

УДК 536.2.001

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ИССЛЕДОВАНИЯМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЧАСТИЧНО ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ

© 2020 г. Э. М. Карташов\*

*Российский технологический университет-МИРЭА  
(Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова), Москва, Россия*

*\*E-mail: kartashov@mitht.ru*

Поступила в редакцию 22.11.2019 г.

После доработки 06.12.2019 г.

Принята к публикации 24.12.2019 г.

Развита математическая теория построения интегральных преобразований для частично ограниченных областей: пространство с внутренней цилиндрической полостью в цилиндрических координатах (радиальный поток теплоты); пространство с внутренней сферической полостью в сферических координатах (центральная симметрия); пространство, ограниченное плоской поверхностью в декартовых координатах. Предложены выражения для интегральных преобразований, изображений оператора Лапласа, обращений для изображений. Сформулированный подход отличается от классической теории дифференциальных уравнений математической физики построения интегральных преобразований с непрерывным спектром собственных значений, основанной на соответствующих сингулярных задачах Штурма–Лиувилля. В основе предлагаемого метода лежат операционные решения исходных краевых задач нестационарной теплопроводности с неоднородной начальной функцией и однородными граничными условиями. Сформулированный подход позволил одновременно развить метод функций Грина и построить интегральные представления аналитических решений краевых задач через функции Грина и неоднородности в основном уравнении и краевых условиях задачи. Предложенные функциональные соотношения могут быть использованы при рассмотрении многочисленных частных случаев практической теплофизики. Приведены примеры приложения представленных результатов в ряде областей науки и техники.

DOI: 10.31857/S0040364420030084

### ВВЕДЕНИЕ

Современные конструкционные материалы, представляющие собой совокупность микро- или наноструктурных материалов, называют структурно-чувствительными. Создание таких материалов с помощью нанотехнологий — важное направление развития современного материаловедения, так как они обладают уникальными физико-механическими свойствами, позволяющими эффективно их использовать в конструкциях, подверженных высокоинтенсивным внешним воздействиям [1, 2]. Важным этапом в создании и использовании подобных материалов является построение соответствующих математических моделей, позволяющих описать их поведение в широком диапазоне изменения внешних нагрузений. Общая методология построения и исследования таких моделей еще далека от завершения и требует дальнейшего развития. Это относится в первую очередь к математическим моделям ряда физических процессов, которые базируются на принципе локального термодинамического равновесия и гипотезе сплошной сре-

ды [2]. В качестве составляющей в таких моделях часто присутствует температурная часть в виде соответствующей краевой задачи теплопроводности в условиях нестационарного нагрева или охлаждения.

Можно выделить широкий класс задач [3, 4], в которых сочетание теплофизических свойств материалов, геометрических размеров конструкций и интересующая исследователя тепловая реакция тела касаются тонкого поверхностного слоя, называемого термическим. Даже в условиях высоких скоростей поверхностного нагрева или охлаждения с удалением от граничной поверхности в глубь тела температуры затухают, и это затухание с увеличением глубины происходит так интенсивно, что температурное состояние твердого тела оказывается заметным лишь в термическом слое, в котором как раз и сосредоточено основное количество теплоты, поглощенной во времена, близкие к началу нагрева. Так как толщина поверхностного слоя мала по сравнению с размерами тела, то в этих случаях твердое тело можно моделировать полуограниченной областью, например

упругим полупространством  $z \geq 0$ . Последнее позволяет получать более наглядные и удобные с точки зрения практического использования аналитические решения задач нестационарной теплопроводности. В тех случаях, когда необходимо учесть влияние кривизны поверхности твердого тела на температуру в термическом слое, решается нестационарная задача теплопроводности для пространства с внутренней цилиндрической полостью или пространства с внутренней сферической полостью. Специфика такого рода задач заключается, с одной стороны, в относительной простоте исходных математических моделей, с другой — вычислительных трудностях реализации принятой схемы получения искомого результата и при этом очевидной значимостью применения полученных соотношений в многочисленных практических ситуациях [4]. Для частично ограниченных областей наиболее перспективный путь в разработке аналитических подходов при изучении перечисленных случаев — развитие соответствующей теории интегральных преобразований.

Метод интегральных преобразований как для ограниченных областей канонического типа (пластина, цилиндр, шар), так и для частично ограниченных областей незамемим при решении аналитических линейных задач переноса (теплоты и массы) с неоднородностями общего вида в основном уравнении и краевых условиях (начальном и граничных). Основное достоинство этого метода — вычисление по несложному алгоритму, включающему интегральное преобразование, формулу обращения для него и изображение оператора Лапласа. Основы метода были заложены в середине прошлого столетия в трудах Г.А. Гринберга [5], Н.С. Кошлякова [6], А.В. Лыкова [3]. Исторически этот метод, основанный на получении для спектральных задач собственных значений и собственных функций, возник позднее метода разделения переменных, а метод конечных интегральных преобразований появился лишь недавно (в середине 30-х гг. прошлого столетия). В последующие годы данный метод получил дальнейшее развитие как в теоретическом [7, 8], так и в прикладном отношении [9–11]. Несмотря на достигнутые результаты в этой области, ряд вопросов остается до сих пор малоизученным и требует дальнейшего рассмотрения. К ним относятся: построение интегральных преобразований и формул обращений для них в уравнениях параболического типа в области  $\Omega_1 = (r > r_0, t > 0)$  с радиальным потоком теплоты  $T = T(r, t)$  (пространство с внутренней цилиндрической полостью), в области  $\Omega_2 = (r > r_0, t > 0)$  в условиях центральной симметрии  $T = T(r, t)$  (пространство с внутренней сферической полостью), в области  $\Omega_3 = (x > 0, t > 0)$  с условием теплообмена на гра-

нице области (пространство, ограниченное изнутри плоской поверхностью).

Традиционный подход на основе классических представлений математической физики, связанный со сложными вычислениями спектральных функций задачи Штурма—Лиувилля [6, 9], затрудняет построение как самого интегрального преобразования, так и формулы обращения для него. Решению этой проблемы посвящена настоящая публикация. Излагается новый (самостоятельный) подход построения таких преобразований и формул обращения для них, который основан на предварительном нахождении операционного решения исходной задачи с неоднородной начальной функцией и однородными граничными условиями. При этом значительно сокращаются вычислительные затраты по сравнению с известными расчетными схемами [7–10], а в ряде случаев использование предлагаемого подхода (в частности, для области  $\Omega_2$ ) приводит к результатам, неизвестным ранее.

#### ОБЛАСТЬ $\Omega_1 = (r > r_0, t > 0)$

Исследование тепловой реакции на нагрев или охлаждение массивного тела с внутренней цилиндрической полостью важно для многих приложений: в частности, при изучении температурного режима в стволе нефтяной скважины и зоны оттаивания окружающих многолетнемерзлых пород для диагностики состояния скважин и выбора оптимального режима их эксплуатации; при расчете периодически изменяющихся температур (и соответствующих термических напряжений) в стенках цилиндров паровых машин и двигателей внутреннего сгорания; в теории волноводов при исследовании влияния величины изменения поперечного сечения цилиндрического проводника на температурную волну в окружающем пространстве; при изучении распространения теплоты от проложенных в земле кабелей и труб; при изучении режима охлаждения шахт и т.д. (ссылки в [4]).

Несмотря на практическую важность, в теплофизике область указанной формы начали изучать сравнительно недавно и к настоящему времени соответствующий математический аппарат в теории интегральных преобразований развит совершенно недостаточно. Отдельные простейшие случаи при постоянных условиях нагрева изучал Грантер [12]; Титчмарш [13] использовал интеграл Фурье—Ханкеля для первой краевой задачи; Фатыхов и Смирнов [14] использовали обобщенное интегральное преобразование Вебера для второй краевой задачи; Аттетков и Волков [15] анализировали собственные функции сингулярной задачи Штурма—Лиувилля для построения теории при решении третьей краевой задачи. В [16] автор рассмотрел теорию интегральных преобразований для обобщенного уравнения не-

стационарной теплопроводности в  $\Omega$  (пластина, цилиндр, шар), однако результат для третьей краевой задачи требует уточнения.

**Первая краевая задача.** Развиваемый подход вначале подробно рассмотрим для первой краевой задачи вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > r_0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$T(r, t)|_{t=0} = f(r), \quad r \geq r_0, \quad (2)$$

$$T(r, t)|_{r=r_0} = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$|T(r, t)| < \infty, \quad r \geq r_0, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

В пространстве изображений по Лапласу  $\bar{T}(r, p) = \int_0^\infty \exp(-pt)T(r, t)dt$  решение преобразованной задачи (1)–(4)

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{T}}{dr} - (p/a) \bar{T} = -\frac{1}{a} f(r), \quad r > r_0,$$

$$\bar{T}(r, p)|_{r=r_0} = 0, \quad |\bar{T}(r, p)| < \infty, \quad r \geq r_0$$

записывается как

$$\begin{aligned} \bar{T}(r, p) = & \frac{1}{a} \left\{ I_0(r\sqrt{p/a}) \int_r^\infty \rho f(\rho) K_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho + \right. \\ & \left. + K_0(r\sqrt{p/a}) \int_{r_0}^r \rho f(\rho) I_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho \right\} - \\ & - \frac{1}{a} \left\{ \frac{I_0(r_0\sqrt{p/a})}{K_0(r_0\sqrt{p/a})} K_0(r\sqrt{p/a}) \int_r^\infty \rho f(\rho) K_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $K_0(z)$ ,  $I_0(z)$  – модифицированные функции Бесселя. Для нахождения оригинала изображения (5) используем теорему обращения в виде контурного интеграла Римана–Меллина [1]

$$T(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(pt) \bar{T}(r, p) dp \quad (p = \sigma + i\omega). \quad (6)$$

При вычислении контурного интеграла (6) по известной процедуре [1, 7] используются соотношения для функций Бесселя вида

$$K_0(iz) = -(\pi i/2)[J_0(z) - iY_0(z)],$$

$$K_0(-iz) = (\pi i/2)[J_0(z) + iY_0(z)],$$

$$I_0(\pm iz) = J_0(z),$$

где  $J_0(z)$ ,  $Y_0(z)$  – функции Бесселя.

После ряда вычислений получается соотношение

$$\begin{aligned} T(r, t) = & \int_0^\infty \frac{\Psi_1(\lambda r) \exp(-a\lambda^2 t)}{J_0^2(\lambda r_0) + Y_0^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda \times \\ & \times \int_{r_0}^\infty f(\rho) \Psi_1(\lambda \rho) \rho d\rho, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Psi_1(\lambda r) = J_0(\lambda r)Y_0(\lambda r_0) - Y_0(\lambda r)J_0(\lambda r_0).$$

При  $t = 0$  из (7) находим

$$\begin{aligned} f(r) = & \int_0^\infty \frac{\Psi_1(\lambda r)}{J_0^2(\lambda r_0) + Y_0^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda \times \\ & \times \int_{r_0}^\infty f(\rho) \Psi_1(\lambda \rho) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (8)$$

Полученное соотношение (8) можно записать как

$$f(r) = \int_0^\infty \frac{\bar{f}(\lambda) \Psi_1(\lambda r)}{J_0^2(\lambda r_0) + Y_0^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda, \quad (9)$$

если

$$\bar{f}(\lambda) = \int_{r_0}^\infty f(\rho) \Psi_1(\lambda \rho) \rho d\rho. \quad (10)$$

Таким образом, на основании соотношений (9), (10) можно сделать вывод о том, что построено интегральное преобразование функции  $T(r, t)$

$$\bar{T}(\lambda, t) = \int_{r_0}^\infty T(\rho, t) \Psi_1(\lambda \rho) \rho d\rho$$

с формулой обращения

$$T(r, t) = \int_0^\infty \frac{\bar{T}(\lambda, t) \Psi_1(\lambda r)}{J_0^2(\lambda r_0) + Y_0^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda.$$

При этом изображение оператора справа в (1) имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{r_0}^\infty \Delta T(\rho, t) \Psi_1(\lambda \rho) \rho d\rho = \\ & = -\frac{2}{\pi} T(r, t) \Big|_{r=r_0} - \lambda^2 \bar{T}(\lambda, t). \end{aligned}$$

**Вторая краевая задача.** Операционное решение второй краевой задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > r_0, \quad t > 0,$$

$$T(r, t)|_{t=0} = f(r), \quad r \geq r_0, \quad \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0,$$

$$t > 0, \quad |T(r, t)| < \infty, \quad r \geq r_0, \quad t \geq 0$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{T}(r, p) = & \frac{1}{a} \left\{ I_0(r\sqrt{p/a}) \int_r^\infty \rho f(\rho) K_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho + \right. \\ & \left. + K_0(r\sqrt{p/a}) \int_{r_0}^r \rho f(\rho) I_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho + \right. \\ & \left. + \frac{I_1(r_0\sqrt{p/a})}{K_1(r_0\sqrt{p/a})} K_0(r\sqrt{p/a}) \int_r^\infty \rho f(\rho) K_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho \right\}. \end{aligned}$$

Повторяя приведенную выше схему вычислений, приходим к интегральному преобразованию функции  $T(r, t)$  для второй краевой задачи:

$$\bar{T}(\lambda, t) = \int_{r_0}^{\infty} \rho \Psi_2(\lambda \rho) T(\rho, t) d\rho$$

с формулой обращения

$$T(r, t) = \int_0^{\infty} \frac{\Psi_2(\lambda r) \bar{T}(\lambda, t) \lambda d\lambda}{J_1^2(\lambda r_0) + Y_1^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda,$$

где

$$\Psi_2(\lambda r) = J_0(\lambda r) Y_1(\lambda r_0) - Y_0(\lambda r) J_1(\lambda r_0).$$

При этом  $\int_{r_0}^{\infty} \Delta T(\rho, t) \Psi_2(\lambda \rho) \rho d\rho = \frac{2}{\pi \lambda} \left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_0} - \lambda^2 \bar{T}(\lambda, t).$

**Третья краевая задача.** Операционное решение третьей краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > r_0, \quad t > 0, \\ T(r, t)|_{t=0} &= f(r), \quad r \geq r_0, \\ \left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_0} &= h T(r, t)|_{r=r_0}, \quad t > 0, \\ |T(r, t)| &< \infty, \quad r \geq r_0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{T}(r, p) &= \frac{1}{a} \left\{ I_0(r\sqrt{p/a}) \int_r^{\infty} \rho f(\rho) K_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho + \right. \\ &+ K_0(r\sqrt{p/a}) \int_{r_0}^r \rho f(\rho) I_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho + \\ &+ \frac{\sqrt{p/a} I_1(r_0\sqrt{p/a}) - h I_0(r_0\sqrt{p/a})}{\sqrt{p/a} K_1(r_0\sqrt{p/a}) + h K_0(r_0\sqrt{p/a})} K_0(r\sqrt{p/a}) \times \\ &\left. \times \int_{r_0}^{\infty} \rho f(\rho) K_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущим двум задачам находим интегральное преобразование функции  $T(r, t)$  для случая третьей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \bar{T}(\lambda, t) &= \int_{r_0}^{\infty} T(\rho, t) \Psi_3(\lambda \rho) \rho d\rho, \\ \Psi_3(\lambda r) &= [J_0(\lambda r) Y_1(\lambda r_0) - Y_0(\lambda r) J_1(\lambda r_0)] + \\ &+ (h/\lambda) [J_0(\lambda r) Y_0(\lambda r_0) - Y_0(\lambda r) J_0(\lambda r_0)]. \end{aligned}$$

Формула обращения имеет вид

$$T(r, t) = \int_0^{\infty} \frac{\bar{T}(\lambda, t) \Psi_3(\lambda r)}{[J_1(\lambda r_0) + (h/\lambda) J_0(\lambda r_0)]^2 + [Y_1(\lambda r_0) + (h/\lambda) Y_0(\lambda r_0)]^2} \times \lambda d\lambda,$$

при этом

$$\begin{aligned} &\int_{r_0}^{\infty} \Delta T(\rho, t) \Psi_3(\lambda \rho) \rho d\rho = \\ &= \frac{2}{\pi \lambda} \left[ \left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_0} - h T(r, t) \right] - \lambda^2 \bar{T}(\lambda, t). \end{aligned}$$

Приведенными интегральными соотношениями можно пользоваться при условии, что  $f(r)$  – функция с ограниченным изменением в окрестности точки  $r$  и интеграл

$$\int_{r_0}^{\infty} \rho |f(\rho)| d\rho$$

абсолютно сходится.

Следующий этап исследований – запись интегральных соотношений для аналитических решений краевых задач вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + F(r, t), \quad r > r_0, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$T(r, t)|_{t=0} = \Phi_0(r), \quad r \geq r_0, \quad (12)$$

$$\left[ \beta_1 \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + \beta_2 T(r, t) \right]_{r=r_0} = \beta_3 \varphi(t), \quad t > 0, \quad (13)$$

$$|T(r, t)| < \infty, \quad r \geq r_0, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

Соотношение (13) содержит все три граничных условия при соответствующих значениях коэффициентов  $\beta_i (i = 1, 2, 3) (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 > 0)$ . Используя подход, развитый автором в [1], приходим к искомому соотношению

$$\begin{aligned} T(r, t) &= \int_{r_0}^{\infty} r' T(r', 0) G(r, r', t) dr' + \\ &+ ar_0 \int_0^t \left[ T(r', \tau) \frac{\partial G(r, r', t - \tau)}{\partial r'} - \right. \\ &- \left. G(r, r', t - \tau) \frac{\partial T(r', \tau)}{\partial r'} \right]_{r'=r_0} d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{r_0}^{\infty} r' G(r, r', t - \tau) F(r', \tau) d\tau dr'. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $G(r, r', t - \tau)$  – функция Грина соответствующей краевой задачи (11)–(14), удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \right), \quad r > r_0, \quad t > \tau, \quad (16)$$

$$G(r, r', t - \tau) \Big|_{r=\tau} = \frac{1}{r} \delta(r - r'), \quad (r, r') > r_0, \quad (17)$$

$$\left( \beta_1 \frac{\partial G}{\partial r} + \beta_2 G \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad t > \tau, \quad (18)$$

$$|G(r, r', t - \tau)| < \infty, \quad r > r_0, \quad t > \tau. \quad (19)$$

Развитая теория интегральных преобразований позволяет выписать все функции Грина на основе решения задачи (16)–(19):

функция Грина первой краевой задачи ( $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$ )

$$G(r, r', t - \tau) = \int_0^\infty \frac{\exp[-a\lambda^2(t - \tau)] \Psi_1(\lambda r) \Psi_1(\lambda r')}{J_0^2(\lambda r_0) + Y_0^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda, \quad (20)$$

функция Грина второй краевой задачи ( $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$ )

$$G(r, r', t - \tau) = \int_0^\infty \frac{\exp[-a\lambda^2(t - \tau)] \Psi_2(\lambda r) \Psi_2(\lambda r')}{J_1^2(\lambda r_0) + Y_1^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda, \quad (21)$$

функция Грина третьей краевой задачи ( $\beta_1/\beta_2 = -h$ )

$$G(r, r', t - \tau) = \int_0^\infty \frac{\exp[-a\lambda^2(t - \tau)] \Psi_3(\lambda r) \Psi_3(\lambda r')}{[J_1(\lambda r_0) + (h/\lambda)J_0(\lambda r_0)]^2 + [Y_1(\lambda r_0) + (h/\lambda)Y_0(\lambda r_0)]^2} \lambda d\lambda, \quad (22)$$

где  $\Psi_i(\lambda r) (i = 1, 2, 3)$  приведены выше.

Предложенные соотношения (15), (20)–(22) – новые результаты в аналитической теории нестационарного теплопереноса, практическая значимость которых очевидна. Они могут быть использованы в численных экспериментах для многих частных случаев краевых функций в (11)–(14): импульсных, пульсирующих, периодических, аperiodических, кусочно-постоянных и т.д. Разумеется, эти соображения не исключают прямого применения развитой теории интегральных преобразований, а только дополняют представленный математический аппарат для всестороннего изучения указанной области  $\Omega_1$ .

ОБЛАСТЬ  $\Omega_2 = (r > r_0, t > 0)$

Предлагаемые далее соотношения являются новыми в аналитической теплофизике для уравнения

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > r_0, \quad t > 0 \quad (23)$$

для сферических координат в условиях центральной симметрии. Применяя изложенную выше методику для уравнения (23) с неоднородной начальной функцией и однородными граничными условиями, приходим к искомым соотношениям в теории интегральных преобразований, включающим интегральное преобразование, формулу обращения для него, изображение оператора Лапласа  $\Delta T(r, t)$  (справа в (23)).

**Первая краевая задача:**

$$\bar{T}(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{r_0}^\infty r T(r, t) \sin \lambda(r - r_0) dr, \quad (24)$$

$$T(r, t) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{T}(\lambda, t) \sin \lambda(r - r_0) d\lambda,$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{r_0}^\infty r \Delta T(r, t) \sin \lambda(r - r_0) dr = \\ & = \sqrt{\frac{2}{\pi}} r_0 \lambda T(r, t) \Big|_{r=r_0} - \lambda^2 \bar{T}(\lambda, t). \end{aligned} \quad (25)$$

**Вторая краевая задача:**

$$\begin{aligned} \bar{T}(\lambda, t) = & \\ = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{r_0}^\infty r T(r, t) [\sin \lambda(r - r_0) + \lambda r_0 \cos \lambda(r - r_0)] dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(r, t) = & \\ = & \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{[\sin \lambda(r - r_0) + \lambda r_0 \cos \lambda(r - r_0)]}{(1 + \lambda^2 r_0^2)} \bar{T}(\lambda, t) d\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{r_0}^\infty r \Delta T(r, t) [\sin \lambda(r - r_0) + \lambda r_0 \cos \lambda(r - r_0)] d\lambda = \\ & = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda r_0^2 \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} - \lambda^2 \bar{T}(\lambda, t). \end{aligned}$$

Третья краевая задача:

$$\begin{aligned} \bar{T}(\lambda, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{r_0}^{\infty} r T(r, t) [\lambda r_0 \cos \lambda(r - r_{0h}) + \\ &+ (1 + r_0 h) \sin \lambda(r - r_0)] dr, \\ T(r, t) &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{[\lambda r_0 \cos \lambda(r - r_0) + (1 + r_0 h) \sin \lambda(r - r_0)]}{(1 + r_0 h)^2 + (\lambda r_0)^2} \times \\ &\times \bar{T}(\lambda, t) d\lambda, \\ &\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{r_0}^{\infty} r \Delta T(r, t) [\lambda r_0 \cos \lambda(r - r_0) + \\ &+ (1 + r_0 h) \sin \lambda(r - r_0)] dr = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda r_0^2 \left[ \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} - h T(r, t) \right]_{r=r_0} - \lambda^2 \bar{T}(\lambda, t). \end{aligned}$$

Рассмотрим пример решения уравнения (23) с начальной функцией  $T(r, 0) = f(r)$ ,  $r \geq r_0$ , однородным граничным условием  $T(r_0, t) = 0$ ,  $t > 0$  и условием ограниченности  $|T(r, t)| < \infty$ ,  $r \geq r_0$ ,  $t \geq 0$ . С помощью (24), (25) приходим к задаче Коши

$$d\bar{T}/dt + (\sqrt{a}\lambda)^2 \bar{T} = 0, \quad t > 0$$

с начальным условием  $\bar{T}(\lambda, 0) = \bar{f}(\lambda)$ , где  $\bar{f}(\lambda)$  – изображение, записанное в виде (24). Находим  $\bar{T}(\lambda, t)$  и по формуле обращения записываем искомый интеграл

$$\begin{aligned} T(r, t) &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{r_0}^{\infty} \bar{f}(\lambda) \exp[-(\sqrt{a}\lambda)^2 t] \sin \lambda(r - r_0) d\lambda = \\ &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{r_0}^{\infty} r' f(r') dr' \int_0^{\infty} \exp[-(\sqrt{a}\lambda)^2 t] \times \\ &\times \sin \lambda(r - r_0) \sin \lambda(r' - r_0) d\lambda = \quad (26) \\ &= \frac{1}{2r\sqrt{\pi a t}} \int_{r_0}^{\infty} r' f(r') \left\{ \exp\left[-\frac{(r - r')^2}{4at}\right] - \right. \\ &\left. - \exp\left[-\frac{(r + r' - 2r_0)^2}{4at}\right] \right\} dr'. \end{aligned}$$

Заметим, что решение задачи в виде (26) приведено в [4]. Если для уравнения (23) задается граничное условие  $T(r_0, t) = \varphi(t)$ ,  $t > 0$ , то к правой части (26) необходимо прибавить слагаемое

$$\frac{2a}{r\sqrt{\pi}} \int_{(r-r_0)/2\sqrt{at}}^{\infty} \varphi \left[ t - \frac{(r - r_0)^2}{4a\lambda^2} \right] \exp(-\lambda^2 t) d\lambda. \quad (27)$$

В частности, при нулевой начальной температуре и постоянной температуре поверхности  $T_c$  решение имеет вид

$$T(r, t) = \frac{r_0 T_c}{r} \Phi^* \left( \frac{r - r_0}{2\sqrt{at}} \right),$$

где  $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$ ,  $\Phi(z)$  – функция Лапласа.

Традиционные подходы нахождения решения (26), (27) потребовали бы длительных громоздких вычислений.

### ОБЛАСТЬ $\Omega_3 = (x > 0, t > 0)$

Рассматривается теория интегральных преобразований для указанной области в декартовых координатах с условием теплообмена на границе с учетом, что этот вопрос до сих пор не получил отчетливого изложения. Выбор данной области с граничным условием третьего рода имеет важное значение для многих практических приложений [4], в частности: в вопросах исследования нестационарного характера теплового слоя при пузырьковом кипении и турбулентном теплопереносе с помощью модели проникновения; при изучении процессов теплопроводности в рабочих лопатках газовых турбин в одномерном пространственном приближении; при исследовании температуры коры Земли, периодически нагреваемой Солнцем; в теории автоматических систем регулирования температуры; при теплопередаче через тонкую поверхностную пленку в условиях вынужденной конвекции или излучения и т.д.

Пусть  $T(x, t)$  – температурное поле в  $\Omega$ ,  $\Phi_0(x)$  – начальная температура,  $h$  – коэффициент теплообмена границы области со средой с температурой  $T_c = \text{const}$ . Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} z &= x/l, \quad \tau = at/l^2, \quad \text{Bi} = hl, \\ f(z) &= \frac{\Phi_0(x) - T_0}{T_c - T_0}, \quad W(z, \tau) = \frac{T(x, t) - T_0}{T_c - T_0}, \quad (28) \end{aligned}$$

где  $T_0, l$  – масштабные величины.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \quad z > 0, \quad \tau > 0, \quad (29)$$

$$W(z, \tau)|_{\tau=0} = f(z), \quad z \geq 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = \text{Bi} W|_{z=0}, \quad \tau > 0, \quad (31)$$

$$|W(z, \tau)| < \infty, \quad z \geq 0, \quad \tau \geq 0.$$

Как указывалось, принципиальным моментом в развитии подхода является наличие в (31) однородного граничного условия. После построения интегрального преобразования формулы обращения для него и изображения оператора Лапласа

указанное ограничение в (31) снимается. Предполагается также, что все функции в (28)–(31) достаточно гладкие и все формальные операции оправданны. Введем новую функцию

$$U(z, \tau) = W(z, \tau) - \frac{1}{\text{Bi}} \frac{\partial W(z, \tau)}{\partial z}. \quad (32)$$

Тогда имеем для нее задачу

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad z > 0, \quad \tau > 0, \quad (33)$$

$$U(z, \tau)|_{\tau=0} = f(z) - \frac{1}{\text{Bi}} \frac{df(z)}{dz}, \quad z \geq 0, \quad (34)$$

$$U(z, \tau)|_{z=0} = 0, \quad \tau > 0, \quad (35)$$

$$|U(z, \tau)| < \infty, \quad z \geq 0, \quad \tau \geq 0. \quad (36)$$

Операционный метод приводит к решению задачи (33)–(36) в виде

$$\begin{aligned} U(z, \tau) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty f(z') \left\{ \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4\tau}\right] - \right. \\ & \left. - \exp\left[-\frac{(z+z')^2}{4\tau}\right] \right\} dz' - \frac{1}{2\text{Bi}\sqrt{\pi\tau}} \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{df(z')}{dz'} \left\{ \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4\tau}\right] - \right. \\ & \left. - \exp\left[-\frac{(z+z')^2}{4\tau}\right] \right\} dz' = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty f(z') \times \\ & \times \left\{ \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4\tau}\right] - \exp\left[-\frac{(z+z')^2}{4\tau}\right] \right\} dz' + \\ & + \frac{1}{2\text{Bi}\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty f(z') \left\{ -\frac{(z-z')}{2\tau} \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4\tau}\right] + \right. \\ & \left. + \frac{(z+z')}{2\tau} \exp\left[-\frac{(z+z')^2}{4\tau}\right] \right\} dz'. \end{aligned} \quad (37)$$

Используем далее соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4\tau}\right] &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\xi^2\tau) \cos \xi(z-z') d\xi, \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \frac{(z-z')}{2\tau} \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4\tau}\right] &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \xi \exp(-\xi^2\tau) \sin \xi(z-z') d\xi. \end{aligned}$$

Тогда решение (37) запишется в виде

$$\begin{aligned} U(z, \tau) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(z') dz' \int_0^\infty \exp(-\xi^2\tau) \sin \xi z' \sin \xi z d\xi + \\ & + \frac{1}{\text{Bi}} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(z') dz' \int_0^\infty \xi \exp(-\xi^2\tau) \sin \xi z \cos \xi z' d\xi. \end{aligned} \quad (38)$$

Находим из (32), учитывая (31),

$$W(z, \tau) = \text{Bi} \int_0^\infty U(z+y, \tau) \exp(-\text{Bi}y) dy. \quad (39)$$

Подставляя (38) в (39) и вычисляя внутренние интегралы, находим

$$\begin{aligned} W(z, \tau) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\xi^2\tau) \frac{\xi \cos \xi z + \text{Bi} \sin \xi z}{(\text{Bi}^2 + \xi^2)^{1/2}} d\xi \times \\ & \times \int_0^\infty f(z') \frac{\xi \cos \xi z' + \text{Bi} \sin \xi z'}{(\text{Bi}^2 + \xi^2)^{1/2}} dz'. \end{aligned} \quad (40)$$

При  $\tau = 0$  из (40) приходим к важному соотношению

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \cos \xi z + \text{Bi} \sin \xi z}{(\text{Bi}^2 + \xi^2)^{1/2}} d\xi \times \\ & \times \int_0^\infty f(z') \frac{\xi \cos \xi z' + \text{Bi} \sin \xi z'}{(\text{Bi}^2 + \xi^2)^{1/2}} dz'. \end{aligned} \quad (41)$$

В данном соотношении ядро интегральной формулы есть

$$\Psi(\xi, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\xi \cos \xi z + \text{Bi} \sin \xi z}{(\text{Bi}^2 + \xi^2)^{1/2}} \right].$$

Равенство (41) выражает следующую теорему: если

$$\bar{W}(\xi, \tau) = \int_0^\infty \Psi(\xi, z) W(z, \tau) dz \quad (42)$$

является интегральным преобразованием функции  $W(z, \tau)$ , то формула обращения для преобразования (42) имеет вид

$$W(z, \tau) = \int_0^\infty \Psi(\xi, z) \bar{W}(\xi, \tau) d\xi. \quad (43)$$

При этом изображение оператора Лапласа в уравнении (29) будет

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial^2 W(z, \tau)}{\partial z^2} \Psi(\xi, z) dz = & -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\xi}{(\text{Bi}^2 + \xi^2)^{1/2}} \times \\ & \times \left[ \frac{\partial W(z, \tau)}{\partial z} - \text{Bi} W(z, \tau) \right]_{z=0} - \xi^2 \bar{W}(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (44)$$

Таким образом, получены все необходимые соотношения, а именно интегральное преобразование (42), формула обращения для него (43) и изображение оператора Лапласа (44). Эти соотношения позволяют записать точное аналитическое решение третьей краевой задачи для уравнения (29) с заданными неоднородностями в виде функций общего вида как в самом уравнении, так и в краевых условиях задачи.

Интегральную формулу (41) перепишем в виде

$$f(z) = \int_0^\infty \Psi(\xi, z) d\xi \int_0^\infty f(z') \Psi(\xi, z') dz'$$

и покажем ее справедливость иным подходом. Имеем

$$\begin{aligned} & \Psi(\xi, z) \Psi(\xi, z') = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\text{Bi} \xi \sin \xi(z+z') - \text{Bi}^2 \cos \xi(z+z')}{\text{Bi}^2 + \xi^2} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \cos \xi z \cos \xi z'. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Bi} \xi \sin \xi(z+z') - \text{Bi}^2 \cos \xi(z+z')}{\text{Bi}^2 + \xi^2} d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Bi} \xi \exp[i\xi(z+z')]}{\text{Bi}^2 + \xi^2} d\xi - \\ &- \frac{\text{Bi}^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\xi(z+z')]}{\text{Bi}^2 + \xi^2} d\xi = \\ &= \frac{\text{Bi}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\xi(z+z')]}{\xi + i\text{Bi}} d\xi = 0, \end{aligned}$$

если  $\text{Bi} > 0, z + z' > 0$  [13]. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \Psi(\xi, z) d\xi \int_0^\infty f(z') \Psi(\xi, z') dz' = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(z') dz' \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{\text{Bi} \xi \sin \xi(z+z') - \text{Bi}^2 \cos \xi(z+z')}{\text{Bi}^2 + \xi^2} d\xi + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \xi z d\xi \int_0^\infty f(z') \cos \xi z' dz' = f(z). \end{aligned}$$

В последнем равенстве использована теория интегралов Фурье [17]. Разумеется, приведенными интегральными соотношениями (42)–(44) можно пользоваться лишь при условии, что  $f(z)$  удовлетворяет условиям Дирихле в интервале  $(0, \infty)$  и когда интеграл

$$\int_0^\infty |f(z)| dz < \infty, \tag{45}$$

т.е. абсолютно сходится. Обратимся к решению задачи (29)–(31) в виде (40), учитывая практическую направленность указанной задачи для многих приложений. Запишем (40) как

$$\begin{aligned} W(z, \tau) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(z') dz' \int_0^\infty \exp(-\xi^2 \tau) \times \\ & \times \frac{(\xi \cos \xi z + \text{Bi} \sin \xi z)(\xi \cos \xi z' + \text{Bi} \sin \xi z')}{\text{Bi}^2 + \xi^2} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty f(z') \left\{ \exp\left(-\frac{(z-z')^2}{4\tau}\right) + \right. \\ & \left. + \exp\left(-\frac{(z+z')^2}{4\tau}\right) \right\} - \text{Bi} \times \\ & \times \exp[\text{Bi}^2 \tau + \text{Bi}(z+z')] \Phi^*\left(\frac{z+z'}{2\sqrt{\tau}} + \text{Bi}\sqrt{\tau}\right) \Big\} dz'. \end{aligned} \tag{46}$$

Рассмотрим в (46) случай, когда начальная температура в (30) постоянна:  $f(z) = W_0 = \text{const}, z \geq 0$ . Здесь непосредственное применение приведенного интегрального преобразования невозможно, так как не выполняется условие (45) для начальной функции. Однако соотношение (46) остается справедливым и для постоянной начальной функции, так как наличие ядер экспонент под знаком интеграла в (46) обеспечивает его сходимость. Находим

$$\begin{aligned} \frac{W(z, \tau)}{W_0} &= \Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\tau}}\right) + \\ &+ \exp(\text{Bi}z + \text{Bi}^2 \tau) \Phi^*\left(\frac{z}{2\sqrt{\tau}} + \text{Bi}\sqrt{\tau}\right). \end{aligned} \tag{47}$$

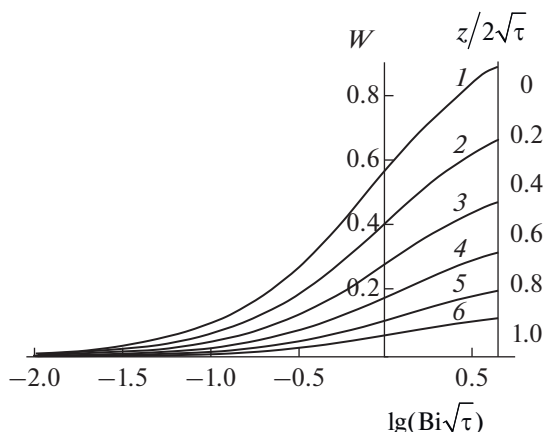
Отсюда находим температуру на поверхности области

$$\begin{aligned} W(0, \tau)/W_0 &= \exp(\text{Bi}^2 \tau) \Phi^*(\text{Bi}\sqrt{\tau}) = \\ &= \frac{1}{\text{Bi}\sqrt{\pi\tau}} \left(1 - \frac{1}{2\text{Bi}^2 \tau} + \frac{3}{4\text{Bi}^4 \tau^2} - \dots\right), \end{aligned}$$

из чего следует, что по прошествии значительного времени после начала охлаждения температуру поверхности можно считать равной  $W = W_0 / (\text{Bi}\sqrt{\pi\tau})$  с ошибкой, меньшей  $W_0 / [2\text{Bi}^3 (\pi\tau^3)^{1/2}]$ . Для задачи с нулевой начальной температурой  $\Phi_0(x) = 0, x \geq 0$ , достигнутой вследствие теплообмена на границе области со средой при температуре  $T_c = \text{const}$ , решение в переменных  $(z, \tau)$  находится в виде

$$\begin{aligned} W(z, \tau) &= \Phi^*\left(\frac{z}{2\sqrt{\tau}}\right) - \\ &- \exp(\text{Bi}z + \text{Bi}^2 \tau) \Phi^*\left(\frac{z}{2\sqrt{\tau}} + \text{Bi}\sqrt{\tau}\right). \end{aligned}$$





Распределение температуры (47) в твердом теле при теплообмене на его поверхности в зависимости от  $\lg(\text{Bi}\sqrt{\tau})$  при фиксированном параметре  $z/2\sqrt{\tau}$ : 1 – 0, 2 – 0.2, 3 – 0.6, 4 – 0.8, 5 – 1.0, 6 – 1.5.

Это решение можно выразить в виде функции любых двух из следующих безразмерных параметров:  $z/2\sqrt{\tau}$ ,  $\text{Bi}\sqrt{\tau}$ ,  $\text{Bi}z$ . Любая из выбранных пар обладает своим преимуществом.

На рисунке представлен график зависимости  $W(z, \tau)$  (47) от  $\lg(\text{Bi}\sqrt{\tau})$  для величин  $z/2\sqrt{\tau}$ , равных 0.2, 0.6, 0.8, 1.0, 1.5. Указанный подход для численных экспериментов на основе приведенных соотношений весьма удобен для описания кинетики процесса наглядным образом. Важным теоретическим вопросом, имеющим многочисленные практические приложения, является нахождение интегрального представления аналитических решений общей задачи вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + F(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (48)$$

$$T(x, t)|_{t=0} = \Phi_0(x), \quad x \geq 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T(x, t) - \varphi(t)]_{x=0}, \quad t > 0, \quad (50)$$

$$|T(x, t)| < \infty, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (51)$$

Используя подход, развитый в [1], найдем интегральное представление для решения в виде

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \int_0^\infty \Phi_0(x')G(x, x', t)dx' + \\ & + ah \int_0^t \varphi(\tau)G(x, x', t - \tau) \Big|_{x=0} d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^\infty F(x', \tau)G(x, x', t - \tau)d\tau dx'. \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь  $G(x, x', t - \tau)$  – функция Грина для третьей краевой задачи, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > \tau, \\ G(x, x', t - \tau) \Big|_{t=\tau} &= \delta(x - x'), \quad (x, x') > 0, \\ \left( \frac{\partial G}{\partial x} - hG \right) \Big|_{x=0} &= 0, \quad t > \tau, \\ |G(x, x', t - \tau)| &< \infty, \quad x > 0, \quad t > \tau, \end{aligned}$$

$\delta(z)$  – дельта-функция Дирака. Интегральные преобразования (42)–(44) приводят к следующему выражению для функции Грина:

$$\begin{aligned} G(x, x', t - \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t - \tau)}} \times \\ &\times \left\{ \exp \left[ -\frac{(x - x')^2}{4a(t - \tau)} \right] + \exp \left[ -\frac{(x + x')^2}{4a(t - \tau)} \right] \right\} - \\ &- h \exp \left[ ah^2(t - \tau) + h(x + x') \right] \times \\ &\times \Phi^* \left( \frac{x + x'}{2\sqrt{a(t - \tau)}} + h\sqrt{a(t - \tau)} \right). \end{aligned}$$

Соотношение (52) может быть использовано в численных экспериментах для многих частных случаев краевых функций в виде импульсных, пульсирующих, периодических, аperiodических, кусочно-постоянных и других тепловых нагрузок в исходной постановке третьей краевой задачи (48)–(51) как для классических линейных постановок в рамках градиентного закона Фурье, включая модельные задачи и процессы как для композиционных материалов, так и для волновых уравнений [18–20]. Разумеется, при нахождении соответствующего аналитического решения задачи может быть использован каждый из приведенных подходов и выбор метода решения определяется лишь удобством вычислительной схемы.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развит новый математический подход к построению интегральных преобразований в частично ограниченных областях в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Рассмотрен метод функций Грина и предложено интегральное соотношение для аналитических решений краевых задач нестационарного теплопереноса, содержащее многочисленные частные случаи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
2. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2013. 561 с.

3. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
4. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
5. *Гринберг Г.А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 727 с.
6. *Кошляков Н.С.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Гостехиздат, 1936. 510 с.
7. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М.: URSS, 2017. 1080 с.
8. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
9. *Карташов Э.М.* Метод интегральных преобразований в аналитической теории теплопроводности твердых тел // Изв. РАН. Энергетика. 1993. № 2. С. 99.
10. *Карташов Э.М.* Расчет температурных полей в твердых телах на основе улучшения сходимости рядов Фурье–Ханкеля // Изв. РАН. Энергетика. 1993. № 3. С. 106.
11. *Волков И.К., Канатников А.Н.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 228 с.
12. *Трантер К.Дж.* Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1956. 204 с.
13. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями 2 порядка. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. С. 278.
14. *Фатихов М.А., Смирнов Г.П.* К решению одной задачи теплопроводности // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. XX. № 5. С. 899.
15. *Аттетков А.В., Волков И.К.* Формирование температурных полей в области, ограниченной изнутри цилиндрической полостью // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение. 1999. № 1. С. 49.
16. *Карташов Э.М.* Об одном классе интегральных преобразований для обобщенного уравнения нестационарной теплопроводности // ИФЖ. 2008. Т. 81. № 1. С. 123.
17. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 667 с.
18. *Карташов Э.М.* Оригиналы операционных изображений для обобщенных задач нестационарной теплопроводности // Тонкие химические технологии. 2019. Т. 14. № 4. С. 77.
19. *Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л.* Влияние компонентов тензора теплопроводности теплозащитного материала на величину тепловых потоков от газодинамического пограничного слоя // ТВТ. 2019. Т. 57. № 1. С. 66.
20. *Формалев В.Ф., Колесник С.А.* О тепловых солитонах при волновом теплопереносе в ограниченных областях // ТВТ. 2019. Т. 57. № 4. С. 543.