ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 2020, том 58, № 1, с. 101–106

УДК 532.5.032+536-36+532.5.013.4

К УСТОЙЧИВОСТИ РАДИАЛЬНОГО СХОЖДЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© 2020 г. Ю. Г. Губарев[1, 2, *], Д. А. Фурсова[2]

[1]*ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

[2]*ФГАОУ ВО Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, г. Новосибирск, Россия*

**E-mail: gubarev@hydro.nsc.ru*

Поступила в редакцию 08.10.2018 г.
После доработки 29.08.2019 г.
Принята к публикации 22.10.2019 г.

Изучается задача нелинейной устойчивости радиального схлопывания цилиндрической оболочки, которая заполнена однородной по плотности вязкой несжимаемой жидкостью. Принимается ряд предположений: 1) внутри оболочки содержится вакуум; 2) снаружи ее окружает слой сжатого политропного газа, служащего продуктом мгновенной детонации и оказывающего на внешнюю поверхность оболочки постоянное давление; 3) за слоем газа вновь находится вакуум. Прямым методом Ляпунова установлена абсолютная неустойчивость радиального схлопывания рассматриваемой вязкой цилиндрической оболочки по отношению к конечным возмущениям того же типа симметрии. Построена функция Ляпунова, которая удовлетворяет всем условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, причем независимо от конкретного режима радиального схождения. Этот результат целиком подтверждает соответствующую гипотезу Тришина и математически строго доказывает, что кумуляция кинетической энергии однородной по плотности вязкой несжимаемой жидкости в процессе радиального схлопывания исследуемой цилиндрической оболочки к своей оси возникает исключительно на его импульсной стадии.

DOI: 10.31857/S0040364420010093

ВВЕДЕНИЕ

Явления кумуляции, сопровождающиеся концентрацией в точке, вдоль прямой или на плоскости силы, энергии либо иной физической величины, по-прежнему представляют собой интерес для специалистов (и прежде всего с точки зрения приложений) [1–3].

В данной работе рассмотрена задача нелинейной устойчивости радиального схлопывания цилиндрической оболочки, которая наполнена однородной по плотности вязкой несжимаемой жидкостью, относительно возмущений той же симметрии [2, 4]. С одной стороны, эта задача связана с кумулятивными процессами концентрации энергии вдоль прямой, а с другой – имеет непосредственное отношение к проблеме ускорения тел продуктами детонации взрывчатых веществ (ВВ), являющейся, в свою очередь, одной из ключевых задач в физике высоких плотностей энергии, механике импульсных процессов и физике взрыва. При ударе ускоряемые тела создают в рассматриваемых образцах ударные волны необходимой интенсивности и формы, с помощью которых исследуются свойства сред и поведение конструкций в экстремальных условиях, осуществляются технологические операции сварки и штамповки взрывом, упрочнения, обработки деталей и т.п.

Из всего многообразия способов метания в настоящей статье изучается только динамическое нагружение взрывом цилиндрических кумулятивных облицовок [2]. Это нагружение производится посредством мощных конденсированных ВВ, при детонации которых возникают давления 20–50 ГПа. Продукты детонации, ударно воздействуя на оболочку, ускоряют ее. Важно, что в ходе деформирования тонкой оболочки определяющими являются инерционные силы, а для более толстых оболочек дают о себе знать эффекты прочности. Отсюда возможны разные постановки задач [2, 4].

Если положить, что оболочки относительно тонкие и длинные в осевом направлении, а их деформация под действием продуктов детонации однородная (иными словами, отсутствуют сильные локальные деформации), то задача может быть рассмотрена в одномерной постановке.

Задачу о схлопывании цилиндрической оболочки, окруженной слоем сжатого политропного газа конечной толщины, который воздействует на оболочку и расширяется в вакуум, можно исследовать в импульсной формулировке. Для этого пренебрегается понижением давления в газе на внешней поверхности цилиндрической оболочки в волне разрежения, возникающей при схождении оболочки, и предполагается, что на цилиндрическую оболочку оказывается постоянное давление в течение времени, за которое со свободной границы политропного газа успевает прийти вторая волна разрежения и мгновенно снять данное давление. Тем самым различаются две фазы схлопывания оболочки: импульсная стадия постоянного давления на цилиндрическую оболочку и инерционный этап с нулевым давлением и сохранением кинетической энергии вещества оболочки.

Поскольку при взрывном метании тонких облицовок на первый план выступают инерционные силы и учет волновых процессов слабо влияет на их финальную скорость, то для описания движения этих облицовок в целом ряде задач применяется модель несжимаемой жидкости.

Однако опыт использования для метаемой взрывом облицовки модели идеальной несжимаемой жидкости показал, что расчетные зависимости радиуса оболочки от времени хорошо согласуются с экспериментальными лишь до определенного момента. Существенное отличие наблюдается на завершающей стадии схождения оболочки. Оно устраняется применением модели вязкой несжимаемой жидкости для материала облицовки. Данная модель объясняет несколько характерных физических эффектов, впервые полученных экспериментально: остановку оболочки при достижении ее внутренней поверхностью некоторого ненулевого радиуса на инерционном этапе схлопывания, “взрывное” испарение оболочки в результате быстрого перехода всей ее кинетической энергии в тепло из-за действия вязких сил, динамическую потерю устойчивости формой оболочки [5, 6].

Ранее, в работе [4], эффект остановки внутренней поверхности вязкой цилиндрической оболочки на некотором ненулевом радиусе был математически строго обоснован для инерционной стадии ее схлопывания. В настоящей статье прямым методом Ляпунова установлена абсолютная неустойчивость радиального схождения цилиндрической оболочки вязкой несжимаемой жидкости с постоянной плотностью на импульсном этапе по отношению к конечным возмущениям того же типа симметрии. В работе построена функция Ляпунова [7], полностью удовлетворяющая условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [8], при этом независимо от конкретного режима радиального схлопывания. Данный результат доказывает, что кумуляция кинетической энергии однородной по плотности вязкой несжимаемой жидкости в процессе радиального схождения изучаемой цилиндрической оболочки к своей оси действительно возникает исключительно на его импульсной стадии.

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАДИУСА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И ЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Рассматривается цилиндрическая оболочка вязкой несжимаемой жидкости постоянной плотности ρ_1, которая окружена слоем сжатого политропного газа конечной толщины. Внутри оболочки и вне слоя газа — вакуум. В работе [2] представлен подробный вывод соотношения, описывающего, как именно развивается радиальное схлопывание исследуемой цилиндрической оболочки по времени. Ниже воспроизводятся отдельные шаги этого вывода.

В частности, полагается, что для вязкой цилиндрической оболочки выполняются закон сохранения массы

$$r_1^2(t) - R^2(t) = C \equiv \text{const} > 0 \qquad (1)$$

и уравнение неразрывности

$$r_1(t)\dot{r}_1(t) = R(t)\dot{R}(t) \equiv rv, \qquad (2)$$

где r_1 — наружный радиус, t — время, R — внутренний радиус, $\dot{r}_1(t) \equiv dr_1/dt$, $\dot{R}(t) \equiv dR/dt$, r — радиальная координата некоторой частицы однородной по плотности вязкой несжимаемой жидкости, v — радиальная составляющая скорости данной жидкой частицы.

Далее выписывается общий вид закона сохранения механической энергии для некоторого объема V сплошной среды:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_1 \frac{v_i^2}{2} dV + \int_V D_{ij}\sigma_{ij} dV = \int_S v_i t_i^{(\mathbf{n})} dS. \qquad (3)$$

Здесь ρ_1 — плотность среды; v_i — компоненты поля скорости сплошной среды; D_{ij} — составляющие тензора скоростей деформации; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; S — площадь поверхности, ограничивающей объем V; $t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij} n_j$ — составляющие вектора напряжения на элементарной площадке dS с единичной внешней нормалью $\mathbf{n}$, n_j — компоненты вектора $\mathbf{n}$. Нижними индексами i и j обозначаются соответствующие пространственные координаты. Соотношение (3) устанавливает связь между скоростью изменения полной механической энергии среды и мощностью поверхностных сил. Уравнение (3) используется применительно к радиальному схождению цилиндрической оболочки вязкой несжимаемой жидкости постоянной плотности ρ_1 к своей оси под действием давления $P \equiv \mathrm{const}$ сжатого политропного газа на ее внешней поверхности (давление на внутренней поверхности оболочки равно нулю).

Пусть в качестве вещества изучаемой цилиндрической оболочки служит однородная по плотности вязкая несжимаемая ньютоновская жидкость. Тогда для составляющих σ_{ij} тензора напряжений справедливо выражение

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu D_{ij},$$

где δ_{ij} – дельта-функция Кронекера [9], $\mu \equiv \mathrm{const}$ – коэффициент динамической вязкости. В случае цилиндрической симметрии $D_{rr} = \partial v/\partial r$, $D_{\varphi\varphi} = v/r$ (здесь φ – азимутальная координата), а все остальные $D_{ij} = 0$. Наконец, учитывая постоянство плотности ρ_1 и уравнение неразрывности (2), несложно получить, что $D_{ii} \equiv 0$, откуда

$$D_{ij}\sigma_{ij} = -PD_{ii} + 2\mu D_{ij}D_{ij} = \\ = 2\mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{v}{r}\right)^2\right] = 4\mu R^2\frac{\dot{R}^2}{r^4}. \tag{4}$$

На основании (4) и закона сохранения массы (1) уравнение (3) для единицы длины рассматриваемой вязкой цилиндрической оболочки в осевом направлении может быть записано в нижеследующей промежуточной форме:

$$\dot{E} + \frac{4\pi\mu C\dot{R}^2}{r_1^2} = -2\pi R\dot{R}P, \tag{5}$$

где $E \equiv \pi\rho_1\left(R\dot{R}\right)^2\ln\left(r_1/R\right)$ – кинетическая энергия, $\dot{E} \equiv dE/dt$.

Выражение (5) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка для функции $R(t)$ в (1). Если $P = 0$, то его один раз можно проинтегрировать [2]. Тогда соотношение (5) преобразуется к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, и из нее при нулевом давлении на внешней поверхности рассматриваемой вязкой цилиндрической оболочки вытекает интеграл от выражения (5) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (см. соотношения (4.4.6), (4.4.11) в работе [2]). Следует отметить, что, с точки зрения конструирования функции Ляпунова, система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка предпочтительнее обыкновенного дифференциального уравнения высокого порядка, поскольку набор способов построения функций Ляпунова гораздо богаче именно для систем, а не для отдельных уравнений [10]. Есть дополнительный аргумент в пользу перехода от соотношения (5) к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка – это уже сконструированная при изучении выражения (4.4.11) в [2] функция Ляпунова (см. соотношение (7) из работы [4]).

Сначала в уравнении (5) радиальная скорость $\dot{R}$ внутренней поверхности рассматриваемой цилиндрической оболочки выражается через кинетическую энергию E единицы длины данной оболочки в осевом направлении согласно выражению $\dot{R} = \sqrt{E}\Big/\left[R\sqrt{\pi\rho_1\ln\left(r_1/R\right)}\right]$:

$$\dot{E} + \frac{4\mu CE}{\rho_1\left(r_1R\right)^2\ln\left(r_1/R\right)} = -2P\sqrt{\frac{\pi E}{\rho_1\ln\left(r_1/R\right)}}. \tag{6}$$

Потом из соотношения (6) кинетическая энергия E исключается посредством подстановки $u \equiv \sqrt{E}$:

$$u\frac{du}{dR} = -\pi RP - \frac{2\nu Cu}{r_1^2R}\sqrt{\frac{\pi\rho_1}{\ln\left(r_1/R\right)}}. \tag{7}$$

Здесь u – новая искомая функция независимого переменного R, $\nu \equiv \mu/\rho_1$ – коэффициент кинематической вязкости.

Выражение (7) служит обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка – частным случаем уравнения Абеля второго рода [11]. На основании этого, в (7) осуществляется еще одна замена искомой функции $y \equiv u - 2\nu\sqrt{2\pi} \times \sqrt{\rho_1\ln\left(1 + C/R^2\right)}$, после чего оно заметно упрощается:

$$\left[y + 2\nu\sqrt{2\pi\rho_1\ln\left(1 + \frac{C}{R^2}\right)}\right]\frac{dy}{dR} = -\pi RP. \tag{8}$$

Если применить определения функций y, u и кинетической энергии E единицы длины вдоль оси исследуемой вязкой цилиндрической оболочки, то в выражении (8) может быть выполнен возврат от аргумента R к независимому переменному t и тем самым выведено первое соотношение искомой системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{y} = -\sqrt{\frac{2\pi}{\rho_1}}\frac{P}{\sqrt{\ln\left(1 + C/R^2\right)}} \tag{9}$$

(далее везде точка сверху означает полную производную искомой функции по времени). Второе уравнение можно установить при помощи определений функций u, y и кинетической энергии E. С одной стороны, $u = y + 2\nu\sqrt{2\pi\rho_1\ln\left(1 + C/R^2\right)}$, с другой — $u = \sqrt{E} = R\dot{R}\sqrt{\pi\rho_1 \ln(r_1/R)}$. Отсюда с учетом (1) находим

$$y + 2\nu\sqrt{2\pi\rho_1 \ln\left(1 + \frac{C}{R^2}\right)} = R\dot{R}\sqrt{\pi\rho_1 \ln\left(\frac{r_1}{R}\right)},$$

$$y + 2\nu\sqrt{2\pi\rho_1 \ln\left(1 + \frac{C}{R^2}\right)} = R\dot{R}\sqrt{\frac{\pi\rho_1}{2} \ln\left(1 + \frac{C}{R^2}\right)}$$

и окончательно

$$\dot{R} = \frac{y\sqrt{2}}{R\sqrt{\pi\rho_1 \ln\left(1 + C/R^2\right)}} + \frac{4\nu}{R}. \qquad (10)$$

В итоге выражение (5) преобразовано к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений (9), (10) первого порядка. Действительно, при $P = 0$ соотношение (9) редуцируется к выражению $\dot{y} = 0$, которое интегрируется: $y = C_1 \equiv \text{const}$. Вычисляя теперь постоянную C_1 по начальным данным

$$C_1 = \sqrt{\pi\rho_1}\left[R(0)\,\dot{R}(0) - 4\nu\right]\sqrt{\ln\frac{r_1(0)}{R(0)}},$$

а затем вместо искомой функции y подставляя ее в уравнение (10), можно продемонстрировать, что это уравнение на самом деле совпадает с соотношением (4.4.11) [2].

ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА И АБСОЛЮТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАДИАЛЬНОГО СХЛОПЫВАНИЯ ВЯЗКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Полагаем, что система двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (9), (10) обладает точным решением $y = \psi(t)$, $R = \chi(t)$, характеризующим радиальное схождение цилиндрической оболочки ($\chi(t) \geq 0, \dot{\chi}(t) < 0$) и отвечающим заданным начальным условиям $\chi(0) = R(0), \psi(0) = y(0)$. Выясним, устойчиво ли это решение относительно конечных цилиндрически симметричных возмущений $y'(t)$, $R'(t)$. Пусть $y \equiv \psi + y'$, $R \equiv \chi + R'$. Тогда для радиальных возмущений y' и R' получим систему уравнений

$$\dot{y}' = -\frac{P\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\rho_1 \ln\left(1 + C/[\chi + R']^2\right)}} - \dot{\psi},$$
$$\dot{R}' = \frac{(y' + \psi)\sqrt{2}}{(\chi + R')\sqrt{\pi\rho_1 \ln\left(1 + C/[\chi + R']^2\right)}} + \frac{4\nu}{\chi + R'} - \dot{\chi}. \qquad (11)$$

Соотношения (11) служат неавтономной нелинейной системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестной неавтономностью [12]. К сожалению, методы построения функций Ляпунова для подобных систем пока не разработаны. Однако в данном случае оказывается, что может быть использован метод конструирования функций Ляпунова, который был в свое время предложен Барбашиным при исследовании устойчивости нулевого решения одного подкласса автономных нелинейных систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [10]. Подстановкой $x \equiv y$, $y_1 \equiv -P\sqrt{2\pi/\rho_1 \ln\left(1 + C/R^2\right)}$ систему (9), (10) можно переписать в форме

$$\dot{x} = y_1, \quad \dot{y}_1 = -\frac{\rho_1 y_1^4}{2\pi^2 CP^3}\exp\left(\frac{2\pi P^2}{\rho_1 y_1^2}\right)x + \frac{2\nu\rho_1 y_1^3}{\pi CP^2}\exp\left(\frac{2\pi P^2}{\rho_1 y_1^2}\right). \qquad (12)$$

Нетрудно проверить, что соотношения (12) действительно являются представителем частного класса автономных нелинейных систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, изученного Барбашиным в его монографии [10]. Согласно [10], в качестве функции Ляпунова подходит выражение вида

$$w = \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}CP\exp\left(-\frac{2\pi P^2}{\rho_1 y_1^2}\right)$$

или в терминах y и R

$$w = \frac{y^2}{2} + \frac{\pi}{2}PR^2. \qquad (13)$$

Если продифференцировать функцию w (13) по времени вдоль решений системы (9), (10), то может быть получено соотношение

$$\dot{w} = 4\pi\nu P \equiv \text{const} > 0.$$

В [13] данный факт был применен, чтобы взять в качестве функции Ляпунова выражение

$$w_1 = \frac{y'}{2}(y' + 2\psi) + \frac{\pi}{2}PR'(R' + 2\chi). \qquad (14)$$

В самом деле, вычисляя производную функции w_1 (14) по ее аргументу t вдоль решений системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений (11) первого порядка, можно установить, что $\dot{w}_1 = 0$. Значит, $w_1 \equiv \text{const}$, т.е. функция w_1 (14) служит для системы (11) интегралом движения. Из этого следует, что функция Ляпунова может быть введена в виде

$$w_1 \equiv k^2 > 0 \quad (y' \neq 0, R' \neq 0),$$
$$w_1 = 0 \quad (y' = 0, R' = 0), \qquad (15)$$

где k — постоянная величина.

К сожалению, функция w_1 (14), (15) охватывает не все возможные начальные данные конечных цилиндрически симметричных возмущений y' и R' (11), поэтому удовлетворяет требованиям первой теоремы Ляпунова (теоремы об устойчивости) [7, 8, 10] не в полном объеме. В настоящей статье данный недостаток устраняется в несколько этапов.

Сначала функция w_1 (14) переопределяется на функцию

$$w_1 \equiv \left[\frac{y'}{2}\left(y' + 2\psi\right) + \frac{\pi}{2}PR'\left(R' + 2\chi\right)\right]^2. \tag{16}$$

Тогда условия (15) будут справедливы для всех конечных радиальных возмущений $y'(t)$ и $R'(t)$ (11), кроме тех не обоюдно нулевых из них, которые превращают в тождество соотношение

$$y'\left(y' + 2\psi\right) + \pi PR'\left(R' + 2\chi\right) = 0, \tag{17}$$

откуда

$$y' = -\psi \pm \sqrt{\psi^2 - \pi PR'\left(R' + 2\chi\right)}$$

либо

$$R' = -\chi + \sqrt{\chi^2 - \frac{y'}{\pi P}\left(y' + 2\psi\right)}.$$

Далее конечные цилиндрически симметричные возмущения $y'(t)$, $R'(t)$ (11) и (17) рассматриваются отдельно.

Во-первых, используя выражения (9), (10) с $y = \psi(t)$, $R = \chi(t)$ и (17), несложно показать, что система (11) сводится к одному уравнению, причем его роль может играть любое из уравнений (11). Принимая во внимание это обстоятельство, для дальнейшего изложения удобно выбрать уравнение с производной функции y' по времени.

Во-вторых, посредством соотношения (9) с функциями $y = \psi(t)$ и $R = \chi(t)$, можно записать первое уравнение системы (11) в более информативном виде

$$\dot{y}' = -P\sqrt{\frac{2\pi}{\rho_1}}\ln\left(\frac{1 + C/\chi^2}{1 + C/[\chi + R']^2}\right)\times$$
$$\times\frac{\left[\sqrt{\ln\left(1 + C/\chi^2\right)} + \sqrt{\ln\left(1 + C/[\chi + R']^2\right)}\right]^{-1}}{\sqrt{\ln\left(1 + C/\chi^2\right)\ln\left(1 + C/[\chi + R']^2\right)}}. \tag{18}$$

Данное уравнение свидетельствует о том, что если $R' \geq 0$, то $\dot{y}' \leq 0$, а если $R' < 0$, то $\dot{y}' > 0$.

В-третьих, учитывая (10), для функции $y = \psi(t)$ может быть получено соотношение

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi\rho_1}{2}}\left(\chi\dot{\chi} - 4\nu\right)\sqrt{\ln\left(1 + C/\chi^2\right)},$$

из которого следует, что в процессе радиального схлопывания изучаемой вязкой цилиндрической оболочки функция $\psi(t)$ все время остается отрицательной, поскольку $\chi(t) \geq 0$, $\dot{\chi}(t) < 0$.

Наконец, в-четвертых, из равенства (17) вытекает, что в соответствии с областью значений функции $R' \in [-\chi, +\infty)$, если $R' < 0$, то $y' > -2\psi$ или $y' < 0$, а если $R' \geq 0$, то $0 < y' \leq -2\psi$.

Суммируя установленные здесь факты, нетрудно прийти к выводу, что для уравнения (18) в качестве функции Ляпунова следует взять функцию

$$w_2 = y'^2. \tag{19}$$

Действительно, настоящая функция положительно определена. Вычисление производной функции (19) по ее аргументу t вдоль решений обыкновенного дифференциального уравнения (18) первого порядка дает $\dot{w}_2 = 2y'\dot{y}'$. Отсюда для конечных цилиндрически симметричных возмущений $y'(t)$ и $R'(t)$ с неравенствами $R' < 0$, $y' < 0$, $\dot{y}' > 0$ эта производная отрицательна, при $R' \geq 0$, $0 < y' \leq -2\psi$, $\dot{y}' \leq 0$ она неположительна, а при $R' < 0$, $y' > -2\psi$, $\dot{y}' > 0$ она положительна.

В отличие от [13], здесь рассмотрены все возможные начальные данные конечных радиальных возмущений y' и R' (11). Построена функция Ляпунова w_2 (19), полностью удовлетворяющая всем требованиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [8], при этом вне зависимости от того, как конкретно выглядит точное решение $y = \psi(t)$, $R = \chi(t)$ системы (9), (10) двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Таким образом, с помощью функции Ляпунова w_2 (19) доказано, что цилиндрически симметричное схождение $y = \psi(t)$, $R = \chi(t)$ цилиндрической оболочки вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости постоянной плотности ρ_1 под внешним давлением $P \equiv \text{const}$ сжатого политропного газа в самом деле абсолютно неустойчиво по отношению к конечным радиальным возмущениям $y'(t)$, $R'(t)$ (11) и (17) с условиями $R' < 0$, $y' > -2\psi$, $\dot{y}' > 0$. Значит, неограниченный рост со временем центростремительной скорости $\dot{R}$ внутренней поверхности исследуемой вязкой цилиндрической оболочки в процессе радиального ее схлопывания к своей геометрической оси, который вызывал бы кумуляцию кинетической энергии заполняющей оболочку жидкости, действительно возникает исключительно на его импульсной стадии. Данное обстоятельство целиком подтверждает и математически строго обосновывает соответствующую гипотезу Тришина, выдвинутую им в [2].

Кстати, хотя из системы (9), (10) при $P = 0$ уравнение (4.4.11) из [2] вытекает, функция Ляпунова (см. соотношение (7) в статье [4]) из функций w_1 (14), (16), w_2 (19) не следует. Причина этого в том, что внешнее давление P присутствует в дифференциальном операторе уравнения (9).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача нелинейной устойчивости радиального схождения цилиндрической оболочки, которая наполнена однородной по плотности вязкой несжимаемой ньютоновской жидкостью, относительно радиальных возмущений. Данная задача решалась в рамках нескольких уточняющих ее формулировку допущений: 1) внутри изучаемой оболочки пустота; 2) снаружи ее окружает слой сжатого политропного газа, являющегося продуктом мгновенной детонации мощного конденсированного ВВ и воздействующего на внешнюю поверхность оболочки ненулевым постоянным давлением; 3) за слоем газа опять имеется вакуум. Посредством прямого метода Ляпунова обнаружена абсолютная неустойчивость цилиндрически симметричного схлопывания исследуемой вязкой цилиндрической оболочки по отношению к конечным возмущениям той же симметрии. Сконструирована функция Ляпунова, которая отвечает всем требованиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, независимо от режима радиального схождения оболочки. Следовательно, согласно предположению Тришина, кумуляция кинетической энергии вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости постоянной плотности в процессе цилиндрически симметричного схлопывания рассматриваемой цилиндрической оболочки к своей геометрической оси симметрии возникает исключительно на его импульсном этапе.

С физической точки зрения, финальный вывод о том, что кумуляция кинетической энергии вязкой жидкости в ходе радиального схлопывания $y = \psi(t)$, $R = \chi(t)$ полой цилиндрической оболочки реализуется именно на его импульсной стадии, когда для конечных радиальных возмущений y', R' (11) и (17) выполняются неравенства $R' < 0$, $y' > -2\psi$, $\dot{y}' > 0$, открывает перспективы по овладению управлением данным процессом. В самом деле, если условие $y' > -2\psi$ справедливо, то в течение импульсного этапа изучаемая оболочка успеет схлопнуться. Напротив, если $y' \le -2\psi$, то за время импульсной стадии полного схождения оболочки не произойдет. Следовательно, условие $y' > -2\psi$ может трактоваться как своего рода критерий появления кумуляции кинетической энергии жидкости на импульсном этапе схлопывания рассматриваемой оболочки. Другими словами, обеспечение истинности или ложности неравенства $y' > -2\psi$ – это и есть ключ к созданию конкретных механизмов управления кумуляцией в процессе схождения подобных оболочек.

Вышеизложенное свидетельствует о том, что цилиндрически симметричное схлопывание цилиндрической оболочки, содержащей в себе однородную по плотности вязкую несжимаемую ньютоновскую жидкость, заслуживает пристального внимания, требует изучения и обладает огромными возможностями для широкого круга приложений в науке, технике и промышленности.

Авторы выражают искреннюю признательность М. Годену–Буатару (Национальный французский университет гражданской авиации, г. Тулуза, Франция), который в июне–сентябре 2016 г. проходил научную стажировку под руководством Ю.Г. Губарева, за участие и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Забабахин Е.И., Забабахин И.Е.* Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988. 173 с.
2. *Тришин Ю.А.* Физика кумулятивных процессов. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2005. 324 с.
3. *Якушев В.В., Уткин А.В., Жуков А.Н., Шахрай Д.В., Ким В.В.* Определение *P,T*-условий, реализующихся при высокотемпературном ударном сжатии нитрида кремния в плоских ампулах сохранения // ТВТ. 2016. Т. 54. № 2. С. 210.
4. *Губарев Ю.Г., Соколов Н.А.* К устойчивости инерционного схлопывания оболочек, наполненных вязкой жидкостью // ИФЖ. 2012. Т. 85. № 2. С. 295.
5. *Матюшкин Н.И., Тришин Ю.А.* Взрывное испарение вещества вязкой цилиндрической оболочки при ее схлопывании к центру // Письма в ЖТФ. 1977. Т. 3. С. 455.
6. *Матюшкин Н.И., Тришин Ю.А.* О некоторых эффектах, возникающих при взрывном обжатии вязкой цилиндрической оболочки // ПМТФ. 1978. № 3. С. 99.
7. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 471 с.
8. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
9. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 264 с.
10. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
11. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
12. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2007. 448 с.
13. *Fursova D.A., Gubarev Yu.G.* On Stability of Radial Collapse of Cylindrical Shell Filled with Viscous Incompressible Fluid // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1268. P. 012072-1.