачи

6.3. Свойства материалов

6.4. Конечно-элементные модели изделий

Заключение

Список литературы

## ВВЕДЕНИЕ

Под аддитивной технологией в настоящее время понимается метод послойного (или поточечного) создания объекта по заданной трехмерной цифровой модели изделия [1]. Как указано, например, в [2, 3], аддитивная технология, основанная на нанесении объема материала, является в известном смысле противоположностью традиционным субтрактивным технологиям, базирующимся на удалении объема материала (механической обработке, химическом травлении и т.д.). Преимуществами аддитивного производства являются:

- возможность создания изделия чрезвычайно сложной формы без необходимости сборки из деталей и организации стыковых соединений;
- возможность оптимизации, в том числе топологической, на базе методов аддитивного производства [4, 5];
- возможность производства неоднородных и композиционных материалов метастабильной [6, 7] или градиентной структуры с наперед заданным законом изменения свойств в том или ином направлении, включая комбинирование материалов различной природы (металлокерамические материалы, металлополимерные [8] и другие композиты [9], адаптивные материалы, в том числе с эффектом памяти [10], и т.д.);
- чрезвычайно низкий коэффициент расхода материала по сравнению с субтрактивными производственными технологиями;
- возможность прецизионного ремонта изделий;
- возможность полной автоматизации производственного процесса.

Достаточно полный обзор истории развития аддитивного производства представлен в [11]. Первые эксперименты по аддитивному построению деталей относятся к 1960 годам. Практическая потребность в создании технологий, пригодных для промышленного применения, возникла в 1980-е для маломасштабного прототипирования методом стереолитографии [11, 12]. Особенно интенсивные исследования в данном направлении начались в 1990-е г. [13] по мере развития высокопроизводительной вычислительной техники и программных средств геометрического моделирования трехмерных тел. Были предприняты попытки создания металлических изделий: сначала трехмерных моделей [13], а затем и деталей [14] с применением принципа сплавления, заимствованного из технологии лазерной сварки металлов [15, 16]. На текущий момент разработан и развивается достаточно широкий спектр аддитивных технологий [17–20], ориентированных на создание изделий различного назначения при максимальной автоматизации производственных процессов [10]. Одним из технологических процессов,

представляющихся важными для промышленности, является непосредственное наплавление металлического материала (от англ. Direct Metal Deposition, DMD) или аддитивное производство металлических сплавов (Metal Additive Manufacturing, [10]). В данную группу технологий входят селективное лазерное спекание (от Selective Laser Sintering, SLS) и селективное лазерное сплавление (от Selective Laser Melting, SLM) [21]. Близким по физическим принципам является и метод электронно-лучевого сплавления (Electron Beam Melting, EBM) [22]. В основе перечисленных методов лежит послойное создание металлического монолита из порошкового полуфабриката путем высокотемпературного спекания [2, 23] или расплавления с последующей кристаллизацией под действием локального высокоинтенсивного нагрева лучом лазера [2, 16].

## 1. ОСОБЕННОСТИ АДДИТИВНОГО ПРОИЗВОДСТВА МЕТАЛЛОВ, ВЛИЯЮЩИЕ НА КАЧЕСТВО ИЗДЕЛИЯ

Перечисленные выше преимущества аддитивных технологий промышленного производства металлических изделий на базе SLS/SLM-методов в значительной степени нивелируются трудностью обеспечения качества изделия, связанной со сложностью протекающих в синтезируемом теле процессов, как механических, так и тепловых.

В работе [24] отмечается в первую очередь цикличность процессов нагрева–охлаждения. При многократном пробеге пятна лазерного луча по поверхности синтезируемого тела временная зависимость температуры в некоторой фиксированной точке является циклической, пилообразной. Материал в окрестности данной точки проходит последовательные расплавление и кристаллизацию как минимум дважды: при расплавлении порошкового полуфабриката на первом проходе, а затем сплавленного материала при втором, а возможно, и третьем проходе лазерного луча [24] (в зависимости от мощности лазера, толщины наносимого монослоя и других параметров технологического процесса). Кроме того, например, в сплаве Ti–6Al–4V вслед за двукратным процессом плавления–кристаллизации происходят фазовые превращения из  $\alpha$ -фазы в  $(\alpha + \beta)$ -состояние [24–26].

Скорость охлаждения и, следовательно, кристаллизации расплава при SLS-процессе составляет  $10^3$ – $10^4$  К/с по оценкам авторов [27], для SLM-процессов – до  $10^4$  К/с [28, 29]. Отмечается также, что поток тепла, как правило, однонаправлен по нормали к поверхности синтезируемого тела, что приводит к формированию столбчатых кристаллических структур сплава. Структура существенно зависит от скорости охлаждения; анализ данной зависимости приведен в работе [30].

Высокая скорость тепловых процессов может привести к необходимости учета волнового характера распространения тепла с конечным временем релаксации [31–42]. Кроме того, цикличность процессов высокоскоростного интенсивного нагрева и охлаждения в окрестности движущегося пятна лазерного луча порождает слоистую микроструктуру (“lamination effect” [3, 43–45]) с различными свойствами слоев. Анализ влияния реального температурного поля на полученную микроструктуру требует специальных методов численного решения обратной задачи восстановления истории теплового нагружения [46]. В работах [43–45] показано, что эпитаксиальное зарождение и рост зерен при повторных плавлениях/кристаллизациях приводит к существенной анизотропии синтезируемого материала в отношении трещиностойкости, что требует тщательного учета сложной формы с концентраторами напряжений при создании конструктивных элементов, работающих в условиях циклического нагружения.

Другим типичным дефектом является микропористая структура материала. Поры, образующиеся при адсорбции газовой N, O, H  $\alpha$ -фазой Ti–6Al–4V с последующим формированием центров кристаллизации вблизи границы раздела могут занимать до 1% объема тела при характерном диаметре около 10–50 мкм [28]. Чаще всего для снижения объемного содержания пористости, остающейся в материале после сплавления, проводится термообработка и горячее изостатическое прессование изделий. Такая постобработка позволяет значительно снизить объемное содержание пор и получить близкую к теоретической плотность материала [47–49], однако некоторая микроскопическая пористость сохраняется всегда, даже после термообработки. Как показывают последние исследования, это связано с присутствием аргона, остающегося в порах после лазерного синтеза/сплавления металлов [50, 51].

Таким образом, эффективные термомеханические свойства синтезируемого методами SLS/SLM металлического сплава, тем более композиционного градиентного материала сплошной среды, используемые в глобальном моделировании как процесса роста, так и готового изделия не могут быть оценены простейшими методами, применимыми для традиционных конструкционных материалов; ошибка при такой оценке нередко оказывается неприемлемой.

## 2. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, СОСТАВЛЯЮЩИЕ ОСНОВУ СЕЛЕКТИВНОГО ЛАЗЕРНОГО СПЛАВЛЕНИЯ И СПЕКАНИЯ

Указанные особенности структуры порождаются связными процессами, протекающими при

лазерном сплавлении и спекании металлического материала. Авторы обзора [52] приводят следующую простейшую схему синтеза наращиваемого тела:

- радиационный нагрев твердой подложки при воздействии лазерного луча;
- передача тепла от подложки к порошковому полуфабрикату, основным механизмом которой является теплопроводность твердого тела;
- образование локальной микроскопической ванны расплава по достижении температурой подложки точки ликвидуса;
- отдача тепла в окружающую среду излучением и конвекцией.

При этом большой градиент температуры на поверхности ванны расплава приводит к возникновению термокапиллярной конвекции – эффекта Бенара–Марангони [53–56] – и течению жидкого металла при существенной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры [57, 58]. Из-за перемещения ванны расплава вместе с движущимся пятном лазерного луча одновременно и непрерывно во времени в близких областях при расплавлении и кристаллизации происходят поглощение и выделение латентного тепла фазового перехода. Кроме того, происходят адсорбция газа из окружающей среды и испарение в поверхности ванны расплава [59], сопровождаемые переносом частиц порошкового полуфабриката (так называемое явление “денудации” [60–64]), а также фазовыми переходами второго рода в окружающем слое твердой металлической фазы [65], магнитогидродинамическим перемешиванием [66] и т.д. [67].

Характерными результатами “пилообразной” зависимости температуры в фиксированной точке изделия от времени при многократном прохождении источника по сечениям изделия [68, 69], помимо микроструктурных изменений (“комкования” (balling effect) [70], появления пористой структуры [71, 72] и микротрещин [73], шероховатости и текстуры поверхности [74]), являются также усадка [75] и развитие остаточной деформации – так называемая “поводка” [76], т.е. отклонения от заданной формы, способные привести к полной выбраковке готового изделия, остановке процесса печати до его завершения или в ряде случаев к выходу из строя оборудования. Так как в зоне воздействия источника и в прилегающих областях материала имеет место резкое повышение температуры и затем быстрое охлаждение со скоростью до нескольких миллионов градусов в секунду [27–29, 77, 78], а синхронно с нагревом наблюдается и порождаемое тепловым полем температурное деформирование изделия: образуются остаточные деформации, а при их стеснении в процессе нанесения последующих слоев – остаточные напряжения, нередко приво-

дящие к разрушениям еще в процессе печати. Существенную роль играет и то, что механическое поведение наращиваемого тела в глобальном масштабе в процессе роста качественно отлично от механики тела постоянного состава. Именно поэтому моделирование аддитивных процессов на макроуровне, т.е. оценка глобальных поволодок — отклонений от заданной формы изделия, является важной задачей. Замена многократных дорогостоящих экспериментальных попыток печати пробных серий сложных деталей на численное моделирование, реализуемое с достаточной точностью и в приемлемые сроки, для производителей, работающих с аддитивными технологиями, является актуальной проблемой как с технологической, так и с экономической точек зрения. Еще важнее формирование качественного понимания процесса зарождения остаточных полей и их зависимости от параметров технологического процесса.

Таким образом, постановка задачи моделирования термомеханических процессов, происходящих в материале, формируемом из порошковой фазы посредством SLS/SLM-технологий, является связной и многомасштабной [59, 79–81]. Практический интерес представляют как влияющие на структуру и текстуру сплава нестационарные процессы в области расплава, так и процессы теплообмена в окрестности движущейся ванны расплава, сопровождаемые фазовыми переходами и генерацией необратимых деформаций, а также напряженно-деформированное состояние всего изделия в целом. Главной задачей является выявление взаимосвязей между параметрами технологического процесса и свойствами материала на микроуровне и собственными деформациями изделия на макроуровне с точностью, достаточной для обеспечения полноценного управления процессом создания изделия с необходимыми параметрами, в том числе в реальном времени.

### 3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ СЕЛЕКТИВНОГО СПЛАВЛЕНИЯ И СПЕКАНИЯ

Главной целью моделирования технологического процесса селективного лазерного спекания или сплавления металлического материала является прогноз микроструктуры получаемого материала и напряженно-деформированного состояния изделия как в процессе наращивания, так и в конечном виде и выбор параметров технологического процесса, обеспечивающих минимизацию геометрических дефектов (“поводки”), остаточного напряженного состояния и дефектов, способных привести к разрушению изделия при нерасчетных нагрузках [52].

Основными задачами, решение которых требуется для достижения указанной цели, являются:

- описание теплового состояния изделия в целом в процессе его производства и непосредственно в области высокого градиента температур при пробеге пятна лазерного луча по поверхности наращивания;
- описание процесса формирования ванны расплава при поглощении энергии лазерного луча, процессов плавления и кристаллизации с учетом сопутствующих эффектов (поверхностного натяжения, потери тепла и массы при испарении с поверхности ванны расплава, образования ориентированной структуры при кристаллизации и др.);
- описание напряженно-деформированного состояния изделия в целом как в процессе роста, так и в конечном состоянии (оценка “поводки”).

Последняя задача формулируется в рамках механики деформируемого твердого тела и, как правило, решается численно на базе конечно-элементных программных комплексов [82] моделированием процесса роста за счет добавления к актуальной конфигурации тела новых элементов при перестроении сетки на шаге во времени или активации элементов предварительно построенной модели изделия, соответствующих наносимому слою [59, 83–86]. Данный процесс при малой по сравнению с характерным размером изделия толщине слоя является чрезвычайно ресурсоемким и длительным. Он требует специальных приемов сокращения размерности модели [87], в частности, построения адаптивных сеток в области высокого градиента температуры [88] и оснащения стационарной модели с грубой сеткой подвижной подобластью, окружающей ванну расплава, с достаточно тонкой сеткой [89]. Альтернативный подход, так называемая “теория непрерывно растущих тел” [90–92], позволяет построить модель роста без послойного прибавления массы и при адаптации к конечно-элементным комплексам способна обеспечить качественное сокращение вычислительных ресурсов по сравнению с моделями дискретного роста [93].

Задача описания процесса поглощения энергии лазерного луча, переноса тепла в порошковой среде, плавления, гидродинамики расплава с учетом явлений поверхностного натяжения, притока и уноса массы, высокоскоростного охлаждения и формирования кристаллической структуры решается численно на локальном масштабном уровне (~1–2 слоя). Результатом решения задачи являются предсказание кристаллической и пористой структуры и оценка эффективных свойств материала для последующего решения глобальной задачи роста тела [81, 94, 95].

Задача о теплопереносе представляется наиболее важной, так как исчерпывающая информация о тепловом режиме требуется как при описании

процессов плавления и кристаллизации, так и при оценке глобального напряженно-деформированного состояния тела, полученного селективным сплавлением или спеканием [52]. Решение этой задачи на промежуточном уровне (без явного описания гидродинамики расплава, но с адекватным прогнозом формирования ванны по изотермам ликвидуса и солидуса) является наиболее распространенным методом расчета зависимости свойств изделия от параметров технологического процесса. По состоянию на начало 2019 г. полноценная макроскопическая (т.е. не рассматривающая отдельные частицы порошка) модель, описывающая детали взаимодействия лазерного луча, твердой порошковой фазы и жидкой фазы, включая эффекты неравномерного поглощения энергии луча, не построена [52].

В обзоре [52] основных результатов моделирования теплового состояния тел, наращиваемых селективным лазерным спеканием либо сплавлением, приведено условное подразделение моделей на эмпирические, аналитические и численные. Последние два класса моделей авторы различают главным образом по признаку использования стандартных программных средств, т.е. по методу решения поставленной начально-краевой задачи теплопереноса.

Эмпирические модели используются, как правило, в системах управления селективным лазерным спеканием и сплавлением [96] и устанавливают взаимосвязь между параметрами технологического процесса и тепловым состоянием наращиваемого изделия по результатам обработки экспериментальных данных. К эмпирической можно отнести модель [97], описывающую зависимость нестационарного поля температуры от мощности лазера. Модель [98], предназначенная для управления процессом селективного лазерного наплавления (DMD), устанавливает зависимость температуры от скорости истечения порошка из сопла, скорости перемещения лазера и его мощности. Константы модели определяются по экспериментальным данным методом наименьших квадратов. Более сложной является модель, описанная в работах [99, 100], которая учитывает случайные колебания мощности и длительности импульсов лазера и устанавливает взаимосвязь мощности лазера и температуры в ванне расплава. Авторами решена задача идентификации параметров модели.

Эмпирическое моделирование применяется также в работах, посвященных управлению технологическим процессом сплавления с целью минимизации погрешностей. Так, например, в работе [101] разработана система управления процессом, основанная на оценке размеров и формы ванны расплава посредством оптических измерений. Позднее в [102] система была дополнена возможностями контроля нанесения порошкового

полуфабриката и анализа инфракрасного излучения поверхностью ванны расплава. В процессе экспериментов было установлено, что входные параметры эмпирической модели (помимо скорости перемещения луча лазера, параметров наносимого порошкового слоя, свойств материала, геометрии формируемого изделия, параметров атмосферы, в которой осуществляется процесс сплавления) могут включать еще ряд величин общим числом более 50. В работе [103] было осуществлено, например, построение зависимости температуры ванны расплава от координат точки на поверхности наращивания и выявлена взаимосвязь возникновения дефектов от локального перегрева. В [104] экспериментальным путем выявлена зависимость шероховатости поверхности изделия от подводимой энергии лазерного луча, предложено управление параметрами процесса за счет задания формы импульса лазера. Сходный метод управления процессом, но основанный на варьировании диаметра лазерного луча с учетом различий, вносимых разными порошковыми полуфабрикатами, предложили авторы работы [23]. Управление процессом, базирующееся на оценке влияния скорости движения пучка и мощности излучения, было предложено в [105]. В работе [106] изучено влияние параметров технологического процесса на усадку. Метод управления, основанный на эмпирическом описании процесса, был также предложен в [107].

Модели, ориентированные на управление SLS/SLM-процессами и использующие аналитические решения задач теплопереноса совместно с экспериментальными данными, можно отнести к полуэмпирическим. В основу, как правило, положены решения задачи теплопроводности при воздействии на границу точечного источника тепла [108–111] или гауссова распределенного источника [112]. В частности, модели [113, 114], базирующиеся на решении [111], реализуют алгоритм управления SLM-процессом в реальном времени по измерениям температуры и размерам ванны расплава. Модель с множественными входными и выходными параметрами, основанная на решениях задачи для движущегося источника тепла с учетом запаздывания за счет измерений, построена в [66] и усовершенствована впоследствии в [115]. В работе [116] описана полуэмпирическая модель, учитывающая кристаллизацию и обеспечивающая управление нанесением каждого слоя. Модель [117] сформулирована в форме Гаммерштейна.

#### 4. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Эмпирические модели процессов лазерного сплавления и спекания, в том числе опирающиеся на аналитические решения задачи теплопереноса, пригодны для управления технологическими процессами, однако не обеспечивают качествен-

ного понимания особенностей, протекающих связанных физических процессов и не предоставляющих количественной информации об эволюции системы в процессе наращивания тела. Теоретическое исследование процессов аддитивного производства требует постановки и решения соответствующих начально-краевых задач механики сплошной среды, тепло- и массопереноса. Их решение может строиться как аналитически (при соответствующих упрощающих гипотезах), так и численно – методами конечных объемов, конечных элементов и т.д.

Постановка задачи об эволюции состояния среды в окрестности наносимого слоя материала в общем случае сводится к связанной постановке нестационарных задач на различных уровнях:

1) локальный уровень

- нестационарная задача теплопереноса в окрестности нагрева среды подвижным пятном лазерного луча;

- задача о фазовых переходах первого рода (плавление порошкового материала и последующая кристаллизация расплава при охлаждении);

- задача о динамике вязкой жидкости в бассейне расплава при учете сил поверхностного натяжения;

2) переходный уровень

- нестационарная задача о теплообмене между наносимым слоем и подложкой (консолидированной системой ранее нанесенных слоев материала) при учете потери тепла в окружающую среду;

- задача термомеханики материала при действии высокоинтенсивного потока тепла со стороны движущегося бассейна расплава;

- задача о фазовых переходах второго рода, индуцируемых температурным полем;

3) глобальный уровень

- нестационарная задача о наращивании термовязкоупругого тела в дискретной либо континуальной постановке;

- задача термомеханики растущего тела при действии близкого к точечному высокоинтенсивного источника тепла и определение остаточного напряженно-деформированного состояния.

Степень детализации зависит от цели моделирования; различные варианты моделей приводятся в обзорных работах [59, 79–81, 118–120]. Так, при исследовании структуры наносимого материала и оценке его эффективных свойств основным является описание плавления/кристаллизации на локальном уровне [121–123], тогда как при минимизации поводки и остаточного напряженного состояния – на глобальном уровне. Другая градация масштабов предложена в работе [79]: микроуровень (~1 мкм), мезоуровень (~1 мкм–~1 мм), и макроуровень (~1 мм–~1 см). Решение полной трехуровневой задачи представляется

чрезвычайно ресурсоемким, не всегда целесообразным с инженерной точки зрения и требует как минимум специальных численных методов.

#### 4.1. Постановка начально-краевой задачи на локальном уровне

Постановка начально-краевой задачи о движении жидкой фазы в ванне расплава определяется законами сохранения массы, энергии и импульса [52, 124]. Закон сохранения массы в дифференциальной формулировке имеет следующий вид [52, 124, 125]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i (\rho v^i) = M_S, \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $\rho$  – массовая плотность,  $v^i$  – компоненты вектора скорости течения расплава. Неоднородное уравнение неразрывности учитывает приток массы  $M_S$  в систему. На локальном уровне рассматривается плавление порошкового полуфабриката в течение некоторого времени, значительно меньшего длительности одного цикла “нанесение полуфабриката–плавление–кристаллизация” по всей поверхности роста, приток массы в систему в некоторых моделях не рассматривается [121, 122, 126] аналогично моделям лазерной сварки [127–129], а поток считается стационарным:

$$\nabla_i v^i = 0.$$

Влиянием окружающей газовой среды, эффектами испарения части материала с поверхности ванны расплава, как правило, пренебрегают как при моделировании селективного лазерного сплавления, так и при описании наплавления (DMD) [130]. Скорость в области твердой фазы подчиняется условию Дарси [130].

Закон сохранения импульса имеет вид [52, 124, 125]

$$\rho \left( \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i \right) =$$

$$= g^{jk} \mu \nabla_j \nabla_k v^i - g^{ik} \nabla_k p + M_S v^i + F^i, \quad (2)$$

где  $\mu$  – вязкость,  $p$  – давление,  $M_S$  – плотность притока массы,  $F^i$  – вектор массовых сил (т.е. силы тяжести и силы Архимеда [124]).

Аналогичная постановка используется в работах [131, 132], а также в [130]. Слабая смешанная формулировка в переменных  $(v_i, p)$ , соответствующая (1) при  $M_S = 0$  и (2), предложена в [133]:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} p^* \left( \nabla_i v^i + \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\Omega, \\ & - \int_{\Omega} \left[ v_i^* \rho \left( \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i \right) + 2\mu \varepsilon_{ij}^* \varepsilon^{ij} - \right. \\ & \left. - \nabla_i v_i^* p - v_i^* F^i \right] d\Omega + \int_{\partial\Omega_G} v_i^* \sigma_{ij}^* dS = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j), \quad \dot{\epsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i^* + \nabla_i v_j^*), \\ (v_i, p) &\in (V_{Ad} \times P_{Ad}), \quad (v_i^*, p^*) \in (V_{Ad}^0, P_{Ad}), \\ v_i &\in \{v_i \in H^1(\Omega) | v_i = v_i^D (M \in \partial\Omega_v)\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$v_i^* \in \{v_i \in H^1(\Omega) | v_i = 0 (M \in \partial\Omega_v)\}, \quad p \in \{L^2(\Omega)\},$$

где  $\sigma_i^D, v_i^D$  – заданные краевые силы и скорости. Данная формулировка обеспечивает конечно-элементную дискретизацию задачи [133].

Уравнениям (1)–(3) соответствуют краевые условия на поверхности роста  $\partial\Omega_v$  и границах области определения задачи  $\partial\Omega_l$ . В работе [130] приводится вариант краевых условий, соответствующих методу селективного лазерного наплавления (DMD). В общем виде краевые условия записываются следующим образом:

$$v^i = u^i = 0 \quad \forall M \in \partial\Omega_l$$

на внутренних границах, расположенных достаточно далеко от границ ванны расплава.

Здесь  $u^i$  – компоненты вектора перемещения и

$$\sigma_v = k\gamma, \quad \sigma_\tau = \frac{\partial\gamma}{\partial T} \tau^j \nabla_j T \quad \forall M \in \partial\Omega_G$$

на поверхности бассейна расплава, где  $\gamma$  – коэффициент поверхностного натяжения, зависящий от температуры [57, 58],  $\sigma_v, \sigma_\tau$  – нормальная и касательная компоненты напряжения, определяемые поверхностным натяжением вследствие эффекта Марангони [117, 125, 129, 134]:

$$-\mu \frac{\partial u^\alpha}{\partial z} = \frac{\partial\gamma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

где  $z$  – нормальная к поверхности роста координата. Конечно-элементное представление сил поверхностного натяжения описано в работе [135].

Закон сохранения энергии формулируется либо как [135]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla_i [v^i(\rho E + p)] = \nabla_i (g^{ij} \kappa_{\text{eff}} \nabla_j T),$$

либо в виде, предложенном в работе [121]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_i (v^i E) = \nabla_j [g^{ij} \kappa(T) \nabla_j E] + \Phi, \quad (5)$$

где плотность тепловой энергии определяется соотношением [121, 137]

$$E = \int_0^T \rho c_p dT + \rho H,$$

$$H(T) = \begin{cases} \Delta H, & T > T_F, \\ \Delta H \frac{T - T_S}{T_F - T_S}, & T_S \leq T \leq T_F, \\ 0, & T < T_S. \end{cases}$$

Здесь  $H$  – латентная энтальпия,  $T_S, T_F$  – температуры начала и окончания фазового перехода и

$$E = \frac{\sum_{q=1}^n \alpha_q \rho_q E_q}{\sum_{q=1}^n \alpha_q \rho_q}.$$

Подход [136] вводит в рассмотрение параметр фазового состава  $\alpha_q$ , определяющий долю жидкой и газообразной фаз в представительном объеме для описания плавления порошкового полуфабриката, заполненного газовой средой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q) + \nabla_i (v_i \alpha_q \rho_q) &= \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}), \\ \sum_{q=1}^n \alpha_q &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Величины  $\dot{m}_{pq}, \dot{m}_{qp}$  в (6) – скорости переноса массы из  $p$ -й фазы в  $q$ -ю фазу и обратно. В соответствии с концепцией [136] рассматривается осредненная температура,  $\kappa_{\text{eff}}$  – эффективная теплопроводность и  $\rho$  – средняя плотность; в работе [121] осредненная температура связана с удельной тепловой энергией соотношениями

$$T = \begin{cases} \frac{E}{\rho c_p^S}, & E \leq \rho c_p^S T_S, \\ T_S + (T_L - T_S) \frac{E - \rho c_p^S T_S}{\rho c_p^S (T_L - T_S) + \Delta H}, & \rho c_p^S T_S < E < \rho c_p^S T_L + \Delta H, \\ T_L + \frac{E - \Delta H - \rho c_p^S T_L}{\rho c_p^L}, & E \geq \rho c_p^S T_L + \Delta H, \end{cases}$$

где  $c_p^S$  – удельная теплоемкость твердой фазы.

Источник в правой части уравнения (5) соответствует той или иной модели поглощения энергии излучения лазера порошковым слоем и подложкой.

Уравнению энергетического баланса (5) соответствует слабая формулировка [138, 139], используемая в работе [133] совместно с (3) и (4).

#### 4.2. Модели источника тепла, применяемые при моделировании селективного лазерного сплавления

Наиболее простым вариантом задания условий нагрева спекаемого материала в зоне действия источника (лазерного либо электронного луча) является непосредственное задание значений температуры в точках, относящихся ко вновь нанесенному и спеченному слоям [140]. Более аккуратным подходом является задание распределения температуры по объему материала вблизи зоны нагрева, которое определяется обычно на основе известных аналитических решений для задач о действии источника тепла некоторой формы на поверхности полупространства [141, 142].

При постановке краевой задачи, как правило, формулируется краевое условие второго рода, задающее распределение потока тепла по границе области. Простейшие модели, первоначально разработанные для описания сварочных технологий, используют точечный источник [108–110]; решение [111] получило, видимо, наиболее широкое практическое применение. Очевидно, модель точечного источника является “нулевым” приближением и может оказаться вполне адекватной при рассмотрении задачи на глобальном уровне; на переходном, а тем более на локальном уровне требуется более точное задание потока тепла на границе.

Различные приближенные модели теплового потока, создаваемого лазерным лучом, перечислены в работе [143]. Авторами предложено подразделение моделей на две группы.

##### 4.2.1. Геометрические модели источника тепла.

Решения первой группы последовательно уточняют форму изоповерхностей распределения освещенности. Первым приближением считается гауссово распределение освещенности по граничной поверхности, в декартовых координатах имеющее вид [144]

$$I(x_1, x_2, t) = \frac{2\beta P}{\pi r_l^2} \exp\left[-2\frac{(x_1 - vt)^2 + x_2^2}{r_l^2}\right], \quad (7)$$

где  $r_l$  – радиус луча лазера,  $v$  – скорость движения пятна луча по поверхности слоя порошкового полуфабриката,  $\beta$  – коэффициент поглощения,  $P$  – мощность лазера. В теории сварки аналитическое решение о поле температуры при действии подвижного источника с гауссовым распределени-

ем интенсивности получено в работе [112]. Гауссово распределение, задаваемое простейшей формулой (7), соответствует известным аналитическим решениям [84, 145–147] и широко используется при моделировании процессов лазерной обработки материалов [59, 117, 132, 133, 148–151].

Задание краевого условия с интенсивностью, определяемой соотношением (7), не позволяет учесть проницаемость слоя порошка пучком света [152]. Вообще говоря, при освещении порошка происходит многократное переотражение света от поверхностей частиц порошкового полуфабриката. Таким образом, при решении задачи уже на переходном уровне задание пространственного источника представляется более соответствующим физическому процессу нагрева подложки [136, 153, 154], играющего ведущую роль по сравнению с нагревом порошка, а на локальном уровне толщина порошкового слоя сравнима с характерным размером области определения задачи. Видоизмененная форма распределения (7), учитывающая потери тепла на поглощение порошковым, введена в работе [155] для описания DMD процессов:

$$I(x_1, x_2) = \frac{Pd}{\pi r_l^2 H_p} [\eta_p + (1 - \eta_p)\eta_l] \times \exp\left(-d\frac{x_1^2 + x_2^2}{r_l^2}\right), \quad (8)$$

где за  $\eta_p$  принимается доля энергии, поглощаемая в процессе впрыскивания порошка из сопла;  $\eta_l$  – доля энергии, поглощаемая нанесенным слоем;  $d$  – коэффициент интенсивности.

Методы первой группы [143] определяют трехмерное распределение интенсивности облучения. В качестве простейшего приближения объемного источника тепла рассматривается цилиндрический источник [156], т.е. распределение интенсивности в цилиндрической области, ось которой нормальна к поверхности полупространства (см. [143]):

$$I(x_1, x_2, x_3) = \frac{\beta P}{S\alpha_{OPD}h_{OPD}}.$$

Здесь  $x_1$  – продольная координата, соответствующая направлению движения пятна лазерного луча;  $x_2$  – поперечная координата;  $h_{OPD}$  – глубина проникновения лазерного луча (Optical Penetration Depth), т.е. геометрический путь пучка света, при пробеге которого падение интенсивности составляет  $1/e \approx 36.8\%$  от интенсивности на поверхности порошкового слоя;  $S$  – площадь сечения пучка;  $\alpha_{OPD}$  – поправочный коэффициент для соответствующего значения  $h_{OPD}$  [143, 156]. Недостатком модели является необходимость на-

значения эмпирического коэффициента  $\alpha_{OPD}$ ; так, в работе [143] он принимается равным единице из-за нехватки экспериментальных данных.

Следующей по сложности является модель конического источника, использовавшаяся в задачах о сварочных процессах [157, 158] и о селективном лазерном сплавлении [159]:

$$I(x_1, x_2, x_3) = q_0 \exp\left[-2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{r_0(x_3)^2}\right],$$

$$r_0(x_3) = r_e + \frac{z}{H}(r_e - r_i),$$

$$q_0 = \frac{6\beta P}{\pi H (r_i^2 + r_i r_e + r_e^2)},$$

где  $r_e, r_i$  – радиусы сечений конуса внешней поверхностью порошкового слоя и поверхностью подложки. Простейшим приближением пространственного гауссова распределения является полусферический источник, предложенный в работе [160]. Распределение интенсивности облучения в полусферической области радиусом  $r_i$  задается следующей функцией:

$$I(x_1, x_2, x_3) = q_0 \exp\left[-2 \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r_i^2}\right],$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2^5}{\pi^3}} \frac{\beta P}{r_i^3},$$

где интенсивность  $q_0$  определяется законом сохранения энергии

$$\beta P = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty I(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (9)$$

Модель полусферического источника используется на практике [161], однако не обеспечивает аккуратного описания изотермы ликвидуса. Экспериментальные данные свидетельствуют о существенном отклонении формы ванны расплава от полусферической формы; следующим эмпирическим уточнением модели является эллипсоидальный источник [160]

$$I(x_1, x_2, x_3) = q_0 \exp\left[-2 \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}\right)\right], \quad (10)$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2^5}{\pi^3}} \frac{\beta P}{a_1 a_2 a_3}.$$

Здесь  $a_1, a_2$  – полуоси эллипсоида в граничной плоскости,  $a_3$  – полуось, соответствующая нормальной координате  $x_3$ . Схожая формула применяется в работе [84]:

$$I(x_1, x_2, x_3) = \frac{6\sqrt{3} P \eta f_S}{\pi \sqrt{\pi} a_1 a_2 a_3} \times \exp\left[-3 \left(\frac{(x_3 + vt)^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}\right)\right],$$

где  $f_S$  – масштабный коэффициент процесса.

Наблюдаемая форма ванны расплава существенно ближе к эллипсоиду, однако вследствие эффекта поглощения латентного тепла на фронте расплавления и выделения на фронте кристаллизации она несимметрична относительно плоскости  $Ox_2x_3$  [162]. В работе [160] данная особенность учитывается также эмпирически введением деформированного в продольном направлении эллипсоида [160]:

$$I_{F,R}(x_1, x_2, x_3) = f_{F,R} \sqrt{\frac{2^5}{\pi^3}} \frac{\beta P}{a_{1(F,R)} a_2 a_3} \times \exp\left[-2 \left(\frac{x_1^2}{a_{1(F,R)}^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}\right)\right], \quad (11)$$

где  $a_{1(F)}, a_{1(R)}$  – полуоси эллипсоида в продольном направлении в передней и задней полусферах, соответствующих плавлению и кристаллизации;  $f_F + f_R = 2$ , исходя из условия (9) в виде

$$\beta P = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty I_F(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty I_R(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = (f_F + f_R) \frac{\beta P}{2}.$$

Распределение в форме деформированного эллипсоида [160] является одним из наиболее распространенных при исследовании SLM-процессов на локальном уровне [66, 85, 94, 95, 163, 164].

**4.2.2. Модели поглощения света слоем порошкового полуфабриката.** Перечисленные выше модели являются эмпирическими. Более строгий подход основан на анализе поглощения света порошковым слоем, который, вообще говоря, неравномерен по толщине. В данном классе моделей распределение интенсивности по внешней поверхности слоя порошка, как правило, гауссово (7) (возможны и другие варианты, например, эллиптическое (10) или двойное эллиптическое (11) распределения при  $x_3 = 0$ ). Распределение интенсивности облучения по толщине слоя порошка определяется функцией поглощения  $\beta(x_3)$

$$I(x_1, x_2, x_3) = \frac{2P}{\pi r_i^2} \exp\left[-2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{r_i^2}\right] f(x_3). \quad (12)$$

В работах [165, 152] проведена аналогия между порошком и сплошной прозрачной средой с не-

которым коэффициентом поглощения  $\beta$ , зависящим от координаты  $x_3$ . Построено решение уравнения лучистого переноса относительно угловой интенсивности облучения  $I(x^i, \Omega^j)$  в форме [166]

$$\frac{1}{\beta} \Omega^i \nabla_i I(x^j, \Omega^j) = -I(x^j, \Omega^j) + \frac{\omega}{2} \int_{4\pi} I(x^j, \Omega^j) P(\Omega'^j, \Omega^j) d\Omega^j,$$

где  $P(\Omega'^j, \Omega^j)$  – вероятностная функция фазы рассеяния,  $\Omega^j$  – компоненты вектора направления потока энергии, заданного величиной  $\Omega^j I(x^j, \Omega^j) d\Omega^j$ ,  $w$  – альbedo рассеивающей фазы. Решение [152] приводит к следующему закону затухания интенсивности в глубине слоя порошка:

$$f(x_3) = -\eta \frac{dq}{d(\eta x_3)}, \quad \eta = \frac{\pi}{4r_p}, \quad (13)$$

где  $\eta$  – коэффициент экстинкции,  $r_p$  – средний радиус частицы порошкового полуфабриката,  $q$  – безразмерная плотность результирующего потока лучистой энергии:

$$q = \frac{\lambda a_S}{(4\lambda - 3)D} \left\{ (1 - \lambda^2) e^{-\eta H_p} \left[ (1 - a_S) e^{-2a_S \eta x_3} + (1 + a_S) e^{2a_S \eta x_3} \right] - (3 + \lambda e^{2\eta H_p}) \left\{ [1 + a_S - \lambda(1 - a_S)] \times e^{2a_S \eta (H_p - x_3)} + [1 - a_S - \lambda(1 + a_S)] e^{2a_S \eta (x_3 - H_p)} \right\} \right\} - 3 \frac{1 - \lambda}{4\lambda - 3} (e^{-\eta H_p} - \lambda e^{\eta(x_3 - 2H_p)}),$$

$H_p$  – толщина порошкового слоя,  $\lambda = 0.7$  – полусферическая отражающая способность,

$$D = (1 - a_S) [1 - a_S - \gamma(1 + a_S)] e^{-2a_S \eta H_p} - (1 + a_S) [1 + a_S - \gamma(1 - a_S)] e^{2a_S \eta H_p}.$$

Решение [152] получено в достаточно строгой постановке задачи; к его недостаткам можно отнести значительную для практического применения сложность. Тем не менее модель [152] использована в работах [167] и [168]. Авторы статьи [168] указывают на лучшее описание моделью (11) формы ванны расплава по сравнению с (13); преимущество связано с применением “двойного” эллипсоида в (11) и центрально-симметричного гауссова распределения (12) совместно с моделью [152].

В работе [169] предложен полуэмпирический подход, основанный на линейном приближении функции затухания:

$$f(x_3) = \frac{2\beta}{\delta} \left( 1 - \frac{x_3}{\delta} \right),$$

где  $\delta$  – некоторый характерный размер. Данная модель проста в использовании, однако ее недостатком, как и у большинства эмпирических моделей, является выбор константы  $\delta$ . Выбор авторами [143] величины  $\delta = H_p$  приводит к полному затуханию интенсивности при достижении подложки.

Аналогичная модель, основанная на экспоненциальном законе Бугера для оптически однородных сред, предложена в [153]:

$$f(x_3) = \frac{\beta}{H_p} \exp\left(-\frac{|x_3|}{H_p}\right).$$

Модификация закона Бугера с поверхностным распределением Гаусса при описании импульсного воздействия лазерного излучения на слой порошкового полуфабриката предложена в работах [170–174] и [175]. Импульсное воздействие задается пространственно-временным распределением интенсивности [170]

$$I(t) = \frac{P}{\pi r_l^2} Sh[\Theta(x_1 + 2r_l - vt) - \Theta(x_1 - 2r_l - vt)][\Theta(t - h\tau_1 + \tau_2) - \Theta(t - h\tau_1)],$$

где  $\Theta$  – функция Хевисайда,  $P$  – мощность излучения лазера,  $Sh$  – функция распределения плотности потока в луче лазера (7),  $\tau_1$  – интервал между импульсами,  $\tau_2$  – длительность импульса.

Альтернативный подход, не использующий аналогию с прозрачным континуумом и учитывающий стохастическую структуру системы частиц, образующей порошковый слой, предложена в работе [176]. Коэффициент поглощения  $f(x_3)$  определяется методом Монте-Карло для случайного распределения частиц порошка. Предложенное в работе [177] развитие подхода [165] на гетерогенные среды, основанное на уравнении переноса излучения, вводит в рассмотрение парциальные интенсивности излучений, осредненные в каждой фазе среды. Полученное векторное уравнение переноса излучения связывает парциальные интенсивности и описывает межфазный обмен излучением. Модель применима при спекании металлических и полупрозрачных керамических порошков; в предельном случае одной непрозрачной фазы модель сводится к скалярному уравнению и не противоречит ни методу Монте-Карло, ни данным экспериментов.

Необходимость учета распределения размеров частиц порошка и геометрии их упаковки при расчете интенсивности облучения указана также в работе [178]. Авторы указывают на ограниченность применения модели [165] в случае тонких порошковых слоев с плотной укладкой частиц. Действительно, время усреднения энергии, поглощаемой сферой радиусом  $R$ , составляет  $\tau_c =$

$= R^2/D$ , где  $D$  – температуропроводность металла, тогда как время плавления частицы –  $\tau_m = RH_m/\alpha_0 I$ . Здесь в свою очередь  $H_m$  – удельная энтальпия плавления,  $\alpha_0$  – коэффициент поглощения плоской поверхности материала. Так как типичные для SLM стального сплава параметры имеют следующие значения:  $D \sim 0.04 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $H_m \sim 8 \text{ кДж/см}^3$ ,  $\alpha_0 \sim 0.3$ , то при среднем радиусе частицы  $R = 10 \text{ мкм}$  и  $I = 10 \text{ мВт/см}^2$  время усреднения энергии приблизительно на порядок превосходит время плавления:  $\tau_c \sim 25 \text{ мкс}$ ,  $\tau_m \sim 2.5 \text{ мкс}$  [178]. В результате неоднородность тепловых полей в частицах приводит к их неполному расплавлению, следствием которого является пористая структура материала. Как указывают авторы работы [179], расплав при этом распространяется за счет капиллярных сил при смачивании нерасплавленных частиц. Неоднородность частиц при среднем радиусе  $\sim 100 \text{ мкм}$  приводит к колебаниям размеров ванны расплава и искривлению дорожки проплавления порошка [119, 180, 181]. Типичный радиус частиц порошков, применяемых на практике, при этом составляет около 18–20 мкм [182]. Так как типичный радиус частицы порошка  $\sim 10 \text{ мкм}$  значительно превышает длину волны лазерного излучения, имеется возможность применения метода траекторий лучей [178, с. 2478], первоначально примененного к задаче о лазерном нагреве порошкового металла без учета зависимости поглощения от направления и поляризации луча [183]. С использованием алгоритма упаковки частиц [184] были получены численные решения и показано, что существенная неоднородность поглощения энергии лазерного луча порошковым слоем связана как с неоднородностью поглощения собственно частицей, так и с неоднородностью упаковки частиц. Авторы обзора [81] указывают на необходимость максимально точного приближения модели поглощения энергии лазерного луча при моделировании аддитивных процессов, по крайней мере, на локальном уровне, для определения формы и размеров ванны расплава [185].

Уточнение модели теплообмена между частицами сферической формы, взаимодействующими через круговое пятно контакта и зазор, заполненный газом, предложено в работе [186]. Модель не содержит эмпирических параметров и вводит в рассмотрение безразмерные величины, от которых зависит эффективная теплопроводность упакованного слоя частиц:

- объемную долю твердой фазы  $f_S$ ,
- среднее координационное число упаковки  $N$ ,
- относительный радиус пятна контакта  $\bar{a}$ .

Кроме того, эффективная теплопроводность определяется коэффициентом теплопроводности  $k_S$  материала частиц, а также теплопроводно-

стью, числом Кнудсена  $Kn$  и показателем адиабаты  $\gamma'$  газовой среды.

Эффективная теплопроводность случайной структуры частиц характерного диаметра  $D$  определяется соотношением [186]

$$\kappa_E D \Sigma = \pi^{-1} f_S N,$$

тепловое сопротивление контакта между двумя частицами с температурами в центрах  $T_1, T_2$  равно

$$\Sigma^{-1} = \frac{2\pi}{T_2 - T_1} \int_0^\infty q(r) r dr = \pi k_S \int_0^\infty \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right|_{z=0} r dr,$$

где  $q(r)$  – плотность теплового потока через область контакта  $S_C$ ,  $\bar{T}$  – безразмерная температура:

$$\bar{T} = \begin{cases} \frac{T - T_C}{T_C - T_1} & (z < 0), \\ \frac{T - T_C}{T_2 - T_C} & (z > 0), \end{cases} \\ T_C = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

При пренебрежимо малой теплопроводности газа сопротивление определяется теплопроводностью твердой фазы и радиусом пятна контакта  $a$  соотношением  $\Sigma^{-1} = 2\kappa_S a$ , и здесь

$$\kappa_E = 2 \frac{a f_S N}{D \pi} \kappa_S.$$

В предельном случае точечного контакта между частицами эффективный коэффициент теплопроводности определяется следующим соотношением:

$$\kappa_E = \frac{f_S N}{2} \left[ \frac{1}{2} \ln(1 + L) + \ln(1 + \sqrt{L}) + \frac{1}{1 + \sqrt{L}} - 1 \right], \\ L = \frac{\gamma' + 1}{9\gamma - 5} \frac{3}{4\sqrt{\pi} Kn}.$$

Модель [186] обеспечивает хорошее соответствие экспериментальным данным [187] и может представлять практический интерес при оценке теплообмена между частицами спеченной фазы.

В работе [81] сделан вывод, что модели [152, 165], основанные на гипотезе об однородности эквивалентной порошковому слою среды, как и модели, основанные на построении траекторий лучей [188–191], и метод [137, 192, 193] на основе закона Ламберта–Бира затухания интенсивности по толщине слоя порошка (пренебрегающий отражением от поверхностей частиц), как правило, недостаточно точны и не могут описать неполное расплавление в силу неоднородности поля температуры. Задание источника тепла в краевом условии является достаточно грубым приближением; задание объемного источника в правой части (5)

ближе к реальности [119, 181, 173, 175]. Тем не менее модель [165] применима при невысокой интенсивности облучения и высоких коэффициентах теплопроводности материала порошка [178], при которых время усреднения энергии, поглощаемой частицей, и время плавления сравнимы, т.е. структура расплава становится однородной.

Помимо указанных выше эффектов, при оценке поглощаемого тепла может оказаться необходимым учет неравномерности распределения поглощения в силу неплоскостности поверхности [194], приводящей к пространственной неоднородности фазового перехода при плавлении и нестационарности динамики жидкости в ванне расплава. Более того, наблюдается и перераспределение частиц порошка в окрестности ванны расплава в силу эффекта денудации (от англ. “denudation”) – уноса частиц твердой фазы вблизи дорожки плавления металла, не учитываемого традиционными моделями двухфазной системы “твердая фаза–расплав”. Данное явление порождается в первую очередь потоком газа, возникающим при испарении металла с поверхности расплава за счет эффекта Бернулли [60]. Давление паров оценивается соотношением

$$P(T) = P_0 \exp\left[\chi(T_B^{-1} - T^{-1})\right],$$

где  $P_0$  – давление окружающего газа,  $T$  – текущая температура,  $T_B$  – температура кипения,  $\chi$  – теплота парообразования [195]. Частицы порошка, уносимые потоком, осаждаются в некоторой окрестности ванны расплава, что приводит к локальному изменению толщины слоя полуфабриката – уменьшению вблизи границы расплава и неравномерному увеличению на некотором удалении [60]. Кроме того, при плавлении происходит “втягивание” в ванну расплава частиц, находящихся в непосредственной близости от поверхности слоя порошка и фронта фазового перехода, за счет сил поверхностного натяжения [196]. При этом полного расплавления данных частиц, как правило, не наблюдается, следствием чего является увеличение неравномерности структуры. Денудация приводит, кроме того, и к увеличению шероховатости поверхности (за счет осаждения частиц), и к образованию пористой структуры с удлиненной формой пор [197]. Толщина сплавленного слоя вдоль траектории движения лазерного луча также оказывается ниже расчетной.

Как показано в работе [60], испарение с поверхности ванны расплава зависит от давления окружающей среды. При высоком давлении поток, направленный по нормали к поверхности расплава, является достаточно узким, при этом основным механизмом денудации является унос частиц за счет эффекта Бернулли. При низком давлении окружающего газа восходящий поток образует более широкий факел, вследствие чего

реализуется перенос частиц преимущественно по касательной к поверхности с образованием полового “бруствера” вокруг дорожки плавления. В последнем случае эффект денудации более выражен [60]. Точкой минимума денудации является давление газа, при котором происходит переключение механизма уноса [198].

Так как детальное моделирование процесса поглощения энергии конгломератом частиц полуфабриката при рассмотрении задачи на глобальном уровне приводит к выраженной многомасштабности и резкому росту минимально необходимых вычислительных ресурсов, оценка границ применимости аналитических моделей поглощения и погрешностей, вносимых ими в конечный результат (т.е. вычисленное остаточное напряженно-деформированное состояние конечного изделия), требует дальнейшего детального исследования. Практическая важность аналитических результатов [152, 160, 165] и др. представляется как минимум несколько заниженной авторами работы [81].

#### 4.3. Постановка задачи теплопереноса на переходном уровне

На переходном уровне гидродинамика расплава и процессы фазовых превращений, как правило, не рассматриваются. Такое приближение позволяет существенно сократить размерность задачи, ограниченной только уравнением (14), численное решение которого достаточно быстро сходится даже при наличии областей с высоким градиентом [52]. Состояние наращиваемого тела считается зависящим в первую очередь от нестационарного поля температуры; области фазовых превращений задаются соответствующими изотермами. Состояние среды в ванне расплава и ее окрестности при моделировании на переходном уровне определяется следующими гипотезами [52]:

- подложка нагревается за счет поглощения энергии лазерного луча, частично поглощенной также порошковым слоем;
- при передаче тепла в окрестности пятна лазерного луча основным его механизмом является теплопроводность;
- область расплава образуется, как только температура подложки достигает точки плавления;
- в окрестности поверхности расплава образуется область с высоким градиентом температуры, порождающим термокапиллярную конвекцию (эффект Бенара–Марангони);
- в силу перемещения ванны расплава вместе с пятном лазерного луча одновременно в близких точках тела (и притом непрерывно во времени) происходит плавление и кристаллизация с соответствующим изменением латентного тепла фазы;

- в области твердого тела, лежащей внутри соответствующих изотерм, реализуются фазовые переходы второго рода;

- потеря тепла в окружающую среду осуществляется посредством механизмов конвекции и излучения;

- свойства материала существенно зависят от температуры.

Закон сохранения энергии формулируется в виде уравнения теплопроводности [124, 125]

$$\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v^i \nabla_i T \right) = \nabla_i (\kappa g^{ij} \nabla_j T) + S_H. \quad (14)$$

Здесь  $\kappa$  – коэффициент температуропроводности,  $S_H$  – источник энергии в форме [124, 125]:

$$S_H = -\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \Delta H + \nabla_i (v^i \Delta H) \right], \quad (15)$$

где  $\Delta H$  – латентное тепло фазового превращения первого рода.

Поток тепла практически во всех работах задается законом Фурье

$$q_i = -\kappa \nabla_i T,$$

где  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности. Краевые условия задачи теплопереноса задаются следующим образом [59, 66, 124, 125, 130, 132, 143, 144, 150, 154, 167, 176, 199–201]:

$$\begin{aligned} \forall M \in \Gamma_{lg} \quad -\kappa v^i \nabla_i T &= Q + q_{Conv} + q_{Rad}, \\ q_{Conv} &= -h_{Conv} (T - T_{Env}), \\ q_{Rad} &= -\sigma_B \varepsilon (T^4 - T_{Env}^4). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $q_{Conv}$  – потери тепла за счет конвекции,  $q_{Rad}$  – потери тепла за счет излучения с поверхности расплава,  $\Gamma_{lg}$  – поверхность раздела “жидкость–газ”,  $Q$  – источник тепла в форме (7), (8) и т.д., если приток тепла в результате облучения лазером задается на поверхности раздела;  $h_{Conv}$  – коэффициенты теплопередачи,  $\sigma_B$  – константа Больцмана,  $\varepsilon$  – коэффициент черноты,  $T_{Env}$  – температура окружающей газовой среды. Поток тепла за счет излучения может быть приведен к квазилинейной форме [68], предпочтительной при численном решении задачи:

$$\begin{aligned} q_{Rad} &= h_{Rad}(T)(T - T_{Env}), \\ h_{Rad}(T) &= \sigma_B \varepsilon (T^3 + T^2 T_{Env} - T T_{Env}^2 - T_{Env}^3). \end{aligned}$$

В работах [156, 202] потери тепла на излучение с поверхности ванны расплава считаются пренебрежимо малыми, т.е.  $q_{Rad} \approx 0$ . При задании источника в форме (15) воздействие лазерного луча задается краевым условием второго рода (16) с ненулевым членом  $Q$ .

На границе нанесенного слоя и подложки ставится условие [27]

$$-\kappa_{(S,M)} \frac{\partial T_i}{\partial x_3} = h(T_{sub} - T_{(S,M)}).$$

Здесь индекс  $S$  соответствует твердой фазе, индекс  $M$  – расплаву. Для неэвтектических сплавов:

$$\kappa_S \frac{\partial T_S}{\partial x_3} - \kappa_M \frac{\partial T_M}{\partial x_3} = f(T) \Delta H V_S,$$

$V_S$  – скорость движения фронта кристаллизации. В работе [168] на границе ГД раздела подложки и наносимого слоя поставлено краевое условие первого рода

$$T|_{\Gamma_D} = T_{sub} \quad \forall M \in \Gamma_D.$$

На боковой границе выделенной области краевые условия, как правило, соответствуют адiabатической стенке [94, 168]:

$$\kappa n^i \nabla_i T = 0 \quad \forall M \in \Gamma_B.$$

Начальные условия имеют вид  $T(x_1, x_2, x_3, 0) = T_0$  [168], в качестве температуры начального состояния обычно принимается температура окружающей среды  $T_0 = T_{Amd}$ .

Слабая формулировка модели теплопереноса, положенная в основу конечно-элементной дискретизации задачи, представлена, например, в работах [138, 139] или [68]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \left( \rho_C \frac{\partial T}{\partial t} + \Delta H \frac{df_L}{dt} - D_{Mech} - S_H \right) \delta T + \right. \\ \left. + g^{ij} \kappa \nabla_i T \nabla_j (\delta T) \right] d\Omega = \\ = \int_{\partial\Omega} (Q + q_{Conv} + q_{Rad}) \delta T dS. \end{aligned}$$

Здесь  $D_{Mech}$  – механическая диссипация, которой при моделировании SLS/SLM-процессов, как правило, пренебрегают [68].

Модели переходного уровня, как правило, допускают принятие различных упрощающих гипотез. Так, например, авторы [68] указывают, что эффект выделения латентного тепла фазового перехода пренебрежимо мал по сравнению с количеством тепла, подводимым в систему лазерным облучением; на переходном уровне размер зоны интенсивного нагрева мал по сравнению с характерным размером пространственной области определения задачи, а скорость протекания фазовых превращений много выше скорости термодиффузии. Аналогичные выводы сделаны в [94, 203–205], тогда как на локальном уровне выделение и поглощение латентного тепла существенно влияет на форму и размеры ванны расплава [206]. Пренебрежение латентным теплом приводит к завышенной оценке ширины ванны и отношения ширины ванны расплава к ее длине.

### 5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ТЕПЛОМ СОСТОЯНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ИСТОЧНИКЕ ТЕПЛА

Аналитические решения задачи теплопереноса при высокоинтенсивном локальном нагреве полуплоскости или полупространства, первоначально полученные для описания процессов дуговой сварки [108–110], основаны на упрощающих гипотезах: не рассматривается приток массы, не учитываются испарение металла с поверхности ванны расплава, конвекция в ванне расплава, теплообмен с газовой средой, потери тепла за счет излучения с поверхности расплава и т.д. Пренебрежение данными явлениями на локальном уровне может привести к недопустимым погрешностям, однако на переходном уровне аналитические решения могут оказаться применимы к описанию процессов селективного лазерного сплавления в силу малости потерь тепла по сравнению с притоком (по крайней мере, в первом приближении). Более сильным ограничением представляется пренебрежение зависимостью свойств материала от температуры. Тем не менее аналитические решения оказываются полезны:

- при качественном анализе процессов, реализующихся при лазерном сплавлении;
- при проектировании технологических процессов, так как решение может быть представлено в безразмерной форме [113, 114];
- при построении алгоритмов управления в реальном времени процессами селективного спекания и сплавления [113, 114];
- при локальном уточнении численных решений глобального уровня, полученных на достаточно грубых сетках [207–209].

Наиболее широкое распространение при практических расчетах тепловых полей, возникающих в металлических материалах при сварке или иных процессах, основанных на высокоинтенсивном нагреве источником, близким к точечному, получило решение [111]. Рассматривается точечный нагрев полубесконечной пластины поверхностным источником тепла, движущимся вдоль оси  $Ox_1$  с постоянной скоростью  $v$ :

$$T = T_0 + \frac{q}{2\pi k R} \exp\left(-v \frac{w + R}{2\kappa}\right), \quad w = x_1 - vt, \quad (17)$$

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

где  $q$  – мощность точечного источника тепла,  $R$  – расстояние до источника тепла,  $\kappa$  – коэффициент температуропроводности,  $k$  – коэффициент теплопроводности. В безразмерной форме решение (17) имеет вид [210]

$$\bar{T} = \frac{n}{R_*} \exp(-\xi_1 - R_*), \quad \bar{T} = \frac{T - T_0}{T_c - T_0}, \quad (18)$$

$$R_* = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, \quad n = \frac{qv}{4\pi\kappa\rho C(T_c - T_0)},$$

где  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – безразмерные координаты:  $\xi_1 = \frac{1}{2}vw/\kappa$ ,  $T_c$  – критическая температура. Безразмерная формулировка (18) решения (17) применена, в частности, в работах [113, 114] для построения алгоритма управления технологическим процессом. В работах [211, 212] на базе (17) получены в замкнутой безразмерной форме выражения для градиента температуры, играющего ключевую роль при формировании микроструктуры материала в процессе охлаждения [27, 28, 30, 213].

В [211] получено решение задачи о нагреве пластины  $\Omega$ :  $x_1 \in [0, L]$ ,  $x_2 \in [-b/2, b/2]$ ,  $x_3 \in [0, h]$  точечным источником тепла, движущимся с постоянной скоростью  $v$ . Геометрические размеры считаются достаточно большими по сравнению с характерным размером области нагрева для пренебрежения влиянием границы  $\partial\Omega$ , а размеры ванны расплава – по сравнению с радиусом луча  $r_l$ , что уменьшает погрешность модели точечного источника [214, 215]. Границы области  $\Omega$  – адиабатические, влияние конвекции в ванне расплава, излучения тепла с ее поверхности, испарение металла с поверхности расплава предполагаются пренебрежимо малыми [216, 217], константы среды не зависят от температуры. Приток массы при нанесении слоя полуфабриката также не учитывается. Распределение безразмерной температуры определяется соотношением

$$\bar{T} = e^{-\bar{x}_0} K_0(\bar{r}_0), \quad \bar{r}_0 = \sqrt{\bar{x}_0^2 + \bar{z}_0^2}, \quad (19)$$

где безразмерные параметры соответствуют [225]

$$\bar{T} = \frac{T - T_0}{\beta Q} \pi k b, \quad \bar{x}_0 = \frac{x_1 - vt}{2\kappa} \rho c v,$$

$$\bar{z}_0 = \frac{z}{2\kappa} \rho c v, \quad \bar{t} = \frac{t}{2\kappa} \rho c v^2.$$

Здесь  $K_0$  – модифицированная функция Бесселя II рода. Безразмерная скорость охлаждения имеет вид

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \exp[-(\bar{x} - \bar{t})] \left\{ \frac{\bar{x} - \bar{t}}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{t})^2 + \bar{z}_0^2}} K_1 \times \right. \quad (20)$$

$$\left. \times \left( \sqrt{(\bar{x} - \bar{t})^2 + \bar{z}_0^2} \right) + K_0 \left( \sqrt{(\bar{x} - \bar{t})^2 + \bar{z}_0^2} \right) \right\}.$$

Компоненты безразмерного градиента температуры  $\nabla \bar{T}$  в декартовых координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_0} &= -e^{-\bar{x}_0} \left\{ \frac{\bar{x}_0}{\bar{r}_0} K_1(\bar{r}_0) + K_0(\bar{r}_0) \right\}, \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}_0} &= -e^{-\bar{x}_0} \left\{ \frac{\bar{z}_0}{\bar{r}_0} K_1(\bar{r}_0) \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

размерные скорость охлаждения и модуль градиента температуры связаны с безразмерными как

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\beta Q \rho c v^2}{2\pi \kappa^2 b} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}}, \quad |\nabla_i T| = \frac{\beta Q \rho c v}{2\pi \kappa^2 b} |\bar{\nabla}_i \bar{T}|, \\ |\bar{\nabla}_i \bar{T}| &= \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}_0}\right)^2}. \end{aligned}$$

В работе [212] получено аналогичное решение для трехмерного тела:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{2\bar{r}_0} \exp[-(\bar{x} - \bar{t})] \left[ \frac{\bar{x} - \bar{t}}{\bar{r}_0} K_1(\bar{r}_0) + K_1(\bar{r}_0) \right], \quad (22)$$

где безразмерная температура введена следующим образом:

$$\bar{T} = \frac{2\pi \kappa^2}{\beta Q \rho c v} (T - T_0).$$

Компоненты градиента температуры определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_0} &= -\frac{1}{2\bar{r}_0} \exp[-(\bar{x}_0 + \bar{r}_0)] \left( 1 + \frac{\bar{x}_0}{\bar{r}_0} + \frac{\bar{x}_0}{\bar{r}_0^2} \right), \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}_0} &= -\frac{\bar{y}_0}{2\bar{r}_0} \exp[-(\bar{x}_0 + \bar{r}_0)] \left( 1 + \frac{1}{\bar{r}_0} \right), \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}_0} &= -\frac{\bar{z}_0}{2\bar{r}_0} \exp[-(\bar{x}_0 + \bar{r}_0)] \left( 1 + \frac{1}{\bar{r}_0} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\bar{r}_0 = \sqrt{\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2 + \bar{z}_0^2} = \sqrt{(\bar{x} - \bar{t})^2 + \bar{y}_0^2 + \bar{z}_0^2},$$

размерные скорость охлаждения и модуль градиента температуры связаны с безразмерными следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\beta Q (\rho c)^2 v^3}{4\pi \kappa^3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}}, \quad |\nabla_i T| = \frac{\beta Q (\rho c v)^2}{4\pi \kappa^3} |\bar{\nabla}_i \bar{T}|, \\ |\bar{\nabla}_i \bar{T}| &= \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}_0}\right)^2}, \end{aligned}$$

безразмерные неподвижная и подвижная координатные системы связаны соотношением

$$\bar{x}_0 = \bar{x} + \bar{t}.$$

Решения (19)–(23), полученные на базе простейшей модели подвижного точечного источника [111], коррелируют с численными решениями в нелинейной постановке задачи [211, 212], обеспечивают первичную оценку интенсивности тепловых потоков в наращиваемом теле при нагреве–охлаждении и, следовательно, предоставляют возможность анализа получаемой микрострукту-

ры материала, по крайней мере, в первом приближении.

Решение [111], полученное для полубесконечной области, не описывает увеличения ванны расплава при приближении точечного источника к границе наращиваемого тела, наблюдаемого экспериментально [218]. Учет влияния границы области на распределение температуры получен в работе [219] методом суперпозиции двух движущихся со скоростью  $v$  в противоположных направлениях точечных источников, для которых существует решение (17)

$$\begin{aligned} \bar{T} &= e^{-\bar{x}_0} K_0 \left( \sqrt{\bar{x}_0^2 + \bar{z}_0^2} \right) + \\ &+ e^{-2\bar{a} + \bar{x}_0} K_0 \left( \sqrt{(2\bar{a} - \bar{x}_0) + \bar{z}_0^2} \right), \end{aligned}$$

где  $\bar{a}$  – безразмерное расстояние от источника до оси симметрии, определяющей положение края пластины [219]. Приближение одиночного источника к свободному краю соответствует встречному сближению двух источников в направлении линии симметрии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} &= -e^{-\bar{x} + \bar{t}} \left\{ \frac{\bar{x} - \bar{t}}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{t})^2 + \bar{z}_0^2}} \times \right. \\ &\times K_1 \left[ \sqrt{(\bar{x} - \bar{t})^2 + \bar{z}_0^2} \right] + K_0 \left[ \sqrt{(\bar{x} - \bar{t})^2 + \bar{z}_0^2} \right] \left. \right\} + \\ &+ e^{-2\bar{a} + \bar{x} + \bar{t}} \left\{ \frac{2\bar{a} - \bar{x} - \bar{t}}{\sqrt{(2\bar{a} - \bar{x} - \bar{t})^2 + \bar{z}_0^2}} \times \right. \\ &\times K_1 \left[ \sqrt{(2\bar{a} - \bar{x} - \bar{t})^2 + \bar{z}_0^2} \right] + \\ &\left. + K_0 \left[ \sqrt{(2\bar{a} - \bar{x} - \bar{t})^2 + \bar{z}_0^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Компоненты градиента безразмерной температуры в этом случае определяются как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_0} &= -e^{-\bar{x}_0} \left[ \frac{\bar{x}_0}{\bar{r}_0} K_1(\bar{r}_0) + K_0(\bar{r}_0) \right] + \\ &+ e^{-2\bar{a} + \bar{x}_0} \left[ \frac{2\bar{a} - \bar{x}_0}{\bar{r}_0} K_1(\bar{r}_0) + K_0(\bar{r}_0) \right], \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}_0} &= -e^{-\bar{x}_0} \left[ \frac{\bar{z}_0}{\bar{r}_0} K_1(\bar{r}_0) \right] + e^{-2\bar{a} + \bar{x}_0} \left[ \frac{\bar{z}_0}{\bar{r}_0} K_1(\bar{r}_0) \right], \\ \bar{r}_0 &= \sqrt{(2\bar{a} - \bar{x}_0)^2 + \bar{z}_0^2}. \end{aligned}$$

Удалению источника от свободного края пластины соответствует равномерное удаление двух источников от линии симметрии:

$$\bar{T} = e^{-\bar{x}_0} K_0(\bar{r}_0) + e^{-2\bar{a} + \bar{x}_0} K_0(\bar{r}_0).$$

При вычислении поля температуры в области  $\Omega$  сложной геометрии, соответствующей реальному изделию, аналитическое решение [111] применяется в рамках суперпозиции решений для системы конечного числа точечных источников в случае отсутствия влияния границ области  $\partial\Omega$  с корректирующим численным решением, обеспечивающим учет краевых условий на  $\partial\Omega$  при произвольной, в том числе переменной скорости и сложной траектории пробега лазерного луча [220].

Дальнейшее уточнение решения [111] первоначально строилось на учете различных форм источника тепла [216, 221–224]. В работе [112] введено распределение тепла  $\bar{Q}(x_1, x_2, x_3)$  в области действия источника, движущегося с постоянной скоростью  $v$ , для приближенной оценки формы ванны расплава. Свойства материала предполагаются не зависящими от температуры, что в случае сварки мало влияет на решение [225], потери тепла за счет излучения – пренебрежимо малы [216], как и влияние конвекции [217]. Решение безразмерного уравнения

$$\Delta \bar{T} - \frac{v^2}{4\kappa^2} \bar{T} = -\exp\left(\frac{vw}{2\kappa}\right) \frac{\bar{Q}}{\kappa},$$

$$\bar{T} = (T - T_0) \exp\left(\frac{vw}{2\kappa}\right)$$

получено в квазистационарной постановке задачи для полубесконечной пластины и интенсивности источника (7) и имеет следующий общий вид, аналогичный решению [221] для фиксированного источника при  $t = t - t'$ :

$$T = T_0 + \frac{q}{\pi r c \sqrt{4\pi\kappa}} \int_0^t \exp\left[-\frac{(x_1 - vt')^2 + x_2^2}{4\kappa(t-t') + \frac{1}{4}r_1^2} - \frac{x_3^2}{4\kappa(t-t')}\right] \frac{1}{2\kappa(t-t') + \frac{1}{4}r_1^2} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \quad (24)$$

в безразмерных переменных, аналогичных [34]:

$$\bar{T} = \frac{n}{\sqrt{2\hat{t}}} \int_0^{\frac{v\hat{t}}{2\kappa}} \exp\left[-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\hat{t} + \hat{t}}{2\hat{t} + 2\hat{u}^2} - \frac{x_3^2}{2\hat{t}}\right] \times \frac{d\hat{t}}{\sqrt{\hat{t}(\hat{t} + \hat{u}^2)}},$$

$$\xi_1 = \frac{vw}{2\kappa}, \quad \xi_\alpha = \frac{vx_\alpha}{2\kappa}, \quad \alpha = 1, 2; \quad \hat{t} = \frac{v^2 t}{2\kappa}, \quad \hat{u} = \frac{vr_1}{8\kappa}.$$

Решение (24) обеспечивает хорошую корреляцию с экспериментальными данными, несмотря на достаточно сильные упрощения постановки задачи.

Для более общего случая распределения интенсивности облучения в работе [112] получена

функция Грина [226], соответствующая правой части  $4\pi\delta(r - r')$  и краевым условиям

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0, \quad \bar{T} = 0 \quad (r \rightarrow \infty),$$

которая в декартовой системе координат имеет следующий вид [59]:

$$G(w, w', x_2, x_2') = 2\bar{r}^{-1} \exp\left(-\frac{v}{2\kappa}\bar{r}\right),$$

$$\bar{r} = \sqrt{(w - w')^2 + (x_2 - x_2')^2 + x_3^2}.$$

Решение при произвольном поверхностном распределении потока тепла запишется как

$$T = T_0 + \int_S G(w, w', x_2, x_2') \times \exp\left[-\frac{v}{2\kappa(w - w')}\right] \frac{\bar{Q}(w', x_2')}{\kappa} dS \quad (25)$$

и может быть построено численным интегрированием.

Решения класса [108–112] не учитывают структуру потока в ванне расплава и латентного тепла фазового перехода, что приводит к погрешностям при оценке формы и размеров ванны [59, 65–67, 227–231]. Возможность аналитического описания указанных эффектов при действии на пластину толщиной  $d$  источника тепла показана в работе [162].

В основу решения положена функция влияния  $G(x_i, \xi_j)$ , задаваемая соотношением (17) и являющаяся решением задачи для точечного источника, движущегося с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $Ox_1$ , где  $\xi_i, i, j = 1, 2, 3$  – координаты источника. При известном распределении плотности потока  $Q(\xi_j)$  решение определяется интегральным соотношением, аналогичным (25):

$$T = T_0 + \int_\Omega G(x_i, \xi_j) Q(\xi_j) d\Omega.$$

Аппроксимация частичной суммой ряда Маклорена в окрестности точки расположения источника вплоть до второй степени приводит к следующей форме записи функции  $G(x_i, \xi_j)$ :

$$G(x_i, \xi_j) = G|_{\xi_i=0} + \sum_{i=1}^3 \xi_i \left. \frac{\partial G}{\partial \xi_i} \right|_{\xi_i=0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \xi_i \xi_j \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|_{\xi_i=0, \xi_j=0} + \dots \quad (26)$$

и, следовательно, к представлению решения для температуры в виде

$$T = T_0 + \dot{Q}G|_{\xi_i=0} + \sum_{i=1}^3 \dot{Q}_i \frac{\partial G}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i=0} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \dot{Q}_{ij} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\xi_i=0, \xi_j=0} \quad (27)$$

Мультиполи, соответствующие разложению (27), имеют вид

$$\dot{Q} = \int_{\Omega} Q(\xi_j) d\Omega, \quad \dot{Q}_i = \int_{\Omega} Q(\xi_j) \xi_i d\Omega, \quad \dot{Q}_{ij} = \int_{\Omega} Q(\xi_k) \xi_i \xi_j d\Omega.$$

Слагаемое  $QG(0)$  – монополь и соответствует одиночному движущемуся точечному источнику тепла. В случае пластины  $\xi_3 \in [-d/2, d/2]$ . Ограничение разложения (27) множеством монополей, лежащих на оси  $Oz$ , приводит к решению [111] для точечного источника мощностью  $2q$ :

$$T = T_0 + 2q \left\{ G(n=0) + \sum_{n=1}^{\infty} [G(r_n) + G(r'_n)] \right\},$$

$$r_n = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 2nd)^2},$$

$$r'_n = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 2nd)^2}.$$

Латентное тепло фазового перехода описывается интегральным соотношением [162]

$$\Delta T = \oint_A \rho \Delta \bar{H} G(x_i, \xi_j) d\xi_2 d\xi_3,$$

где  $\Delta \bar{H}$  – массовая плотность латентного тепла фазового перехода. Поглощение латентного тепла на фронте плавления и выделение на фронте кристаллизации при движении источника тепла описывается множеством диполей мощности  $2q$  с плечом  $\Delta \xi_1/2$  на оси  $\xi_2 = 0, \xi_3 = 0$ :

$$\Delta T_1 \approx 2q \left[ G\left(\frac{\Delta \xi_1}{2}\right) - G\left(-\frac{\Delta \xi_1}{2}\right) \right] \approx 2q \xi_1 \left[ G\left(\frac{\Delta \xi_1}{2}\right) - G\left(-\frac{\Delta \xi_1}{2}\right) \right] \approx \dot{Q}_1 \frac{\partial G}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=0}, \quad (28)$$

$$\dot{Q}_1 = \lim_{\Delta \xi_1 \rightarrow 0} 2q \Delta \xi_1, \quad \frac{\partial G}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=0} = G(0) \left[ \left(1 + \frac{x_1}{r}\right) \frac{v}{2\kappa} + \frac{x_1}{r^2} \right]. \quad (29)$$

Применение мультипольного разложения (26) позволяет также приближенно описать эффект Марангони в ванне расплава. Известно, что циркуляция расплава направлена от центра ванны к ее краям вблизи поверхности расплава в силу большей температуры в центральных областях [229]; лоренцевы силы создают циркуляцию в обратном направлении. С учетом симметрии циркуляция моделируется квадрупольями; в плоскости  $O\xi_1\xi_2$

куляция моделируется квадрупольями; в плоскости  $O\xi_1\xi_2$

$$\Delta T_2 \approx 2q [G(\xi_1 + \Delta \xi_1) - 2G(\xi_1) + G(\xi_1 - \Delta \xi_1)] \approx 2q (\Delta \xi_1)^2 \left[ \frac{1}{\Delta \xi_1} \left( \frac{G(\xi_1 + \Delta \xi_1) - G(\xi_1)}{\Delta \xi_1} \right) \times \frac{G(\xi_1) - G(\xi_1 - \Delta \xi_1)}{\Delta \xi_1} \right] \approx \dot{Q}_{11} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi_1=0}.$$

Полное выражение для приращения температуры, порождаемого циркуляцией в ванне расплава, имеет следующий вид:

$$\Delta T_2 = \dot{Q}_{11} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi_1=0} + \dot{Q}_{22} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi_2=0} + \dot{Q}_{33} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_3^2} \Big|_{\xi_3=0},$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi_1=0} = G(0) \left[ \left(1 + 2\frac{x_1}{r} + \frac{x_1^2}{r^2}\right) \frac{v^2}{4\kappa^2} + \left(-1 + 2\frac{x_1}{r} + 3\frac{x_1^2}{r^2}\right) \frac{1}{r^2} \frac{v}{2\kappa} + \left(-1 + 3\frac{x_1^2}{r^2}\right) \frac{1}{r^2} \right], \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi_\alpha^2} \Big|_{\xi_\alpha=0} = G(0) \left[ \frac{x_\alpha^2}{r^2} \frac{v^2}{4\kappa^2} + \left(-1 + 3\frac{x_\alpha^2}{r^2}\right) \frac{1}{r^2} \frac{v}{2\kappa} + \left(-1 + 3\frac{x_\alpha^2}{r^2} \frac{1}{r^2}\right) \right], \quad \alpha = 2, 3. \quad (31)$$

Таким образом, поле температуры, порождаемое движущимся точечным источником и учитывающее эффекты выделения и поглощения латентного тепла плавления и эффект Бенара–Марангони, с учетом (28)–(31) определяется соотношением

$$T = T_0 + q \left\{ F(n=0) + \sum_{n=1}^{\infty} [F(r_n) + F(r'_n)] \right\},$$

$$F(r) = \frac{\exp\left[-\frac{v(2+x_1)}{2\kappa}\right]}{2\pi r \kappa} \left\{ 1 + \frac{\dot{Q}}{q} \frac{\partial G}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=0} + \frac{\dot{Q}_{11}}{q} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi_1=0} + \frac{\dot{Q}_{22}}{q} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi_2=0} + \frac{\dot{Q}_{33}}{q} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_3^2} \Big|_{\xi_3=0} \right\}.$$

Другой подход к решению двумерной задачи теплопереноса, учитывающему эффекты выделения и поглощения латентного тепла и существование двухфазной области вблизи границы ванны расплава, предложен в работе [206] (см. также [232]) на базе метода функций Грина. Предполагается, что латентное тепло фазового превращения второго рода пренебрежимо по сравнению с латентным теплом фазового перехода первого рода. Рассмотрена однородная изотропная бесконечная пластина толщиной  $d$ , подверженная действию источника тепла, движущегося с постоянной скоростью. Свойства материала полагаются

не зависящими от температуры, поле температуры квазистационарно, конвекция в ванне расплава отсутствует, температура внешней среды постоянна и равна  $T_0$ . Задача в области  $\Omega = \Omega_q + \Omega_m$  описывается уравнением

$$\kappa \Delta T + \nu \rho \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{2\alpha}{d} + \frac{q_2}{d} = 0. \quad (32)$$

Здесь  $H(T) = c(T - T_0) + \Delta H(T)$  – энтальпия,  $\Delta H(T) = f_L \Delta H$  – латентное тепло в двухфазном состоянии, где доля жидкой фазы равна  $f_L \in [0, 1]$ ,  $\Delta H$  – полное латентное тепло плавления/кристаллизации,  $\alpha$  – коэффициент теплопередачи в окружающую газовую среду. Уравнение (32) преобразуется к виду

$$\kappa \Delta T + \nu \rho c \frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{2\alpha}{d} (T - T_0) + \frac{q_2}{d} = -\nu \rho \frac{\partial \Delta H(T)}{\partial x_1}, \quad (33)$$

где правая часть описывает влияние фазового превращения. Решение задачи (33) строится методом последовательных приближений. Температура на  $i$ -й итерации может быть записана в виде свертки

$$T^{(i)}(x_1, x_2) = T_0 + \int_{\Omega_q} q_2(\xi_1, \xi_2) G_1(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) d\Omega_q + \nu \rho d \int_{\Omega_m} \frac{\partial \Delta H^{(i)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} G_1(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) d\Omega_m, \quad (34)$$

где  $\Omega_q$  – область нагрева внешним источником,  $\Omega_m$  – область двухфазного состояния ( $f_L \in (0, 1)$ ). Функция Грина  $G_1(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$  имеет смысл распределения температуры при действии единичного источника в точке с координатами  $\xi_1, \xi_2$  и определяется следующим образом:

$$G(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\kappa d} \exp\left[-\nu \frac{x_1 - \xi_1}{2\kappa}\right] \times K_0 \left[ \sqrt{1 + \frac{8\kappa\alpha}{\rho c d \nu^2} \frac{\nu \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}}{2\kappa}} \right].$$

Решение (34) описывает эффект уменьшения ширины ванны расплава от выделения и поглощения латентного тепла фазового перехода, а также влияние зависимости доли жидкой фазы от температуры на ширину двухфазной области в окрестности границы ванны расплава. Кроме того, в работе [206] показано, что линейризация зависимости  $\Delta H(T)$  может привести к существенной погрешности в оценке размеров ванны расплава и двухфазной области.

Построение аналитических решений задач теплопроводности в замкнутом виде для двухфазных сред сопряжено со значительными трудностями. В работе [170] теплопроводность в окрестности ванны расплава, образующейся в порошке

при нагреве лучом лазера, описывается уравнением на основе модели двухфазной зоны [233, 234]

$$\Psi(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_0 \frac{1 - \varepsilon_\sigma}{1 - \varepsilon_\nu} \Delta T + F, \quad (35)$$

$$\Psi(T) = 1 - \theta \frac{\partial f_L}{\partial T}.$$

Здесь  $\Psi(T)$  – эффективная теплоемкость,  $\theta$  – адиабатическая температура,  $\kappa_0$  – коэффициент теплопроводности сплошной среды,  $\varepsilon_\sigma$  – объемная доля пор,  $\varepsilon_\nu$  – доля пор в плоском сечении порошкового слоя [235]. Модель дополняется уравнениями линий ликвидус  $T = \varphi(C)$ ; в случае линейной фазовой диаграммы  $T_L = T_A + mC$ , где  $T_A$  – температура кристаллизации основного компонента – значение тангенса угла наклона линии ликвидус [236].

Уравнение баланса массы в приближении малой зональной ликвации имеет вид

$$\frac{\partial(f_L C)}{\partial t} = k_\nu(C) C \frac{\partial f_L}{\partial t}.$$

Здесь  $C$  – концентрация компонента, являющегося примесью. Коэффициент распределения

$$k_\nu(C) = \frac{C_S}{C_L}$$

определяется по кинетической фазовой диаграмме при учете зависимости от степени отклонения термодинамического равновесия, наблюдаемой при больших скоростях движения фронта кристаллизации [237] и имеющей смысл отношения концентраций твердой фазы  $C_S$  и жидкой фазы  $C_L$  на границе раздела. Эффективная теплоемкость двухфазной среды определяется соотношением

$$\Psi(T) = 1 - \frac{\theta}{1 - k_\nu(C) C \varphi'(C)} \exp\left[-\int_{C_0}^C \frac{dC}{(1 - k_\nu) C}\right]. \quad (36)$$

Решение уравнения (35), вообще говоря, требует численной процедуры. Результаты, полученные в работе [221] на базе уравнения (35) и (36), коррелируют с аналитическими решениями [221].

Высокая скорость изменения интенсивности источника тепла, особенно при импульсном лазерном нагреве, может привести к росту погрешности моделей теплопроводности, базирующихся на классическом законе Фурье, и потребовать введения времени релаксации  $\tau_*$  [238–241]:

$$q_i + \tau_* \frac{\partial q_i}{\partial t} = -\kappa \nabla_i T,$$

связанному со скоростью распространения тепла  $v_i$ , соотношением  $\tau_* = \kappa / v_i^2$  [242]. Учет релаксации приводит к гиперболическому уравнению теплопроводности

$$\tau_* \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \nabla_i (\kappa g^{ij} \nabla_j T).$$

Явное введение времени запаздывания как интервала установления термодинамического равновесия в закон Фурье [282]

$$q_i(x_j, t + \tau_*) = -\kappa \nabla_i T(x_j, t),$$

приводит к параболическому уравнению теплопроводности в виде [31]

$$c\rho \frac{\partial}{\partial t} T(x_j, t) = \nabla_i [\kappa g^{ij} \nabla_j T(x_j, t + \tau_*)]. \quad (37)$$

Эффект конечности скорости распространения тепла также является следствием зависимости коэффициента теплопроводности среды от температуры в рамках закона Фурье [243]:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla_i [\kappa^{ij}(T) \nabla_j T]. \quad (38)$$

В работе [32] получено аналитическое решение уравнения (38) при тензорном коэффициенте теплопроводности  $\kappa^{ij}$ , зависимость главных компонентов которого от температуры описывается степенным законом  $\kappa_i = \kappa_i^0 T^\sigma$ , где  $\sigma \in (0, \infty)$ , для точечного краевого источника  $Q = Q_0 \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)$ . Решение основано на введении автомодельных переменных  $\vartheta(x_i, t) = t^\lambda \theta(q_i)$ ,  $q_i = x_i/t^\mu$ . Для случая пространственной задачи теплопроводности решение имеет вид

$$T(x_i, t) = t^{-\frac{3}{3\sigma+2}} \sqrt{\frac{\sigma}{2a(3\sigma+2)}} \times \\ \times \sqrt[3]{r_0^2 - \frac{1}{2} t^{-\frac{2}{3\sigma+2}} \sum_{i=1}^3 (\alpha_i^j x_j)^2 \frac{L}{\kappa_i^0}}, \quad i = 1, 2, 3, \\ r_0^2 = \left[ \frac{Q_0}{4\pi c\rho} \frac{\sqrt{L^3}}{\sqrt{\pi \kappa_1^0 \kappa_2^0 \kappa_3^0}} \sqrt{\frac{2a(3\sigma+2)}{\sigma}} \times \right. \\ \left. \times \frac{(3\sigma+2)(\sigma+2)\Gamma(\sigma+2/2\sigma)}{\sigma \Gamma(\sigma^{-1})} \right], \\ a = \frac{L}{c\rho}, \quad L = \text{const},$$

где  $\alpha_{ij}$  задают линейное преобразование поворота к главным осям тензора  $\kappa_{ij}$ . В случае плоской задачи теплопроводности решение запишется как

$$T(x_\alpha, t) = t^{-\frac{1}{\sigma+1}} \sqrt{\frac{\sigma}{2a(2\sigma+2)}} \times \\ \times \left\{ r_0^2 - t^{-\frac{1}{\sigma+1}} \left[ (x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi) 2L (\kappa_1^0)^{-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + (-x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi) 2L (\kappa_2^0)^{-1} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$r_0^2 = \left[ \frac{Q_0}{c\rho \pi \sqrt{\kappa_1^0 \kappa_2^0}} \frac{\sigma+1}{\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \left( \frac{4a(\sigma+1)}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma+1}},$$

где  $\varphi$  – угол ориентации главных осей тензора  $\kappa_{ij}$ .

В работе [33] модель [32] дополнена учетом равномерного поглощения тепла:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla_\alpha [\kappa^{\alpha\beta}(T) \nabla_\beta T] - \gamma_A T, \quad \alpha\beta = 1, 2, \quad (39)$$

$\gamma_A$  – коэффициент поглощения.

Аналитическое решение уравнения (39) для плоскости построено на базе замены

$$T(x_\alpha, t) = \exp\left(-\frac{\gamma_A t}{c\rho}\right) \vartheta(x_\alpha, t),$$

$$\tilde{t} = \frac{c\rho}{\gamma_A \sigma} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma_A \sigma t}{c\rho}\right) \right]$$

и введении автомодельных переменных

$$\vartheta(x_\alpha, t) = \tilde{t}^\lambda \theta(q_\alpha), \quad q_\alpha = x_\alpha / \tilde{t}^\mu:$$

$$T(x_\alpha, t) = \frac{\exp\left(-\frac{\gamma_A t}{c\rho}\right)}{\left[ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma_A \sigma t}{c\rho}\right) \right]^{\frac{1}{\sigma+1}}} \sqrt{\frac{\sigma}{4a(\sigma+1)}} \times \\ \times \left\{ r_0^2 - \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma_A \sigma t}{c\rho}\right) \right]^{\frac{1}{\sigma+1}} \times \right. \\ \times \left[ (x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi) 2L (\kappa_1^0)^{-1} + \right. \\ \left. \left. + (-x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi) 2L (\kappa_2^0)^{-1} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}}, \\ r_0^2 = \left[ \frac{Q_0 a}{\pi \sqrt{\kappa_1^0 \kappa_2^0}} \frac{\sigma+1}{\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \left[ \frac{4a(\sigma+1)}{\sigma} \right]^{\frac{1}{\sigma+1}}.$$

В работе [38] построено аналитическое решение начально-краевой задачи для уравнения (37) при однородном краевом условии  $T(x_\alpha, 0) = 0$  с постоянными коэффициентами  $\kappa^{ij}$  в анизотропной полосе ( $x_1 \in (-\infty, \infty), x_2 \in [0, b]$ ) со следующими краевыми условиями:

$$\left( \kappa_{21} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \kappa_{22} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)_{x_2=0,b} = q_{0,b} \delta(x_1 - \xi_{0,b}), \\ \left( \kappa_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \kappa_{12} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)_{x_1 \rightarrow \pm\infty} = 0.$$

Решение для импульсного точечного краевого источника при произвольном симметричном тензоре теплопроводности  $\kappa^{\alpha\beta}$ , построенное ме-

тодом интегральных преобразований Фурье—Лапласа, представляет собой граничную переходную функцию:

$$\begin{aligned}
 T(x_\alpha, \xi_0, \xi_b, t) \equiv G(x_\alpha, \xi_0, \xi_b, t) &= \frac{q_0(\xi_0)}{2\sqrt{\pi\gamma b\kappa_{22}}} \times \\
 &\times \int_0^t \Theta(t') \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(k\pi \frac{b-x_2}{b}\right) \times \right. \\
 &\times \exp\left[-\frac{\pi^2 k^2}{\gamma b^2}(t-t')\right] \frac{1}{\sqrt{(t-t')\beta/\gamma}} \times \\
 &\times \exp\left[-\frac{(\xi_1 + (\alpha x_2 - x_1))^2}{4\beta(t-t')}\right] \left. \right\} dt' + \frac{q_b(\xi_b)}{2\sqrt{\pi\gamma b\kappa_{22}}} \times \\
 &\times \int_0^t \Theta(t') \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\frac{k\pi x_2}{b} \times \right. \\
 &\times \exp\left[-\frac{\pi^2 k^2}{\gamma^2 b^2}(t-t')\right] \frac{1}{\sqrt{(t-t')\beta/\gamma}} \times \\
 &\times \exp\left[-\frac{(\xi_b - \alpha(b-x_2) - x_1)^2}{4\beta(t-t')/\gamma}\right] \left. \right\} dt', \\
 \alpha &= \frac{\kappa_{12}}{\kappa_{22}}, \quad \beta = \frac{\det(\kappa_{\alpha\beta})}{\kappa_{22}^2}, \quad \gamma = \frac{\rho c}{\kappa_{22}}.
 \end{aligned}$$

Аналитические решения, полученные для полограниченной области [34, 38] для произвольного тензора теплопроводности среды [38], принимая во внимание зависимость теплопроводности от температуры [32] и учитывая поглощение тепла [245], могут быть использованы для качественного анализа различных процессов, сопровождающихся интенсивным локализованным тепловым воздействием на твердое тело, в том числе и для моделирования селективного лазерного сплавления при постановке задачи теплопроводности на переходном уровне.

## 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ГЛОБАЛЬНОМ УРОВНЕ

Следует отметить, что указанные методы решения задачи об остаточном напряженно-деформированном состоянии, как правило, не выходят за рамки классических представлений теории термовязкоупругости. Такой подход позволяет получить ряд решений частных задач (см., например, [246]), однако не описывает в общем случае причины развития остаточных деформаций и напряжений в телах, полученных дискретным (т.е. при конечных, по крайней мере по сравнению с размерами детали, размерах наносимого слоя, нити или капли) и континуальным наращиванием (т.е. в классе задач со стремящейся к нулю, по сравнению с характерным размером тела, размерностью наносимого элемента). Качественно иная модель наращиваемых тел предложена в работе

[247] и впоследствии развита в цикле работ [90–92, 248–255] для малых и конечных деформаций тела. Основным положением данной теории является представление о растущем теле как об объекте, не имеющем в общем случае никакой совместной (т.е. без образования разрывов полей кинематических переменных) формы, свободной от напряжений. С математической точки зрения постулируется отсутствие натуральной конфигурации тела в евклидовом пространстве [91, 254]. Данный подход, как было показано в ряде прикладных работ [93, 256–261], позволяет получить поле остаточных напряжений в конструкции, получаемой методом стереолитографии при действии в процессе формирования внешних полей сил и тепловых полей. Частные решения различных задач на базе указанной концепции найдены в [248, 262–268].

### 6.1. Модель наращиваемых термоупругих и термовязкоупругих тел при конечных деформациях

В соответствии с общим подходом [91] материальное тело рассматривается как некоторое подмножество  $V$ , образ которого в физическом пространстве есть ограниченная область, а отображения в евклидово пространство  $E$  являются конфигурациями тела  $\Psi$  [91]

$$\Psi : V \rightarrow E.$$

Так как растущее тело образуется притоком массы и имеет переменный состав, то и множество  $V$  имеет переменный состав:

$$V^e = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha, \quad V_e = \bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha.$$

Здесь в соответствии с определениями, данными в работе [91],  $V^e$  – тотальное тело (т.е. полученное в результате завершения технологического процесса наращивания),  $V_e$  – начальное тело (минимальное состояние, практически соответствующее нанесению первого технологического слоя), при этом промежуточные состояния подчиняются следующему условию (согласно [91], “обобщенный дискретный рост”):

$$V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots \subset V_\omega \subset V_{\omega+1} \subset \dots$$

Так как растущее тело и с геометрической точки зрения, и с точки зрения технологической является расслоением тотального тела  $V^e$ , то

$$V^e = \bigcup_{\gamma} \in \mathcal{M}_\gamma, \quad \mathcal{M}_\gamma \cup \mathcal{M}_\delta = \emptyset \quad (\gamma \neq \delta),$$

где  $\mathcal{M}_\gamma$  – непересекающиеся слои, объединение которых формирует тело. При создании тонкостенного элемента в качестве слоя может рассматриваться нить соответствующей формы и т.д.

Если существует временной параметр процесса  $\tau$  (практически подобный параметр всегда существует при задании каждого реального технологического процесса), то  $\gamma = \gamma(\tau)$  и может быть определен момент присоединения слоя с номером  $\gamma$  [91], а также время существования каждого присоединенного слоя (в отвержденном состоянии).

Уравнения статического равновесия тела записываются в его актуальной (текущей) конфигурации  $(\Psi^\alpha)(B)$  с границей  $\Omega^\alpha = \partial[(\Psi^\alpha)(B)]$ , соответствующей моменту  $\tau$  наращивания (присоединение  $\gamma(\tau)$  слоев):

$$\nabla^\alpha \cdot T^\alpha + b^\alpha = 0,$$

где  $\nabla^\alpha$  – оператор “набла” в актуальной конфигурации,  $T^\alpha$  – тензор истинных напряжений Коши,  $b^\alpha$  – поле главного вектора объемных сил (также в актуальной конфигурации). Уравнениям равновесия соответствуют краевые условия, определенные на границе  $\Omega^\alpha$  актуальной конфигурации:

$$T^\alpha \cdot n^\alpha|_{\Omega^\alpha} - p^\alpha = 0,$$

где  $n^\alpha$  – вектор единичной нормали к поверхности тела,  $p^\alpha$  – поле главного вектора поверхностных сил. Оба вектора определены в актуальной конфигурации растущего тела.

Тензор истинных напряжений Коши связан с мерой локальной деформации  $F^\alpha$  [91] определяющим соотношением общего вида

$$T^\alpha = N_K(F^\alpha),$$

а локальная деформация вычисляется как

$$F^\alpha = \nabla^\alpha(\kappa^\alpha).$$

Задача замыкается определением притока материи; например, условие притока предварительно напряженных материальных поверхностей имеет следующий вид [91]:

$$P^\alpha T^\alpha P^\alpha|_{\Omega^\alpha} = T^\alpha, \quad P^\alpha = I - n^\alpha \otimes n^\alpha. \quad (40)$$

Здесь  $P^\alpha$  осуществляет проектирование на касательную плоскость к границе тела  $\Omega^\alpha$  в актуальном состоянии (т.е. в момент присоединения слоя),  $T^\alpha$  – тензор тангенциальных усилий в присоединяемом слое (аналогичный в известном смысле тензору тангенциальных сил в теории материальных поверхностей). Вообще говоря, данная величина имеет смысл натяжения присоединяемой поверхности, каким-либо образом преобразуемого в трехмерное напряженное состояние в окрестности данной поверхности. Авторы работы

[91] отмечают, что адекватное преобразование требует дополнительной модели присоединяемого тонкого слоя.

Уравнение статики присоединяемого тонкого слоя имеет вид

$$\nabla_S^\alpha T_S^\alpha + b_S^\alpha = T^\alpha n^\alpha|_{\Omega^\alpha}.$$

Величины с индексом  $S$  обозначают, соответственно, поверхностный оператор “набла” и главный вектор внешних сил на поверхности слоя  $S$ .

Уравнения состояния присоединяемого слоя имеют следующий вид:

$$T_S^\alpha = T_S^\alpha(F_S), \quad F_S = \nabla_\alpha z, \quad z : \Omega_0 \rightarrow \Omega,$$

где  $F_S$  – градиент деформации поверхности присоединяемого слоя,  $\Omega_0$  – ее отсчетная конфигурация, соответствующая ненапряженному состоянию, а  $\Omega$  – актуальная конфигурация, соответствующая конфигурации  $\kappa$  растущего тела  $B_\alpha$ . Предполагается, что дивергенция тензорного поля  $T_S^\alpha$  удовлетворяет соотношению [91]

$$(\nabla_S^\alpha \cdot T_S^\alpha) \cdot n = T_S^\alpha : L^\alpha, \quad L^\alpha = -\nabla_S^\alpha \otimes n,$$

тогда для границы  $\Omega$  на уравнение равновесия нормальных сил записывается следующим образом:

$$T_S^\alpha : L^\alpha + b_S^\alpha n^\alpha = n^\alpha T^\alpha n^\alpha|_{\Omega^\alpha}.$$

Данное условие определяет давление на поверхность наращиваемого тела присоединяемой поверхности, если трение (и, соответственно, касательные нагрузки) отсутствует. Постановка задачи замыкается краевыми условиями для присоединяемой поверхности:

$$T_S^\alpha v^\alpha|_{\partial_\sigma \Omega^\alpha} = f^\alpha, \quad u|_{\partial_u \Omega^\alpha} = u^*, \\ \partial_\sigma \Omega^\alpha \cup \partial_u \Omega^\alpha = \partial \Omega^\alpha.$$

Здесь  $v^\alpha$  – вектор единичной нормали к граничной кривой,  $f^\alpha$  – поле вектора контурных сил на кривой  $\partial \Omega^\alpha$ ,  $u$  – вектор перемещения. Известными задачи являются поля  $T$ ,  $T$ ,  $F$ ,  $F_S$ , конфигурации  $\kappa$ ,  $z$ ,  $a$  и поле неинтегрируемой дистрикции  $K$ , определяемое уравнением (40).

*6.2. Концепция моделирования аддитивного производства изделий. Общая формулировка задачи*

Таким образом, могут быть выделены две основные концепции математического моделирования наращиваемых тел:

1) концепция геометрической механики растущих тел [91, 254] на основе теории расслоений дифференцируемых многообразий [269];

2) концепция, основанная на определении локальных свойств наносимого на подложку слоя, отверждаемого из расплава, полимеризуемого либо спекаемого из порошка материала на основе решения соответствующей связной начально-краевой задачи термомеханики и теплофизики.

Очевидно, второй подход является более аккуратным с точки зрения описания свойств материала, получаемого в процессе аддитивного производства изделия тем или иным способом с учетом взаимодействия с подложкой и окружающей газовой средой, исследования внутренней структуры отвержденного материала (главным образом, пористости), в том числе и для вычисления эффективных физических постоянных некоторого квазиоднородного материала, но в общем случае непригоден для определения остаточного напряженно-деформированного состояния изделия. Первый подход, как показывают цитируемые работы, в принципе способен правильно описывать остаточное напряженно-деформированное состояние материала. Однако возможность полноценного учета свойств существенно неоднородного материала, образующегося в приповерхностном слое в результате его нанесения одним из перечисленных способов при влиянии на конечные свойства материала особенностей взаимодействия с подложкой и окружающей газообразной средой, на сегодняшнем уровне развития ограничена.

Описанная выше ситуация, в принципе, преодолевается при полноценном моделировании роста с одновременным учетом всех особенностей процесса образования нового слоя на поверхности роста и внутренней геометрии изделия, полученного методом континуального наращивания. Основной трудностью здесь представляется существенное различие характерных размеров выращиваемого тела и каждого вновь наносимого слоя, особенно в ситуации, близкой к предельному случаю континуального наращивания: требуется построить решение как во всей области, занимаемой телом, так и в тонком приповерхностном слое с соответствующим конечно-элементным разбиением и вычислительными затруднениями, порождаемыми существованием решения типа пограничного слоя.

Макроскопические тепловые процессы в изделиях, получаемых технологиями SLM/SLS, в значительной степени аналогичны тепловым процессам, протекающим при многопроходной сварке металлов. Средняя температура спекаемого изделия определяется уровнем подогрева рабочей платформы и температурой окружающей среды (инертного газа, подаваемого в рабочую камеру), а локальное повышение температуры в зоне подвода тепла определяется параметрами источника (мощностью, скоростью движения и т.д.) и свой-

ствами материала. При этом в локальной области вблизи зоны расплавления реализуются чрезвычайно высокие градиенты температуры и скорости охлаждения/нагрева. Качественное отличие моделирования аддитивных процессов от моделирования сварки заключается в необходимости учета постоянного добавления объема материала, который при сварке пренебрежимо мал.

Основные задачи макроскопического теплового моделирования аддитивных процессов связаны с дальнейшей оценкой и оптимизацией связанного с ним остаточного напряженно-деформированного состояния получаемых изделий [140, 204, 270]. Также объектом интереса могут являться параметры локального нагрева изделия, которые могут влиять на образование пористости или приводить к переправлениям и изменениям точности построения малых геометрических объектов, входящих в модель изделия. Здесь анализ причин возникновения дефектов требует решения обратных задач теплопереноса – как граничных [245], позволяющих восстановить информацию о действии источника тепла, так и коэффициентов, решение которых позволяет по известному полю температуры вычислить зависящие от температуры коэффициенты теплопроводности [271–273]. Параметрами моделей, которые учитываются в макрорасчетах, являются как характеристики источника, свойства материалов и толщина наносимого слоя, принимаемые во внимание на микро/мезо-уровнях, так и новые параметры: траектория движения источника, расположение и ориентация изделия в камере, время нанесения нового слоя порошка, характеристики и расположение технологических поддержек и т.д. Основным критерием, определяющим эффективность численных расчетов, помимо их точности, является скорость, так как машинное время, необходимое для детальных расчетов синтеза крупных изделий, достигает нескольких дней или недель [59, 80].

Процесс моделирования аддитивных технологий на масштабном уровне, сопоставимом с размерами изделия, заключается в решении нестационарной задачи теплопроводности в рабочей камере установки, на которой проводится синтез, с учетом увеличения размеров изделия и периодического локального воздействия движущегося источника тепла в зоне верхней границы изделия, а также с учетом эффектов конвективного и лучистого теплообмена между поверхностью изделия и окружающей средой. Применяемые трехмерные геометрические модели включают в себя платформу, на которой проводится синтез, и само изделие с технологическими поддержками. Температура технологической оснастки, на которой монтируется наращиваемая деталь, и окружающей среды не могут быть приближены некоторым постоянным значением (по крайней мере

при производстве в замкнутой камере с аргоновой атмосферой [68]) в силу теплообмена детали как с газом, так и с основанием. Потери тепла на взаимодействие с оснасткой за счет теплопроводности определяются коэффициентом теплопередачи  $hc$ , задаваемым величиной, обратной коэффициенту теплового сопротивления при контактом взаимодействии твердых деформируемых тел, и зависящим от контактного давления, шероховатости поверхностей, составляющих контактную пару, и т.д. Авторы работы [68] оценивают порядок коэффициента теплопередачи как  $hc \sim 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ , т.е. тепловое сопротивление в области контакта несущественно. Порошок и внешняя среда в рабочей камере учитываются чаще всего заданием соответствующих условий теплообмена (моделированию газодинамических процессов в рабочей камере при 3D-печати посвящены отдельные работы, см., например, [274]). Нелинейность граничных условий, а также нелинейная зависимость свойств материалов от температуры, которую приходится учитывать в расчетах, так как температура процесса меняется от комнатной до  $>1500\text{--}2000^\circ\text{C}$ , приводят к усложнению процесса построения численных решений. Длительность расчетов определяется количеством слоев построения, число которых может достигать десяти тысяч и более для крупных изделий.

Основным способом ускорения макрорасчетов является упрощение применяемых геометрических и физических моделей, а также использование адаптивных сеток. Некоторые подходы, основанные на наложении остаточных деформаций в области вновь нанесенных и сплавленных слоев материала, в принципе, исключают рассмотрение процессов теплопередачи и применяются непосредственно для оценки механического состояния синтезируемых изделий и поводок в них [275–277]. Однако такие модели, широко применяющиеся для описания процессов сварки [278], могут обладать недостаточной точностью для описания аддитивных технологий, так как результаты их калибровки, реализованной на простых геометрических моделях и образцах, могут не соответствовать реальному поведению синтезируемого материала в изделиях сложной геометрии, состоящих из большого числа слоев [279].

### 6.3. Свойства материалов

Значения теплофизических характеристик материалов и их зависимость от температуры являются важнейшими исходными данными, которые содержатся в моделях макроуровня. Если не рассматривать связанные термогидродинамические процессы в зоне ванны расплава, модели макроуровня должны учитывать изменение свойств материала при изменении температуры от комнат-

ной (на свободной обдуваемой поверхности изделия) до температуры плавления в зоне действия источника тепла. К характеристикам, которые должны быть заданы в тепловых расчетах, стандартно относятся плотность, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, степень черноты поверхности спекаемого изделия. Эти характеристики должны быть заданы как функции температуры, причем они не могут быть приняты соответствующими стандартным данным, так как сплавляемые материалы обладают анизотропией и, вообще говоря, обладают собственными уникальными свойствами, отличными от свойств сплавов, получаемых традиционными технологиями, а также зависят от параметров процесса синтеза и применяемого оборудования [153, 280–282].

Спецификой моделирования аддитивных процессов является также необходимость учета свойств порошка и технологических поддержек, для чего используются либо экспериментальные данные [283, 284], либо упрощенные аналитические оценки [285, 156]. Характеристики поддержек задаются обычно в долях от соответствующих характеристик сплошного материала и пропорционально кажущейся плотности материала поддержек. Теплопроводность же порошка, как правило, бывает порядка 0.1–1% от теплопроводности сплошного материала [283], поэтому для сокращения времени расчетов иногда (но не всегда [286–288]) в моделях не прорисовываются в явном виде области, занятые порошком, который располагается вокруг детали в течение всего времени 3D-печати [289–291, 85, 292]. Вместо этого задаются граничные условия третьего рода, определяющие отвод тепла с поверхности детали в порошок с коэффициентом теплопередачи, вычисляемым по значению коэффициента теплопроводности порошка и размера области, занятой порошком, в направлении нормали к поверхности изделия. Более простым, но менее точным вариантом граничных условий является задание условия по теплоизоляции на границе контакта изделия с порошком. Это условие также практически всегда используется на внешних границах расчетной области.

Еще один подход, позволяющий упростить вычисления, заключается в использовании эффективной теплоемкости спекаемого материала, зависимость которой от температуры учитывает выделение/поглощение тепла в процессе расплавления и кристаллизации металла. Таким образом, вместо задания источников тепла, распределенных в объеме материала, используется модифицированная функция коэффициента теплоемкости для фазы порошка и консолидированного материала [293, 294]. Представляют интерес и развиваемые в смежных областях методы решения задачи теплопереноса, позволяющие описать нестационарное движение границ фазо-

вых превращений, порождаемых действием высоких температур [295].

#### 6.4. Конечно-элементные модели изделий

В конечно-элементных системах, где обычно проводятся тепловые расчеты процессов послойного лазерного синтеза изделий, добавление материала (рост изделия) моделируется тремя основными техниками, в которых используется либо активация/деактивация конечных элементов [296, 297], либо подход, основанный на переназначении свойств материалов в области нанесенных и спеченных слоев [298], либо смешанная техника послойной активации элементов, когда элементам задаются свойства, зависящие от истории их нагрева [299].

Достоинством методики активации/деактивации элементов является возможность рассмотрения моделей, содержащих меньшее число элементов, что, однако, может нивелироваться необходимостью постоянного перезапуска решателя для работы с новой конечно-элементной моделью растущего изделия, содержащей элементы нового слоя. Этот недостаток отсутствует в подходе, в котором неактивные элементы (относящиеся к еще не нанесенному материалу) постоянно присутствуют в модели, но имеют специально заниженные значения характеристик теплопроводности и теплоемкости, что приводит к их фактическому исключению из тепловых расчетов, но не требует постоянной переборки конечно-элементной модели. Возникающий при этом недостаток, очевидно, связан с необходимостью работы на каждом шаге расчета с полноразмерной моделью готового изделия, матрица которой к тому же может быть плохо обусловленной из-за присутствия узлов, в которых заданы свойства, близкие к нулевым. Некоторый компромисс обеспечивает смешанная техника, когда используется послойная активация элементов модели, в которых изначально все элементы обладают “выключенными” свойствами, близкими к нулевым, а по мере прохождения источника под его траекторией элементам присваиваются реальные характеристики спекаемого материала [300].

Общей проблемой указанных техник является необходимость учета конвективного и радиационного теплообмена на движущейся границе синтезируемого тела между активными и неактивными элементами. В численных расчетах приходится создавать специальные методики идентификации области текущего расположения границы тела и задания на ней граничных условий. Пренебрежение теплообменом с окружающей средой на свободной поверхности приводит к погрешностям расчетов и завышенным значениям температуры нагрева [300].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время конечно-элементные пакеты для реализации моделирования процессов послойного синтеза/сплавания входят в состав систем от Ansys, Simulia, MSC и некоторых других. В пакете Simufact (MSC) используется подход, основанный на непосредственном задании остаточных деформаций в добавляемых слоях модели и исключающий решение задачи теплопроводности. Этот подход основан на калибровке решателя на основе анализа поводов элементарных образцов, и его достоинством является “инженерная” простота и повышенная скорость расчетов, которые могут, однако, приводить к погрешностям при моделировании изделий сложной геометрии. Детальное моделирование теплопередачи в аддитивных процессах реализовано в системах Ansys и Simulia. Проводимые связанные термомеханические расчеты в этих пакетах позволяют оценить влияние истории нагрева изделия на уровень его остаточного напряженно-деформированного состояния. Основным результатом расчетов в указанных системах становится возможность оптимизации технологии синтеза, включающей режимы синтеза, параметры штриховки сечений детали, ориентацию изделия в камере, параметры геометрии технологических поддержек. Актуальными задачами, решению которых посвящено значительное количество исследований, является экспериментальная верификация моделей, уточнение моделей материалов, повышение скоростей расчетов за счет использования адаптивных сеток, использование многомасштабных подходов для учета особенностей процессов, протекающих на микроуровне при моделировании макроскопического поведения материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 17-01-00837-а, 19-08-00938-а, 19-01-00695-а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шишковский И.В.* Основы аддитивных технологий высокого разрешения. СПб.: Питер, 2016. 400 с.
2. *Frazier W.E.* Metal Additive Manufacturing: A Review // *J. Materials Engineering and Performance*. 2014. V. 23. № 6. P. 1917.
3. *Alcisto J. et al.* Tensile properties and microstructures of laser-formed Ti–6Al–4V // *Journal of materials engineering and performance*. 2011. V. 20. № 2. P. 203.
4. *Guessasma S. et al.* Challenges of additive manufacturing technologies from an optimisation perspective // *International J. Simulation and Multidisciplinary Design Optimization*. 2015. V. 6. P. A9.
5. *Jared B. et al.* Additive manufacturing: Toward holistic design // *Scripta Materialia*. 2017. V. 135. P. 141.

6. *Галенко П., Харанжевский Е., Данилов Д.* Структура и механические свойства конструкционной стали при лазерной высокоскоростной перекристаллизации // ФММ. 2002. Т. 94. № 2. С. 100.
7. *Харанжевский Е. и др.* Лазерное спекание ультрадисперсных порошковых материалов на основе железа // Прочность и пластичность. 2009. Т. 18. № 5. С. 534.
8. *Hwa-Hsong T., Ming-Lu C., Hiao-Chuan Y.* Slurry-based selective laser sintering of polymer-coated ceramic powders to fabricate high strength alumina parts // J. European Ceramic Soc. 2011. V. 31. № 8. P. 1383.
9. *Slarko D., Matic K.* Selective laser sintering of composite material technologies // Annals of DAAAM Proceedings. 2010. P. 1527.
10. *Dilberoglu U. et al.* The role of additive manufacturing in the era of industry 4.0 // Procedia Manufacturing. 2017. V. 11. P. 545.
11. *Wohlers T., Cornet T.* History of additive manufacturing. Wohlers Report, 2014.
12. *Wohlers T., Caffrey T.* Additive manufacturing: going mainstream // Manufacturing Engineering. 2013. V. 150. № 6. P. 67.
13. *Dickens P. et al.* Rapid prototyping using 3D welding // Proceedings of the Solid Freeform Fabrication Symp. Austin, Texas: Univ. of Texas, 1992. P. 280.
14. *Michaels S., Sachs E.M., Cima M.* Metal parts generation by three-dimensional printing // Proceedings of the Solid Freeform Fabrication Symp. Austin, Texas: Univ. Texas, 1992. P. 244.
15. *Dave V.R., Matz J.E., Eagar T.W.* Electron beam solid freeform fabrication of metal parts // Proceedings of the Solid Freeform Fabrication Symp. Austin, Texas: Univ. Texas, 1992. P. 64.
16. *Atwood C. et al.* Laser Engineered Net Shaping (LENS(TM)): A Tool for Direct Fabrication of Metal Parts // International Congress on Applications of Lasers Electro-Optics. 1998. <https://doi.org/10.2351/1.5059147>
17. *Wong K.V., Hernandez A.* A review of additive manufacturing // Int. Scholarly Research Network. 2012. V. 2012.
18. DOE U.S. Quadrennial technology review 2015 // US Department of Energy. Washington, DC. 2015.
19. *Brandt M.* Laser additive manufacturing: Materials, Design, Technologies, and Applications. Sawston: Woodhead Publ., 2017.
20. *Stavropoulos P., Foteinopoulos P.* Modelling of additive manufacturing processes: a review and classification // Manufacturing Rev. 2018. V. 5. № 2. <https://doi.org/10.1051/mfreview/2017014>
21. *Kruth J.P. et al.* Selective laser melting of iron-based powders // J. Materials Processing Technology. 2004. V. 149. P. 616.
22. *Murr L., Gaytan S., Ramirez D.A.* Metal fabrication by additive manufacturing using laser and electron beam melting technologies // J. Materials Sci. and Techn. 2012. V. 28. № 1. P. 1.
23. *Simchi A., Petzoldt F., Pohl H.* On the development of direct metal laser sintering for rapid tooling // J. Materials Processing Technology. 2003. V. 141. P. 319.
24. *Hederick E.* Additive manufacturing of metals: A review // Proc. of the MST11. Additive Manufacturing of Metals. Columbus, OH, 2011.
25. *Kelly S.M.* Microstructural evolution in laser-deposited multilayer Ti-6Al-4V builds. Part II: Thermal modeling // Metal. Trans. A. 2004. V. 35A. P. 1869.
26. *Wang F. et al.* Microstructure and mechanical properties of wire and arc additive manufactured Ti-6Al-4V // Metal. Trans. A. 2013. V. 44A. P. 968.
27. *Zheng B. et al.* Thermal behavior and microstructure evolution during laser deposition with laser-engineered met- shaping. Part I: Numerical calculations // Metal. Trans. A. 2008. V. 39A. P. 2228.
28. *Vilaro T., Colin C., Bartout J.D.* As-fabricated and heat-treated microstructures of the Ti-6Al-4V alloy processed by selective laser melting // Metal. Trans. A. 2011. V. 42A. P. 3190.
29. *Zheng B. et al.* Thermal behavior and microstructure evolution during laser deposition with laser-engineered met- shaping. Part II: Experimental investigation and discussion // Metal. Trans. A. 2008. V. 39A. P. 2237.
30. *Kobryn P., Semiatin S.* The laser additive manufacturing of Ti-6Al-4V // J. the Minerals, Metals and Materials Society (TMS). 2001. V. 53. № 9. P. 40.
31. *Формалев В.Ф.* О тепловых ударных волнах в нелинейных твердых средах // ТВТ. 2012. Т. 50. № 6. С. 799.
32. *Формалев В., Рабинский Л.* Волновой теплоперенос в анизотропном пространстве с нелинейными характеристиками // ТВТ. 2014. Т. 52. № 5. С. 704.
33. *Формалев В., Кузнецова Е., Рабинский Л.* Локализация тепловых возмущений в нелинейных анизотропных средах с поглощением // ТВТ. 2015. Т. 53. № 4. С. 579.
34. *Formalev V., Kolesnik S.* Analytical investigation of heat transfer in an anisotropic band with heat fluxes assigned at the boundaries // J. Engineering Physics and Thermophysics. 2016. V. 89. № 4. P. 975.
35. *Формалев В. и др.* Теплоперенос в теплозащитных композиционных материалах в условиях высокотемпературного нагружения // ТВТ. 2016. Т. 54. № 3. С. 415.
36. *Формалев В., Колесник С., Кузнецова Е.* Нестационарный теплоперенос в анизотропном полупространстве в условиях теплообмена с окружающей средой, имеющей заданную температуру // ТВТ. 2016. Т. 54. № 6. С. 876.
37. *Formalev V. et al.* On the features of heat transfer in anisotropic regions with discontinuous thermal-physical characteristics // International J. Pure and Applied Mathematics. 2016. V. 111. № 2. P. 303.
38. *Формалев В., Колесник С., Кузнецова Е.* Нестационарный теплоперенос в пластине с анизотропией общего вида при воздействии импульсных источников теплоты // ТВТ. 2017. Т. 55. № 5. С. 788.

39. *Formalev V., Kolesnik S., Kuznetsova E.* Analytical study on heat transfer in anisotropic space with thermal conductivity tensor components depending on temperature // *Periodico Tche Quimica*. 2018. V. 15. Spec. Iss. 1. P. 426.
40. *Формалев В., Колесник С., Кузнецова Е.* О волновом теплопереносе на временах, сравнимых с временем релаксации при интенсивном конвективно-кондуктивном нагреве // *ТВТ*. 2018. Т. 56. № 3. С. 412.
41. *Формалев В., Колесник С., Кузнецова Е.* Волновой теплоперенос в ортотропном полупространстве под действием нестационарного точечного источника тепловой энергии // *ТВТ*. 2018. Т. 56. № 5. С. 756.
42. *Formalev V., Kolesnik S.* Heat Transfer in a Half-Space with Transversal Anisotropy Under the Action of a Lumped Heat Source // *J. Eng. Phys. Thermophys*. 2019. V. 92. № 1. P. 52.
43. *Murr L. et al.* Microstructural architecture, microstructures, and mechanical properties of a Nickel-based superalloy fabricated by electron beam melting // *Metal. Trans. A*. 2011. V. 42A. P. 3491.
44. *Lambrakas S., Cooper K.* An algorithm for inverse modeling of layer-by-layer deposition processes // *J. Materials Engineering and Performance*. 2009. V. 18. № 3. P. 221.
45. *Lambrakas S.G., Cooper K.* A general algorithm for inverse modeling of layer-by-layer deposition processes // *J. of Materials Engineering and Performance*. 2010. V. 19. № 3. P. 321.
46. *Lambrakas S., Milewski J.* Analysis of processes involving heat deposition using constrained optimization // *Sci. and Techn. Welding Joining*. 2002. V. 7. № 3. P. 137.
47. *Ruttart B. et al.* Impact of hot isostatic pressing on microstructures of CMSX-4 Ni-base superalloy fabricated by selective electron beam melting // *Materials Design*. 2016. V. 110. P. 720.
48. *Mower T.M., Long M.J.* Mechanical behavior of additive manufactured, powder-bed laser-fused materials // *Materials Science and Engineering: A*. 2016. V. 651. P. 198.
49. *Tammas-Williams S. et al.* The effectiveness of hot isostatic pressing for closing porosity in titanium parts manufactured by selective electron beam melting // *Metallurgical and materials transactions A*. 2016. V. 47. № 5. P. 1939.
50. *Tammas-Williams S. et al.* Porosity regrowth during heat treatment of hot isostatically pressed additively manufacture titanium components // *Scripta Materialia*. 2016. V. 122. P. 72.
51. *Tammas-Williams S. et al.* Hot isostatic pressing of IN718 components manufactured by selective laser melting // *Additive Manufacturing*. 2017. V. 13. P. 93.
52. *Yan C. et al.* Review on thermal analysis in laser-based additive manufacturing // *Optics and Laser Technology*. 2018. V. 106. P. 427.
53. *Хайдаров Г.* О связи поверхностного натяжения жидкости с теплотой парообразования // *ЖФХ*. 1983. Т. LVII. № 10. С. 2528.
54. *Weisskopf V.* Search for simplicity // *American J. Physics*. 1985. V. 53. P. 19.
55. *Weisskopf V.* Search for simplicity: the size of molecules revisited // *American J. Physics*. 1985. V. 53. P. 618.
56. *Хайдаров Г., Хайдаров А., Машек А.* Физическая природа поверхностного натяжения // *Вестник СПбГУ*. Сер. 4. 2011. № 1. С. 3.
57. *Eotvos L.* Uber den Zusammenhang der Oberflachen-spannung der Fliissigkeiten neit ihrem Mole- cularvol- umen // *Annalen der Physik*. 1886. Bd. 27. S. 448.
58. *Хайдаров Г. и др.* Влияние температуры на поверх- ностное натяжение // *Вестник СПбГУ*. Сер. 4. 2012. № 1. С. 24.
59. *Luo Z., Zhao Y.* A survey of finite element analysis of temperature and thermal stress fields in powder bed fusion Additive Manufacturing // *Additive Manufac- turing*. 2018. V. 21. P. 318. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.03.022>
60. *Matthews M.J. et al.* Denudation of metal powder lay- ers in laser powder bed fusion processes // *Acta Mate- rialia*. 2016. V. 114. P. 33.
61. *Thijs L. et al.* A study of the micro structural evolution during selective laser melting of Ti–6Al–4V // *Acta Materialia*. 2010. V. 58. P. 3302.
62. *Su X., Yang Y.* Research on thick overlapping during selective laser melting of powders // *J. Mater. Process. Technol*. 2012. V. 212. P. 2074.
63. *Aboulkhair N. et al.* On the formation of AlSi10Mg sin- gle tracks and layers in selective laser melting: micro- structure and nano-mechanical properties // *J. Mater. Process. Technol*. 2016. V. 230. P. 88.
64. *Gusarov A. et al.* Heat transfer modeling and stability analysis of selective laser melting // *Appl. Surf. Sci*. 2007. V. 254. P.975.
65. *Fang J. et al.* The effects of solid-state phase transfor- mation upon stress evolution in laser metal powder deposition // *Materials & Design*. 2015. V. 87. P. 807. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2015.08.061>
66. *Doumanidis C., Kwak Y.M.* Geometry Modeling and Control by Infrared and Laser Sensing in Thermal Manufacturing with Material Deposition // *J. Manu- facturing Science and Engineering. Trans, of the ASME*. 2001. V. 123. № 1. P. 45.
67. *Vasquez F., Ramos-Grez J., Walczak M.* Multiphysics simulation of laser-material interaction during laser powder deposition // *Int. J. Advanced Manufacturing Technologies*. 2012. V. 59. P. 1037.
68. *Chiumenti M. et al.* Numerical modelling and experi- mental validation in Selective Laser Melting // *Addi- tive Manufacturing*. 2017. V. 18. P. 171. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2017.09.002>
69. *Islam M. et al.* Temperature profile and imaging anal- ysis of laser additive manufacturing of stainless steel // *Physics Procedia*. 2013. V. 41. P. 835. <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2013.03.156>

70. *Fu C., Guo Y.* Three-dimensional temperature gradient mechanism in selective laser melting of Ti–6Al–4V // *J. Manufacturing Science and Engineering*. 2014. V. 136. P. 061004.
71. *Babaytsev A., Prokofiev M., Rabinskiy L.* Mechanical properties and microstructure of stainless steel manufactured by selective laser sintering // *International J. Nanomechanics Science and Technology*. 2017. V. 8. № 4. P. 359.
72. *Rabinskiy L., Tushavina O.* Experimental investigation and mathematical modelling of heat protection subjected to high-temperature loading // *Periodico Tche Quimica*. 2018. V. 15. Special Issue 1. P. 321.
73. *Baurejfi A., Scharowsky T., Korner C.* Defect generation and propagation mechanism during additive manufacturing by selective beam method // *J. Materials Processing Technology*. V. 214. № 11. P. 2522.
74. *Ippolito R., Iuliano L., Gatto A.* Benchmarking of rapid prototyping techniques in terms of dimensional accuracy and surface finish // *CIRP Annals – Manufacturing Technology*. 1995. V. 44. P. 157.
75. *Yang H., Hwang P., Lee S.* A study on shrinkage compensation of the SLS process by using Taguchi method // *Int. J. Mechanical Tools Manuf.* 2002. V. 42. P. 1203.
76. *Wu A. et al.* An experimental investigation into additive manufacturing – induced residual stresses in 316L stainless steel // *Metall. Mater. Trans. A*. 2014. V. 45. P. 6260.
77. *Li Y., Gu D.* Parametric analysis of thermal behavior during selective laser melting additive manufacturing of aluminum alloy powder // *Materials and Design*. 2014. V. 63. P. 856.  
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2014.07.006>
78. *Olakanmi E.O., Cochrane R.F., Dalgarno K.W.* A review on selective laser sintering/melting (SLS/SLM) of aluminium alloy powders: Processing, microstructure, and properties // *Progress in Materials Science*. 2015. V. 74. P. 401.  
<https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2015.03.002>
79. *Lavery N. et al.* A review of Computational Modelling of Additive Layer Manufacturing – multi-scale and Multiphysics // *Sustainable Design and Manufacturing 2014 (SDM-14) Pre-Proc.* 2014. P. 651.
80. *Lui J. et al.* A review of computational modeling in powder-based additive manufacturing for metallic part qualification // *Rapid Prototyping J.* 2018. V. 24. № 8. P. 1245.
81. *Moges T., Ameta G., Witherell P.* A review of model inaccuracy and parameter uncertainty in laser powder bed fusion models and simulations // *J. Manufacturing Science and Engineering*. 2018. V. 141. № 4. P. 040801.
82. *Furumoto T. et al.* Study on deformation restraining of metal structure fabricated by selective laser melting // *J. Materials Processing Technology*. 2017. V. 245. P. 207.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec>
83. *Roberts I.* Investigation of residual stresses in the laser melting of metal powders in additive layers manufacturing. Ph.D. West Midlands: University of Wolverhampton, 2012.
84. *Denlinger E.R., Heigel J.C., Michaleris P.* Residual stress and distortion modeling of electron beam direct manufacturing Ti–6Al–4V // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part B: Journal of Engineering Manufacture*. 2015. V. 229. № 10. P. 1803.
85. *Denlinger E.R., Irwin J., Michaleris P.* Thermomechanical Modeling of Additive Manufacturing Large Parts // *J. Manufacturing Science and Engineering*. 2014. V. 136. № 6. P. 061007.
86. *Lindgren L.E. et al.* Simulation of additive manufacturing using coupled constitutive and microstructure models // *Additive Manufacturing*. 2016. V. 12. Pt. B. P. 144.
87. *Mamelov A.* Modeling of additive manufacturing with reduced computational effort. Master. Lulea, Sweden: Lulea University of Technology, 2016.
88. *Riedlbauer D., Steinmann P., Mergheim J.* Thermomechanical finite element simulations of selective electron beam melting processes: performance considerations // *Comput. Mech.* 2014. V. 54. P. 109.
89. *Patil N. et al.* A generalized feed forward dynamic adaptive mesh refinement and derefinement finite element framework for metal laser sintering – part I: formulation and algorithm development // *J. Manufacturing Science and Engineering*. 2015. V. 137. P. 041001.
90. *Манжиров А., Лычев С.* Математическая теория растущих тел при конечных деформациях // *Доклады академии наук*. 2011. Т. 443. № 4. С. 438.
91. *Манжиров А., Лычев С.* Актуальные проблемы механики. 50 лет Институту проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. М.: Наука, 2015. С. 426.
92. *Manzhirrov A.* Fundamentals of mechanical design and analysis for am fabricated parts // *Procedia Manufacturing*. 2017. V. 7. P. 59.
93. *Lychev S., Manzhirrov A.* Discrete and Continuous Growth of Hollow Cylinder. Finite Deformations // *Proc. World Congress on Engineering 2014, WCE 2014. V. II. London, U.K., 2014.*
94. *Zinovieva O., Zinoviev A., Ploshikhin V.* Three-dimensional modeling of the microstructure evolution during metal additive manufacturing // *Comput. Materials Sci.* 2018. V. 141. P. 207.
95. *Zinovieva O., Zinoviev A., Ploshikhin V.* Three-dimensional analysis of grain structure evolution under additive manufacturing // *Proc. European Solid Mechanics Conference. Bologna, 2018.* P. 560.
96. *Mani M. et al.* A review on measurement science needs for real-time control of additive manufacturing metal powder bed fusion processes // *International J. Production Research*. 2016. V. 55. № 5. P. 1400.  
<https://doi.org/10.1080/00207543.2016.1223378>
97. *Kruth J.P. et al.* Feedback control of selective laser melting // *Virtual and Rapid Manufacturing*. 2008. P. 521.
98. *Tang L., Landers R.* Melt pool temperature control for laser metal deposition processes. Part I: online tem-

- perature control // J. Manufacturing Sci. Eng. Trans. of the ASME. 2010. V. 132. № 1. P. 011010.
99. *Song L., Mazumder J.* Feedback control of melt pool temperature during laser cladding process // IEEE Trans. Control Syst. Technol. 2011. V. 19. № 6. P. 1349.
  100. *Song L. et al.* Control of melt pool temperature and deposition height during direct metal deposition process // Int. J. Advanced Manufacturing Technology. 2011. V. 58. № 1–4. P. 247.
  101. *Craeghs T. et al.* Feedback control of layerwise laser melting using optical sensors // Phys. Procedia. 2010. V. 5. P. 505.
  102. *Craeghs T., Yasa E., Kruth J.P.* Online quality control of selective laser melting // Solid Freeform Fabrication Proceedings. Austin, TX, 2011. C. 212.
  103. *Craeghs T. et al.* Detection of process failures in layerwise melting with optical process monitoring // Laser Assisted Net Shape Engineering (LANE 2012). 2012. V. 39. P. 753.
  104. *Mumtaz K., Hopkinson N.* Selective laser melting of thin wall parts using pulse shaping // J. of Materials Processing Technology. 2010. V. 210. № 2. P. 279.
  105. *Ning Y. et al.* An approach to minimize build errors in direct metal laser // Autom. Sci. Eng. IEEE Trans. 2006. V. 3. P. 73.
  106. *Wang X.* Calibration of shrinkage and beam offset in SLS process // Rapid Prototyping. 1999. V. 5. № 3. P. 129.
  107. *Manesh M. et al.* A Six-sigma approach for benchmarking of RPM processes // Int. J. Advanced Manufacturing Technologies. 2006. V. 31. № 3/4. P. 374.
  108. *Rosenthal D.* Etude theorique du regime thermique pendant la soudure a arc // Congres National des Sciences. Brussels, 1935. P. 1277.
  109. *Rosenthal D.* Thermal study of arc welding // Welding J. 1938. V. 17. № 4. P. 2.
  110. *Rosenthal D.* Mathematical theory of heat distribution during welding and cutting // Welding J. 1941. V. 20. № 5. P. 220.
  111. *Rosenthal D.* The theory of moving source of heat and its applications to metal treatments // Trans. ASME. 1946. V. 43. № 11. P. 849.
  112. *Eagar T., Tsai N.* Temperature fields produced by traveling distributed heat sources // Welding J. 1983. V. 62. № 12. P. 5346.
  113. *Vasinonta A., Beuth J., Griffith M.* Process maps for laser deposition of thin-walled structures // Solid Freeform Fabrication Proc. 1999. P. 383.
  114. *Vasinonta A., Beuth J.L., Griffith M.L.* A Process Map for Consistent Build Conditions in the Solid Freeform Fabrication of Thin-Walled Structures // J. Manufacturing Science and Engineering. Trans. of the ASME. 2001. V. 123. № 4. P. 615.
  115. *Wang Q. et al.* Physics-Based Multivariable Modeling and Feedback Linearization Control of Melt-Pool Geometry and Temperature in Directed Energy Deposition // J. Manufacturing Science and Engineering. Trans. of the ASME. 2016. V. 139. № 2. P. 021013.
  116. *Sammons P., Bristow D., Landers R.* Height Dependent Laser Metal Deposition Process Modeling // J. Manufacturing Science and Engineering. Trans. of the ASME. 2013. V. 135. № 5. P. 054501.
  117. *Cao X., Ayalew B.* Control-oriented MIMO modeling of laser-aided powder deposition processes // American Control Conference (ACC). IEEE, 2015. <https://doi.org/10.1109/acc.2015.7171895>
  118. *Zeng K., Pal D., Stacker B.* A review on thermal analysis methods in laser sintering and selective laser melting // Proc. of the 23rd Annual Int. Solid Freeform Fabrication Symp. An Additive Manufacturing Conf. CFF2012. 2012. P. 796.
  119. *Markl M., Korner C.* Multi-scale modeling of powder-bed based additive manufacturing // Annual Rev. Mater. Res. 2014. V. 46. P. 1.
  120. *Schoinochoritis B., Chantzis D., Salonitis K.* Simulation of metallic powder bed additive manufacturing processes with the finite element method: A critical review // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part B: J. Engineering Manufacture. 2015. V. 23. № 1. P. 96.
  121. *Rai A., Markl M., Korner C.* A coupled cellular automaton-lattice Boltzmann model for grain structure simulation during additive manufacturing // Comput. Mater. Sci. 2016. V. 124. P. 37.
  122. *Rai A., Helmer I.L., Korner C.* Simulation of grain structure evolution during powder bed based additive manufacturing // Additive Manufacturing. 2017. V. 13. P. 124.
  123. *Rolchigo M. et al.* Modeling of Ti–W solidification microstructures under additive manufacturing conditions // Metal. Mater. Trans. A. 2017. V. 48. P. 3606.
  124. *Gu D., Yan P.* Thermal evolution behavior and fluid dynamics during laser additive manufacturing of Al-based nanocomposites: Underlying role of reinforcement weight fraction // J. Appl. Phys. 2015. V. 118. P. 233109.
  125. *Yuan P., Gu D.* Molten pool behavior and its physical mechanism during selective laser melting of TiC/AlSi10Mg nanocomposites: simulation and experiments // J. Physics D: Applied Physics. 2015. V. 48. № 3. P. 035303.
  126. *Manvatkar V., De A., DebRoy T.* Spatial variation of melt pool geometry, peak temperature and solidification parameters during laser assisted additive manufacturing process // Materials Science and Technology. 2015. V. 31. № 8. P. 924.
  127. *David S.A., DebRoy T.* Current issues and problems in welding science // Science. 1992. V. 257. № 5069. P. 497.
  128. *DebRoy T., David S.* Physical processes in fusion welding // Reviews in Modern Physics. 1995. V. 67. P. 85.
  129. *Wang H., Shi Y., Gong S.* Numerical simulation of laser keyhole welding processes based on control volume methods // J. Physics D: Applied Physics. 2006. V. 39. № 21. P. 4722.
  130. *Morville S. et al.* 2D longitudinal modeling of heat transfer and fluid flow during multilayered direct laser

- metal deposition process // *J. Laser Applications*. 2012. V. 24. P. 032008-1.
131. *Li S. et al.* Melt-pool motion, temperature variation and dendritic morphology of Inconel 718 during pulsed- and continuous-wave laser additive manufacturing: A comparative study // *Materials & Design*. 2017. V. 119. P. 351.  
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2017.01.065>
132. *Gan Z. et al.* Numerical simulation of thermal behavior and multicomponent mass transfer in direct laser deposition of Co-base alloy on steel // *International J. Heat and Mass Transfer*. 2015. V. 104. P. 28.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.08.049>
133. *Saadlaoui Y. et al.* A new strategy for the numerical modeling of a weld pool // *Comptes Rendus Mecanique*. 2018. V. 346. № 11. P. 999.
134. *Chan C., Mazumder J., Chen M.* Effect of surface tension gradient driven convection in a laser melt pool: Three-dimensional perturbation method // *J. Applied Physics*. 1988. V. 64. P. 6166.
135. *Leblond J.B., Amin El-Sayed H., Bergheau J.M.* On the incorporation of surface tension in finite element calculations // *Comptes Rendus Mecanique*. 2013. V. 341. P. 770.
136. *Yu G. et al.* On the role of processing parameters in thermal behavior, surface morphology and accuracy during laser 3D printing of aluminum alloy // *J. Physics D: Applied Physics*. 2016. V. 49. № 13. P. 135501.
137. *Korner C., Attar E., Heinel P.* Mesoscopic simulation of selective laser beam melting processes // *J. Materials Processing and Technology*. 2011. V. 211. № 6. P. 978.
138. *Bergheau J.M., Fortunier R.* Finite element simulation of heat transfer. ISTE. Wiley, 2008.
139. *Feulvarch E., Bergheau J.M., Leblond J.B.* An implicit finite element algorithm for the simulation of diffusion with phase changes in solids // *Int. J. Numer. Mathematics*. 2009. V. 78. P. 1492.
140. *Williams R.J., Davies C.M., Hooper P.A.* A pragmatic part scale model for residual stress and distortion prediction in powder bed fusion // *Additive Manufacturing*. 2018. V. 22. P. 416.  
<https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.05.038>
141. *Li C. et al.* A multiscale modeling approach for fast prediction of part distortion in selective laser melting // *J. Materials Processing Technology*. 2016. V. 229. P. 703.
142. *Moran T.P. et al.* Utility of superposition-based finite element approach for part-scale thermal simulation in additive manufacturing // *Additive Manufacturing*. 2018. V. 21. P. 215.  
<https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.02.015>
143. *Zhang Z. et al.* 3-Dimensional heat transfer modeling for laser powder-bed fusion additive manufacturing with volumetric heat sources based on varied thermal conductivity and absorptivity // *Optics and Laser Technology*. 2019. V. 109. P. 297.
144. *Roberts L. et al.* A three-dimensional finite element analysis of the temperature field during laser melting of metal powders in additive laser manufacturing // *Int. J. Machine Tools and Manufacture*. 2009. V. 49. P. 916.
145. *Antony K., Arivazhagan N., Senthilkumaran K.* Numerical and experimental investigations on laser melting of stainless steel 316L metal powders // *J. Manufacturing Processes*. 2014. V. 16. № 3. P. 345.
146. *Criales L.E. et al.* Predictive modeling and optimization of multi-track processing for laser powder bed fusion of nickel alloy 625 // *Additive Manufacturing*. 2017. V. 13. P. 14.
147. *Schilp J. et al.* Investigations on temperature fields during laser beam melting by means of process monitoring and multiscale process modelling // *Advances in Mechanical Engineering*. 2014. V. 6. P. 217584.
148. *Fathi A. ad Toyserkani E., Khajepour A., Durali M.* Prediction of melt pool depth and dilution in laser powder deposition // *J. Physics D. Applied Physics*. 2006. V. 39. P. 2613.
149. *Nie Z. et al.* Experimental study and modeling of H13 steel deposition using laser hot-wire additive manufacturing // *Journal of Materials Processing Technology*. 2016. V. 235. P. 171.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2016.04.006>
150. *Shi Q. et al.* Effects of laser processing parameters on thermal behavior and melting / solidification mechanism during selective laser melting of TiC / Inconel 718 composites // *Optics and Laser Technology*. 2016. V. 84. P. 9.
151. *Гладуш Г., Смуров И.* Физические основы лазерной обработки материалов. М.: Физматлит, 2017.
152. *Gusarov A. et al.* Model of radiation and heat transfer in laser-powder interaction zone at selective laser melting // *J. Heat Transfer. Trans, of the ASME*. 2009. V. 131. № 7. P. 072101.
153. *Liu S. et al.* Microstructure prediction of selective laser melting AlSi10Mg using finite element analysis // *Materials & Design*. 2018. V. 142. P. 319.
154. *Yin L. et al.* Simulation of temperature distribution in single metallic powder layer for laser micro-sintering // *Comput. Materials Sci*. 2012. V. 53. № 1. P. 333.
155. *Mukherjee T., Zhang W., DebRoy T.* An improved prediction of residual stresses and distortion in additive manufacturing // *Computational Materials Science*. 2017. V. 126. P. 360.  
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2016.10.003>
156. *Foroozmehr A., Badrossamay M., Foroozmehr E. et al.* Finite element simulation of selective laser melting process considering optical penetration depth of laser in powder bed // *Materials & Design*. 2016. V. 89. P. 255.
157. *Wu C., Wang H., Zhang Y.* A new heat source model for keyhole plasma arc welding in FEM analysis of the temperature profile // *Welding Res*. 2006. P. 284.
158. *Bondakar M. et al.* Finite element modeling of the electron beam welding of Inconel-713LC gas turbine blades // *J. Manufact. Process*. 2017. P. 339.
159. *Papadakis L. et al.* High Value Manufacturing / B. Taylor and Francis Gr., 2014. A thermo-mechanical modeling reduction approach for calculating shape distortion in SLM manufacturing for aero engine components. P. 613.

160. Goldak J., Chakravarti A., Bibby M. A new finite element model for welding heat sources // Metall. Trans. B. 1984. V. 15. № 2. P. 299.
161. Bartel T., Guschke I., Menze A. On the modeling and simulation of selective laser melting with a phase transformation approach // Proc. European Solid Mechanics Conference. Bologna, 2018. P. 1283.
162. Nunes A.J. An extended Rosenthal weld model // Welding Research Suppl. 1983. V. 68. № 6. P. 165.
163. Dunbar A.J. et al. Experimental validation of finite element modeling for laser powder bed fusion deformation // Additive Manufacturing. 2016. V. 12. P. 108. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2016.08.003>
164. Ilin A. et al. Computer aided optimization of the thermal management during laser beam melting process // Phys. Procedia. 2014. V. 52. P. 638.
165. Gusarov A., Kruth J.P. Modelling of radiation transfer in metallic powders at laser treatments // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2005. V. 48. P. 3423.
166. Baillis D., Sacadura J.F. Thermal radiation properties of dispersed media: theoretical predictions and experimental characterization // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2000. V. 47. P. 327.
167. Zhang Y. et al. Macroscopic thermal finite element modeling of additive metal manufacturing by selective laser melting process // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2018. V. 331. P. 514. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.12.003>
168. Bruna-Rosso C., Demir A., Previtali B. Selective laser melting finite element modeling: Validation with high-speed imaging and lack of fusion defects prediction // Materials and Design. 2018. V. 156. P. 143.
169. Ladani L. et al. Effective liquid conductivity for improved simulation of thermal transport in laser beam melting powder bed technology // Additive Manufacturing. 2017. V. 14. P. 13.
170. Кривилев М. и др. Нестационарный теплоперенос при фазовых переходах в пористых материалах // Вестник Удмуртского университета. 2010. № 1. С. 42.
171. Харанжевский Е., Кривилев М. Лазерное спекание нанокompозитов Fe–Ni // ФММ. 2011. Т. 11. № 1. С. 54.
172. Костенков С., Харанжевский Е. Рассеяние и поглощение лазерного излучения при прохождении его через ультрадисперсные порошковые среды // Вестник Удмуртского университета. 2012. № 1. С. 13.
173. Костенков С., Харанжевский Е., Кривилев Е. Метод определения характеристик взаимодействия лазерного излучения с нанокompозитными порошковыми материалами // ФММ. 2012. Т. 113. № 1. С. 98.
174. Кривилев М. и др. Управление лазерным спеканием металлических порошковых смесей // Управление большими системами. Т. 31. М.: Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2010. С. 299.
175. Сотов А. Разработка методики проектирования технологических процессов изготовления жаровых труб ГТД-методом селективного лазерного сплавления. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Самара: Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П.Королева, 2017.
176. Tran H., Lo Y. Heat transfer simulations of selective laser melting process based on volumetric heat source with powder size consideration // J. Materials Processing Technology. 2018. V. 255. P. 411.
177. Гусаров А. Модель осредненного переноса излучения в двухфазной гетерогенной среде // ТВТ. 2009. Т. 47. № 3. С. 396.
178. Boley C., Khairallah S., Rubenchik A. Calculation of laser absorption by metal powders in additive manufacturing // Applied Optics. 2015. V. 54. P. 2477.
179. Hopkins A., Stillinger F.H., Torquato S. Disordered strictly jammed binary sphere packings attain an anomalously large range of densities // Phys. Rev. E. 2013. V. 88. P. 022205.
180. King W. et al. Observation of keyhole-mode laser melting in laser powder-bed fusion additive manufacturing // J. Materials Processing Technology. 2014. V. 214. P. 2915.
181. Meier C. et al. Thermophysical phenomena in metal additive manufacturing by selective laser melting: Fundamentals, Modeling, Simulation and Experimentation // Annual Reviews of Heat Transfer. 2016. V. 20. P. 241.
182. Wei L.S. et al. Thermal conductivity of metal powders for powder bed additive manufacturing // Additive Manufacturing. 2018. V. 21. P. 201. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.02.002>
183. Wang X.C. et al. Direct selective laser sintering of hard metal powders: experimental study and simulation // Int. J. Advanced Manufacturing Technologies. 2002. V. 19. P. 351.
184. Meakin P., Jullien R. Reconstructing effects in the rain model for random deposition // J. Phys. (France). 1987. V. 48. P. 1651.
185. Hu Z., Manadevan B. Uncertainty qualification and management in additive manufacturing process models // Int. J. Advanced Manufacturing Technology. 2017. V. 93. P. 2855.
186. Гусаров А., Ковалев Е. Эффективная теплопроводность свободнонасыпанных и слабоспеченных порошков. I. Модель // Физика и химия обработки материалов. 2009. № 1. С. 70.
187. Гусаров А., Ковалев В. Эффективная теплопроводность свободнонасыпанных и слабоспеченных порошков. II. Анализ экспериментальных данных // Физика и химия обработки материалов. 2009. № 2. С. 66.
188. Wang X., Kruth J.P. Energy absorption and penetration in selective laser sintering: a ray-tracing model // Proc. Int. Confer. Math. Model. Simul. Meth. Technol. 2000. P. 673.
189. Fischer P. et al. Sintering of commercially pure titanium powder with a Nd: YAG laser source // Acta Materialia. 2003. V. 51. № 6. P. 1651.
190. Zhou J., Zhang Y., Chen J.K. Numerical simulation of laser irradiation to a randomly packed bimodal powder

- bed // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 2009. V. 52. № 13/14. P. 3137.
191. Yan W. et al. Multiscale modeling of electron beam and substrate interaction: a new heat source model // *Computational Mechanics*. 2015. V. 56. № 2. P. 265.
192. Chen Q. et al. Three-dimensional finite element thermomechanical modeling of additive manufacturing by selective laser melting for ceramic materials // *Additive Manufacturing*. 2017. V. 16. P. 124.
193. Masoomi M., Thompson S., Shamsaei N. Laser powder bed fusion of Ti–6Al–4V parts: thermal modeling and mechanical implications // *Int. J. Mach. Tools and Manufacturing*. 2017. V. 118/119. P. 73.
194. Kaplan A. Local absorptivity modulation of a 1  $\mu\text{m}$  laser beam through surface waviness // *Appl. Surf. Sci.* 2012. V. 258. P. 73.
195. Bauerle D. *Laser processing and chemistry*. Berlin: Springer, 2011.
196. Gladush G.G., Smurov I. *Physics of Laser Materials Processing: Theory and Experiment*. Berlin: Springer, 2011.
197. Yadroitsev I. et al. Use of track/layer morphology to develop functional parts by selective laser melting // *J. Laser Appl.* 2013. V. 25. P. 0252003.
198. Yadroitsev I. et al. Strategy of manufacturing components with designed internal structure by selective laser melting of metallic powder // *Appl. Surf. Sci.* 2007. V. 254. P. 980.
199. Gouge M.F. et al. Modeling forced convection in the thermal simulation of laser cladding processes // *The International J. Advanced Manufacturing Technology*. 2015. V. 79. № 1–4. P. 307.  
<https://doi.org/10.1007/s00170-015-6831-x>
200. Kundakcioglu E., Lazoglu I., Rawal S. Transient thermal modeling of laser-based additive manufacturing for 3D freeform structures // *Int. J. Advanced Manufacturing Technology*. 2015. V. 85. № 1–4. P. 493.
201. Dai K., Shaw L. Finite element analysis of the effect of volume shrinkage during laser deposition // *Acta Materialia*. 2005. V. 53. P. 4743.
202. Zhang Z., Farahmand P., Kovacevic R. Laser cladding of 420 stainless steel with molybdenum on mild steel A36 by a high power direct diode laser // *Materials & Design*. 2016. V. 109. P. 686.  
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.07.114>
203. Marion G. et al. A finite element model for the simulation of direct metal deposition // *ICALEO 2014 Congress Proceedings*. San Diego, 2014.
204. Parry L., Ashcroft I.A., Wildman R.D. Understanding the effect of laser scan strategy on residual stress in selective laser melting through thermo-mechanical simulation // *Additive Manufacturing*. 2016. V. 12.  
<https://doi.org/10.1016/j.addma.2016.05.014>
205. Zhang D. Selective laser melting of W–Ni–Fe powders: simulation and experimental study // *Int. J. Advanced Manufacturing Technology*. 2010. V. 51. № 5–8. P. 649.
206. Karkhin V. et al. Effect of latent heat of fusion on thermal processes in laser welding of aluminum alloys // *Sci. and Techn. Welding and Joining*. 2005. V. 10. № 5. P. 597.
207. Duarte C.A., Babuska I., Oden J.T. Generalized finite element methods for tree dimensional structural mechanics problems // *Computers and Structures*. 2000. V. 77. P. 215.
208. Duarte C.A. et al. A generalized finite element method for simulation of three-dimensional dynamic crack propagation // *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001. V. 190. № 15–17. P. 2227.
209. Duarte C.A., Babuska I. Mesh-independent directional p-enrichment using the generalized finite element method // *International J. Numerical Methods in Engineering*. 2002. V. 55. № 12. P. 1477.
210. Christensen N., Davies V., Gjermudsen R. The distribution of temperature in arc welding // *British Welding J.* 1965. V. 12. № 2. P. 54.
211. Bontha S. et al. Thermal process maps for predicting solidification microstructure in laser fabrication of thin-walled structures // *J. Materials Processing Technology*. 2006. V. 178. P. 135.
212. Bontha S. et al. Effects of process variables and size-scale on solidification microstructure in beam-based fabrication of bulky 3D structures // *Materials Sciences and Engineering A*. 2009. V. 513/514. P. 311.
213. Romanova V. et al. Modeling of 3D microstructures produced by additive manufacturing // *AIP Conf. Proceedings*. 2018. V. 2051. P. 020256.
214. Dobranich D., Dykhuizen R. Scoping thermal calculations of the LENS process: Internal Report. Sandia Nat. Laboratories. 1998.
215. Dukhuizen R., Dobranich D. Cooling rates in the LENS process: Internal Report. Sandia Nat. Laboratories. 1998.
216. Rykalin N., Beketov A. Calculating the thermal cycle in the heat-affected zone from the twodimensional outline of the molten pool // *Welding Production*. 1967. V. 14. P. 42.
217. Oreper G., Eagar T., Szekely J. Convection in arc weld pools // *Welding J.* 1983. V. 62. № 11. P. 307.
218. Raganaswamy P. et al. Residual stresses in components formed by laser engineered net shaping (LENS®) // *The J. Strain Analysis for Engineering Design*. 2003. V. 38. № 6. P. 519.
219. Gockel J., Klingbeil N., Bontha S. A Closed-Form Solution for the Effect of Free Edges on Melt Pool Geometry and Solidification Microstructure in Additive Manufacturing of Thin-Wall Geometries // *Metallurgical and Materials Transactions B*. 2015. V. 47. № 2. P. 1400.
220. Yang Y. et al. A semi-analytical thermal modelling approach for selective laser // *Additive Manufacturing*. 2018. V. 21. P. 284.
221. Carslaw H., Jaeger J. *Conduction of Heat in Solid*. Oxford Univ. Press, 1967.
222. Rykalin N., Nikolaev A. Welding arc heat flow // *Welding in the World*. 1971. V. 93. № 3/4. P. 112.

223. *Pavelic V.* Weld puddle shape and size correlation in a metal plate welded by the GTA process // Arch Physics and Weld Pool Behavior: The Welding Inst. Conf. London, 1979. P. 251.
224. *Peng T.C., Sastry S., O'Neal J.* Exploratory study of laser processing of titanium alloys // Lasers in Metallurgy: The Metallurg. Soc. of the ASME. 1981. P. 279.
225. *Grosh R., Trabant E.* Arc welding temperature // Welding J. 1956. V. 35. № 8. P. 396.
226. *Stackgold I.* Green's functions and boundary value problems. N.Y.: Wiley Sons, 1979.
227. *Ishizaki K., Murai K., Kanbe Y.* Penetration in arc welding and convection in molten metal // Intern. Inst. of Welding Study Group. 1966. № 7768.
228. *Mills G.* Fundamental mechanisms of penetration in GTA welding // Welding J. 1979. V. 58. № 1. P. 21.
229. *Heiple C., Roper J.* Mechanisms for minor element effect on GTA fusion zone geometry // Welding J. 1982. V. 61. № 4. P. 97.
230. *Apps R., Milner D.* Heat flows in argon-arc welding // British Welding J. 1955. V. 2. № 10. P. 475.
231. *Yan Z. et al.* Review on thermal analysis in laser-based additive manufacturing // Optics and Laser Technology. 2018. V. 106. P. 427.  
<https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.04.034>
232. *Кархин В.* Тепловые процессы при сварке. 2-е изд. СПб., 2015.
233. *Борисов В.* Теория двухфазной зоны металлического слитка. М.: Металлургия, 1987.
234. *Виноградов В., Тяжелникова И.* О теоретических аспектах формирования макро- и микроструктуры в затвердевающем металлическом слитке // Вестник Удмуртского университета. Физика. Химия. 2008. № 1. С. 37.
235. *Лыков А.* Явления переноса в капиллярно-пористых телах. М.: ГИТТЛ, 1954.
236. *Кривилев М. и др.* Управление лазерным спеканием металлических порошковых смесей // Управление большими системами. Сборник трудов. М.: ИПУ им. В.А.Трапезникова РАН, 2010. С. 299.
237. *Galenko P., Danilov D.* Local nonequilibrium effect on rapid dendritic growth in a binary alloy melt // Phys. Letters A. 1997. V. 235. P. 271.
238. *Vernott P.* Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur // Comptes Rendus. 1958. V. 246. № 22. P. 3154.
239. *Cattaneo C.* Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee // Comptes Rendus. 1958. V. 247. № 4. P. 431.
240. *Лыков А.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
241. *Шашков А., Бубнов А., Яновский С.* Волновые явления теплопроводности. М.: УРСС, 2004.
242. *Лыков А.* Теплообмен. Справочник. М.: Энергия, 1978.
243. *Соболев С.* Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // Успехи физических наук. 1991. Т. 161. № 3. С. 5.
244. *Самарский А. и др.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
245. *Формалев В., Колесник С., Кузнецова Е.* О граничной обратной задаче теплопроводности по восстановлению тепловых потоков к границам анизотропных тел // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. № 1. С. 72.
246. *Fergani O. et al.* Analytical modelling of residual stress in additive manufacturing // Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures. 2017. V. 40. P. 971.
247. *Арутюнян Н., Манжиров А., Наумов В.* Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991.
248. *Lychev S., Lycheva T.* Theoretical and experimental study of thin-walled growing laminated structures // PCM-CMM-2015 – 3rd Polish Congress of Mechanics & 21st Computer Methods in Mechanics. Gdansk, Poland: 2015. P. 923.
249. *Lychev S.A., Manzhirrov A.V.* Mathematical modeling of growth processes in nature and engineering: A variational approach // J. Phys.: Conference Series. 2009. V. 181. P. 012096.
250. *Manzhirrov A.* Mechanics of growing solids: new track in mechanical engineering // ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE 2014. 2014.  
<https://doi.org/10.1115/IMECE2014-36712>
251. *Manzhirrov A., Lychev S., Gupta N.* Nonlinear Models of Growing Solids // Proc. Indian National Sc. Acad. 2013. Spl. Issue (Pt. A). P. 529.
252. *Лычев С., Манжиров А.* Отсчетные конфигурации растущих тел // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 86.
253. *Манжиров А.* Математическая теория растущих тел: уравнения, задачи, приложения // Вестник Нижегородского ун-та им. И.И. Лобачевского. 2011. № 4-4. С. 1603.
254. *Манжиров А., Лычев С.* Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // ПММ. 2013. Т. 77. № 4. С. 585.
255. *Манжиров А., Паршин Д.* Об общих подходах и методах механики наращиваемых упругих и вязкоупругих тел и ее возможных приложениях // Механика деформируемого твердого тела: сборник трудов IX Всероссийской конференции. Воронеж, 2016. С. 31.
256. *Manzhirrov A., Lychev S.* Mathematical modeling of additive manufacturing technologies // Lecture Notes in Engineering and Computer Sciences. 2014. P. 1404.
257. *Манжиров А., Паршин Д.* Возведение арочной конструкции с использованием аддитивной технологии под действием силы тяжести // Известия РАН. Механика твердого тела. 2015. № 5. С. 94.
258. *Манжиров А., Паршин Д.* Влияние режима возведения на напряженное состояние вязкоупругой арочной конструкции, возводимой с использованием аддитивной технологии под действием силы //

- Известия РАН. Механика твердого тела. 2015. № 6. С. 69.
259. *Manzhurov A., Parshin D.* Application of prestressed structural elements in the erection of heavy viscoelastic arched structures with the use of an additive technology // *Mechanics of Solids*. 2015. V. 51. № 6. P. 692.
260. *Лычев С., Марк А.* Осесимметричное наращивание поголо гиперупругого цилиндра // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия: Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. № 2. С. 209.
261. *Манжуров А., Паршин Д.* Влияние гравитации на аддитивно изготавливаемую конструкцию из стареющего вязкоупругого материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. Т. 3. С. 22.
262. *Лычев С.* Деформирование растущих упругих пластин // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. Механика деформируемого твердого тела. 2011. № 4. С. 1588.
263. *Манжуров А., Паршин Д.* Моделирование процесса деформирования наращиваемых конических тел // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. Т. 54. № 4. С. 290.
264. *Кузнецов С.И., Манжуров А.В.* Задача теплопроводности для растущего шара // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 6. С. 139.
265. *Levitin A., Lychev S., Saifutdinov I.* Transient Dynamical Problem for a Accreted Thermoelastic Parallelepiped // *Proceedings of the World Congress on Engineering 2014, WCE 2014*. Т. II. London, U.K.: 2014.
266. *Manzhurov A., Parshin D.* Accretion of spherical viscoelastic objects under self-gravity // *Lecture notes in engineering and computer science. World Congress on Engineering: WCE-2016*. London, U.K.: 2016. P. 1131.
267. *Бычков П., Корчак Е.* Экспериментальная методика определения технологических искажений в телах сложной формы, создаваемых методом стереолитографии // Международная молодежная научная конференция “XLIII Гагаринские чтения”. Секция “Механика и моделирование материалов и технологий”. М., 2011. С. 16.
268. *Бычков П. и др.* Определение остаточных напряжений в изделиях при их аддитивном изготовлении методом послойной фотополимеризации // Известия РАН. Механика твердого тела. 2017. № 5. С. 63.
269. *Кобаяси С., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
270. *Mukherjee T., Zhang W., DebRoy T.* An improved prediction of residual stresses and distortion in additive manufacturing // *Computational Materials Science*. 2017. V. 126. P. 360. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2016.10.003>
271. *Формалев В., Колесник С.* Методология решения обратных коэффициентных задач по определению нелинейных теплофизических характеристик анизотропных тел // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 6. С. 875.
272. *Formalev V., Kolesnik S.* On Inverse Coefficient Heat-Conduction Problems on Reconstruction of Nonlinear Components of the Thermal-Conductivity Tensor of Anisotropic Bodies // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2017. V. 90. № 6. P. 1302.
273. *Formalev V., Kolesnik S.* Temperature-dependent anisotropic bodies thermal conductivity tensor components identification method // *International J. Heat and Mass Transfer*. 2018. V. 123. P. 994.
274. *Philo A.M. et al.* A study into the effects of gas flow inlet design of the renishaw AM250 laser powder bed fusion machine using computational the renishaw AM250 laser powder bed fusion machine. 2017.
275. *Keller N., Ploshikhin V.* New method for fast predictions of residual stress and distortion of AM parts // *Solid Freeform Fabrication Symposium (SFF)*, Austin, TX. 2014. P. 4.
276. *Alvarez P. et al.* Computationally efficient distortion prediction in powder bed fusion additive manufacturing // *Int. J. Eng. Res. Sci*. 2016. V. 2. № 10. P. 39.
277. *Ahmad B. et al.* Residual stress evaluation in selective-laser-melting additively manufactured titanium (Ti-6Al-4V) and inconel 718 using the contour method and numerical simulation // *Additive Manufacturing*. 2018. V. 22. P. 571.
278. *Hill M.R., Nelson D.V.* The inherent strain method for residual stress determination and its application to a long welded joint // *ASME-PUBLICATIONS-PVP*. 1995. V. 318. P. 343.
279. *Bugatti M., Semeraro Q.* Limitations of the inherent strain method in simulating powder bed fusion processes // *Additive Manufacturing*. 2018. V. 23. P. 329.
280. *Kamara A. et al.* Modelling of the melt pool geometry in the laser deposition of nickel alloys using the anisotropic enhanced thermal conductivity approach // *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: J. Engineering Manufacture*. 2011. V. 225. № 1. P. 87.
281. *Yang K.V. et al.* Effect of heat treatment on the microstructure and anisotropy in mechanical properties of A357 alloy produced by selective laser melting // *Materials & Design*. 2018. V. 154. P. 275.
282. *Hitzler L. et al.* Direction and location dependency of selective laser melted AlSiOMg specimens // *J. Materials Processing Technology*. 2017. V. 243. P. 48. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2016.11.029>
283. *Wei L.C. et al.* Thermal conductivity of metal powders for powder bed additive manufacturing // *Additive Manufacturing*. 2018. V. 21. P. 201. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.02.002>
284. *Trapp J. et al.* In situ absorptivity measurements of metallic powders during laser powder-bed fusion additive manufacturing // *Applied Materials Today*. 2017. V. 9. P. 341.
285. *Gouge M., Michaleris P.* Thermo-mechanical modeling of additive manufacturing. Butterworth-Heinemann, 2017.
286. *Mukherjee T. et al.* Heat and fluid flow in additive manufacturing-Part I: Modeling of powder bed fusion // *Computational Materials Science*. 2018. V. 150. P. 304.

287. *Zhang Y. et al.* Macroscopic thermal finite element modeling of additive metal manufacturing by selective laser melting process // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018. V. 331. P. 514.
288. *Кахраманов Р. и др.* О возможности применения квазистационарных решений для описания теплового состояния изделий, изготавливаемых методами послойного лазерного синтеза // *Теплофизика высоких температур*. 2017. Т. 55. № 5. С. 746.
289. *Denlinger E.R. et al.* Thermomechanical model development and in situ experimental validation of the Laser Powder-bed Fusion process // *Additive Manufacturing*. 2017. V. 16. P. 73.  
<https://doi.org/10.1016/j.addma.2017.05.001>
290. *Santos L.S., Gupta S.K., Bruck H.A.* Simulation of buckling of internal features during selective laser sintering of metals // *Additive Manufacturing*. 2018. V. 23. P. 235.  
<https://doi.org/10.1016/J.ADDMA.2018.08.002>
291. *Afazov S. et al.* Distortion prediction and compensation in selective laser melting // *Additive Manufacturing*. 2017. V. 17. P. 15.  
<https://doi.org/10.1016/j.addma.2017.07.005>
292. *Dunbar A.J. et al.* Experimental validation of finite element modeling for laser powder bed fusion deformation // *Additive Manufacturing*. 2016. V. 12. P. 108.
293. *Michopoulos J.G. et al.* On the multiphysics modeling challenges for metal additive manufacturing processes // *Additive Manufacturing*. 2018. V. 22. 2015. P. 784.  
<https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.06.019>
294. *Mirkoohi E. et al.* Thermal modeling of temperature distribution in metal additive manufacturing considering effects of build layers, latent heat, and temperature-sensitivity of material properties // *J. Manufacturing and Materials Processing*. 2018. V. 2. № 3. P. 63.
295. *Formalev V., Kuznetsova E., Kuznetsova E.* Mathematical modeling of the Stefan's problems with the determination of the coordinates and the velocities of the dynamically moving borders of phase transformations // *Periodico Tche Quimica*. 2018. V. 15. P. 377.
296. *Ding J. et al.* A computationally efficient finite element model of wire and arc additive manufacture // *The International J. Advanced Manufacturing Technology*. 2014. V. 70. № 1–4. P. 227.
297. *Lindgren L.E. et al.* Simulation of additive manufacturing using coupled constitutive and microstructure models // *Additive Manufacturing*. 2016. V. 12. P. 144.
298. *Foteinopoulos P., Papacharalampopoulos A., Stavropoulos P.* On thermal modeling of Additive Manufacturing processes // *CIRP J. Manufacturing Sci. Tech.* 2018. V. 20. P. 66.
299. *Michaleris P.* Modeling metal deposition in heat transfer analyses of additive manufacturing processes // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2014. V. 86. P. 51.
300. *Michaleris P.* Modeling metal deposition in heat transfer analyses of additive manufacturing processes // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2014. V. 86. P. 51.  
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2014.04.003>