УДК 533.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ И ДЕТОНАЦИИ МЕТАНО-ВОЗДУШНЫХ СМЕСЕЙ ЗА ОТРАЖЕННОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

© 2020 г. В. Ю. Гидаспов^{1, *}, Д. С. Кононов¹, Н. С. Северина¹

¹Московский авиационный институт, Москва, Россия *E-mail: gidaspov@mai.ru Поступила в редакцию 15.05.2020 г. После доработки 30.06.2020 г.

Принята к публикации 14.10.2020 г.

Приводятся физико-математическая модель, вычислительные алгоритмы и результаты расчетов воспламенения и детонации метано-воздушных горючих смесей за отраженной ударной волной. Численно сеточно-характеристическим методом и методом Годунова решаются одномерные нестационарные уравнения газовой динамики, дополненные уравнениями химической кинетики. Для описания горения метана в воздухе используется оригинальная модификация упрощенного кинетического механизма. Приводятся результаты сравнения рассчитанных значений времени задержки воспламенения горючей смеси с экспериментальными и расчетными данными других авторов, а также результаты расчетов возникновения и распространения детонационной волны. Получены режимы распространения детонационной волны с постоянной скоростью и в колебательном режиме. Показано, что скорость детонационной волны в отсутствие колебаний с высокой степенью точности соответствует скорости пересжатой детонационной волны, полученной из решения соотношений Ренкина–Гюгонио в предположении, что перед ударной волной течение замороженное, за ударной волной волной – равновесное, а скорость газа за ударной волной равна нулю.

DOI: 10.31857/S0040364420060101

введение

В настоящее время большой теоретический и практический интерес вызывают задачи, связанные с образованием и распространением детонационных волн (ДВ) в метано-воздушных горючих смесях. Это связано как с задачами обеспечения взрывобезопасности, так и с использованием метана в качестве перспективного горючего в энергетических установках различного назначения. Воспламенение и детонация метана изучаются на протяжении многих лет и экспериментально, и теоретически [1–9]. Для экспериментального изучения горения и детонации метана в воздухе используются ударные трубы [9, 10], в которых за отраженными ударными волнами могут реализовываться условия, необходимые для воспламенения метана. Для численного моделирования воспламенения, горения и детонации метановоздушных смесей применяются детальные кинетические механизмы и брутто-механизмы.

Настоящая работа посвящена изучению воспламенения и детонации метано-воздушных смесей за отраженными ударными волнами (УВ). В работе используется модифицированный авторами брутто-механизм горения метана, предложенный в [2]. Рассматривается течение за отраженной УВ, процессы воспламенения горючей смеси, образования волны сжатия и ДВ, а также режимы распространения ДВ.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Исследуется возникающее после отражения (УВ) от закрытого торца ударной трубы течение в ударной трубе, заполненной горючей метано-воздушной смесью. Считается, что параметры перед отраженной (УВ) неизменны, химические превращения не протекают. Газодинамическое течение между торцом трубы и ударной волной принимается как одномерное нестационарное, вязкость, теплопроводность и диффузия не учитываются. Полагается, что продукты сгорания являются смесью совершенных газов.

Для описания течения в областях непрерывности используются уравнения физической газовой динамики в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \\ \rho \gamma_j \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u \left(h + \frac{u^2}{2} \right) \\ \rho u \gamma_j \end{bmatrix} = (1)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ W_i, j = 1, ..., N \end{bmatrix},$$

٦

где ρ , *u*, *p*, *e*, *h* – плотность, скорость, давление, удельные внутренняя энергия и энтальпия газа соответственно, γ_i – мольно-массовые концентрации, N — число рассматриваемых компонент, *W_i* – скорость образования *i*-го компонента в единице объема в результате химических реакций. Система (1) замыкается моделью термодинамики многокомпонентного совершенного газа, описываемой удельным термодинамическим потенциалом Гиббса [11]

$$G(p,T,\vec{\gamma}) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \left[RT \ln\left(\frac{p\gamma_i}{P_0 \sum_{j=1}^{N} \gamma_j}\right) + G_i^0(T) \right], \quad (2)$$

где *R* – универсальная газовая постоянная, *T* – температура, $P_0 = 101325 \, \Pi a -$ стандартное давле-

ние, $G_i^0(T)$ – температурные части стандартных молярных потенциалов Гиббса отдельных компонент. Все эти известные функции приведены в [11].

Соответствующие (2) термическое и калорическое уравнения состояния имеют вид

$$\frac{1}{\rho} = \frac{RT\sum_{i=1}^{N} \gamma_i}{p}, \quad h = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i H_i^0(T), \quad (3)$$
$$H_i^0(T) = G_i^0(T) - T\frac{dG_i^0(T)}{dT}, \quad e = h - \frac{p}{\rho}.$$

В случае произвольного механизма из N_r химических реакций

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i^{(r)} M_i \iff \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i^{(r)} M_i, \quad r = 1, 2, \dots, N_r$$
(4)

выражение для правой части уравнений (1) записывается как

$$W_{i} = \sum_{r=1}^{N_{r}} (\bar{v}_{i}^{(r)} - \bar{v}_{i}^{(r)}) \times \\ \times \left(\vec{K}^{(r)} \prod_{j=1}^{N} (\rho \gamma_{j})^{\bar{v}_{j}^{(r)}} - \vec{K}^{(r)} \prod_{j=1}^{N} (\rho \gamma_{j})^{\bar{v}_{j}^{(r)}} \right).$$
(5)

Здесь M_i – символ *i*-го вещества, $\overline{\vec{v}}_i^{(r)}$ – стехиометрические коэффициенты. Константы скоростей прямых $\vec{K}^{(r)}$ и обратных $\vec{K}^{(r)}$ реакций зависят от температуры и давления и связаны через константу равновесия [11].

Для описания химических превращений в горючей смеси используется модификация упрощенного кинетического механизма, предложенного в [2]. В реакциях участвуют семь компонент: CH₄, O₂, CO₂, CO₂, H₂, H₂O, N₂, теплофизические свойства которых взяты из [11]. Из термодинамических расчетов известно, что при горении и детонации метана образуется большое количество веществ, существенно превышающее количество рассматриваемых. Перед проведением ресурсоемких расчетов выполняется оценка того, насколько используемый список веществ меняет вычисляемые параметры ДВ. По разработанным алгоритмам [12] были рассчитаны детонационные адиабаты. Решались соотношения типа Ренкина-Гюгонио, дополненные условиями химического равновесия и уравнениями состояния (3):

$$\rho(D-u) = \rho_0(D-u_0),$$

$$p + \rho(D-u)^2 = p_0 + \rho_0(D-u_0)^2,$$

$$\rho(D-u) \left(h + \frac{(D-u)^2}{2} \right) =$$
(6)

$$= \rho_0(D-u_0) \left(h_0 + \frac{(D-u_0)^2}{2} \right).$$

Здесь индекс "0" — начальное состояние, D скорость детонационной волны (ДВ). Концентрации химических компонент в состоянии термодинамического равновесия [12] удовлетворяют следующей системе:

$$\sum_{i=1}^{N} A_{K}^{i} \gamma_{i} = \gamma_{K}^{0}, \quad k = 1, 2, ..., N_{e},$$

$$\mu_{i}(p, T, \vec{\gamma}) = \sum_{K=1}^{N_{e}} A_{K}^{i} z_{K}, \quad i = 1, 2, ..., N,$$
(7)

где N_e – число элементов в системе (в рассматриваемом случае $N_e = 4$: C, H, O, N), A_K^i – матрица состава, γ_K^0 — заданные значения мольно-массовых концентраций элементов, μ_i — химический потенциал *i*-го компонента, *z_K* – неизвестные параметры, число которых равно числу элементов. Точка на равновесной детонационной адиабате, в которой D = u + a, называется точкой Чепмена— Жуге [13] $(a - скорость звука, u_0 = 0).$

На рис. 1 приведены параметры детонации Чепмена-Жуге, рассчитываемые по методике [12] для 18 веществ (CH₄, O₂, CO, CO₂, H₂O, H₂, N₂, OH, H₂O₂, HO₂, CH₃, C₂H₆, NO, C*(сажа), C, H, O, N) и семи веществ, используемых в работе. При коэффициенте избытка окислителя, лежащем в диапазоне от 0.5 до 2, различие в скоростях детонации Чепмена-Жуге составляет не более 3%.

Для моделирования химических превращений используется следующий кинетический механизм [2]:

1.
$$CH_4 + 3/2O_2 \rightarrow CO + 2H_2O;$$

- 2. $H_2 + H_2 + O_2 \rightarrow H_2O + H_2O;$
- 3. $CO + CO + H_2 \rightarrow CO_2 + CO_2$;
- 4. $CO_2 + H_2 = CO + H_2O$.

В работе [2] первые три реакции считаются необратимыми. В настоящей работе все четыре ре-

акции считаются обратимыми, константы скоростей прямых реакций (4) заимствованы из [2], константы скоростей (5) обратных реакций (4) пересчитываются через константу равновесия. Чтобы соблюсти законы термодинамики, первая реакция переписывается в виде [1] $CH_4 + O_2 =$ $= 2/3CO + 4/3H_2O + 1/3CH_4$. Скорость данной реакции определяет расход исходных веществ (метана и кислорода) и является ответственной за задержку воспламенения в горючей смеси. Для ее вычисления используется аппроксимация, предложенная в [2]: $\vec{W}^1 = A(p/P_0)^n$ × exp $(-E/T)(\rho\gamma_{CH_4})(\rho\gamma_{O_2})$ моль/м³/с. Здесь p – давление в Па, $P_0 = 101325$ Па, константа $A = 6 \times 10^8$ (в [2] $A = 4 \times 10^8$, и для сохранения подобранного времени задержки воспламенения ее необходимо умножить на коэффициент, стоящий при О2 в исходной реакции [1]), n = -0.2264, E = 22660 K. В [3] провелены экспериментальные исследования времени задержки воспламенения в бедной метано-воздушной горючей смеси (коэффициент избытка окислителя $\alpha = 2$) за отраженными УВ.

Для моделирования условий эксперимента в настояшей работе рассчитывалось течение в области за отраженной ударной волной. Использовался оригинальный сеточно-характеристический метод, позволяющий рассчитывать квазиодномерные нестационарные течения многокомпонентного реагирующего газа с явным выделением произвольного числа взаимодействующих разрывов (УВ, контактных разрывов, характеристик семейств C±) [1, 4, 12, 14-16]. На рис. 2 приведена типичная картина течения, возникающая после отражения падающей УВ от стенки, если температура за отраженной УВ превышает температуру самовоспламенения горючей смеси. Воспламенение горючей смеси происходит на стенке, образуется волна воспламенения и сжатия (сгущение характеристик C+ при $t > 2 \times$ $\times 10^{-5}$ с и существенно ненулевая скорость течения), которая приводит к образованию УВ (t ≈ ≈ 2.7 × 10⁻⁵ с, $x \approx 0.01$ м), догоняющей отраженную УВ (при их взаимодействии отраженная УВ, ускоряясь, становится пересжатой ДВ), образуются контактный разрыв (КР) и веер волн разрежения, состоящий из характеристик семейства С-

Параметры газа перед отраженной УВ подбирались таким образом, чтобы параметры за отраженной УВ совпадали с используемыми в [3] (решалась система (6), (3), заданными считались u = 0, p, T). Для этого строилась нижняя ветвь ударной адиабаты, проходящей через приведенные в [3] значения давления и температуры (P_{\ni}, T_{\ni}) при нулевой скорости потока. На данной адиабате находилась точка (P_2, T_2, u_2) – такая, что, если через нее провести ударную адиабату, то прямая Михельсона, проходящая через нее и точку на нижней ветви построенной адиабаты, в которой



Рис. 1. Зависимость скорости детонации Чепмена– Жуге от коэффициента избытка окислителя: *1*, *3* – при $T_0 = 298.15$ K, $p_0 = 101325$ Па, *5* – данные [8]; *2*, $4 - p_0 = 10132.5$ Па; *I*, *2* – 18 веществ; *3*, 4 - 7 веществ.



Рис. 2. Временная развертка сильного инициирования детонации за отраженной УВ: жирная сплошная – УВ, жирный пунктир – КР, тонкие сплошные – траектории, пунктир – характеристики *C*+, *C*–.

скорость потока равна нулю (P_1 , T_1), соответствует скорости падающей УВ, наблюдаемой в экспериментах. Необходимо отметить, что в [3] не приводятся реализуемые в экспериментах параметры перед падающей УВ. Про скорость падающей УВ сказано, что она лежала в диапазоне от 1100 до 1300 м/с. Данное условие, а также то, что температура в камере низкого давления была выше 300 К (ударная труба перед экспериментами прогревалась [3]), использовалось при выборе параметров перед падающей волной из множества возможных решений. С полученными параметрами рассчитывалось течение за отраженной УВ и определялась зависимость от времени температуры в "точке на стенке" [12]. По методике, описанной в [2], находилась точка пересечения касательных к графику температуры T(t) в начальный



Рис. 3. Зависимость времени самовоспламенения метано-воздушной горючей смеси при $\alpha = 2$ за отраженной УВ от температуры и давления: 1 -эксперимент [3], 2 - расчет [3], 3 - настоящая работа.

момент времени, а также в точке перегиба и определялась задержка воспламенения.

На рис. 3 приведено сравнение результатов настоящих расчетов с экспериментальными данными и результатами расчетов по детальному кинетическому механизму, описанных в [3]. Во всей области экспериментальных результатов наблюдается хорошее согласие настоящих расчетов с данными [3]. Максимальное расхождение наблюдается в области высоких давлений и низких температур (T < 1320 K). Указанное отличие может быть существенно снижено, если при T < 1320 K использовать в первой реакции условную приведенную энергию активации, равную 10⁴ K, а константу А подбирать из условия совпадения с формулой [2] при 1320 К. Необходимо отметить, что если рассчитывать задержку воспламенения по изменению температуры вдоль траекторий газа, находящихся на расстоянии ~7 мм [3] от стенки, воспламенение происходит на 4-7 мкс быстрее.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассчитывалось течение, возникающее в ударной трубе, заполненной метано-воздушной горючей смесью (0.091CH₄ + 0.182O₂ + 0.727N₂), за отраженной УВ. Варьировалось число Маха падающей УВ, распространяющейся по покоящемуся газу при температуре $T_0 = 300$ К и давлении $p_0 =$ = 10⁴ Па. Расчетная область располагалась между стенкой и отраженной УВ. Отраженная УВ явно выделялась [12]. Расчетные узлы – траектории газа "подводились" [12] с УВ через равные промежутки времени Δt с параметрами, равными текущим рассчитанным параметрам газа за УВ. Когда число траекторий между стенкой и УВ достигало максимального заданного значения N_{max} , одновременно с подводом новой траектории одна траектория из расчетной области удалялась. При этом удалялась та траектория, для которой, если заменить значения параметров течения в точке с координатами, где она находится, на значения, полученные в результате интерполяции по остальным траекториям, сумма квадратов невязок будет минимальной. В расчетах принималось $\Delta t = 10^{-6} - 10^{-7}$ с, $N_{\text{max}} = 1000 - 2000$. Данные значения выбирались таким образом, чтобы при изменении их в два раза результаты расчетов заметно не менялись. Необходимо отметить, что расчеты носят модельный характер, так как параметры перед отраженной волной считаются неизменными.

На рис. 4 приведены распределения скорости, температуры и мольно-массовой концентрации СО за отраженной УВ в различные моменты времени, соответствующие числу Маха падающей УВ, равному $M_{\Pi} = 4$ (для простоты M_{Π} считается положительным, хотя УВ и скорость потока за ней направлены в сторону, противоположную пространственной оси). На рис. 5а дана зависимость скорости волны от времени. Крайняя правая точка (рис. 4) на кривых соответствует текущей координате отраженной волны и величине параметра за ней. Вслед за релаксационной зоной за ДВ наблюдается протяженный неподвижный участок с постоянными параметрами. Получено (кривая 10, рис. 4), что значения параметров с высокой точностью совпадают с решением системы (6), дополненной уравнениями состояния (3), уравнениями термодинамического равновесия (7) (важность и плодотворность "равновесного анализа" для исследования течений с ДВ отмечается в работах [6, 7]) и условием равенства нулю скорости за УВ (u = 0 в (6)). Пусть данная задача по аналогии с [4, 17] называется "задачей о равновесной отраженной ДВ". Значения скорости волны также совпадают (рис. 5а). Кривая 9 на рис. 4 соответствует волне Чепмена-Жуге (решение системы (6), (3), (7) с дополнительным условием D = u + a). Параметры Чепмена—Жуге заметно отличаются от полученного численно решения, которое может сохраняться сколь угодно долго, а стационарная детонационная волна является пересжатой.

Также выполнены расчеты для течения за отраженной УВ, соответствующие значениям числа Маха падающей волны 3.6 и 3.2. В данных случаях наблюдались существенные колебания скорости фронта ДВ относительно некоторого стационарного значения [18], которым является скорость равновесной отраженной ДВ (рис. 5, 6). Необходимо отметить, что при уменьшении числа Маха падающей УВ скорости отраженной ДВ и ДВ Чепмена—Жуге сближаются (рис. 5). Так, при числе Маха 3.2 они составляют 940 и 923 м/с, разница температур на графиках более заметна (рис. 6в): 3065 и 3002 К. За фронтом волны наблюдаются существенные колебания температуры (рис. 6), а соответственно, и плотности. Для контроля ре-



Рис. 4. Распределения скорости (а), температуры (б), мольно-массовых концентраций (в) СО в различные моменты времени: I - 11, 2 - 17, 3 - 21, 4 - 25, 5 - 48, 6 - 232, 7 - 924, 8 - 4523 мкс, 9 - параметры детонации Чепмена-Жуге, I0 – параметры за равновесной отраженной ДВ.

зультатов, полученных сеточно-характеристическим методом, проведены расчеты методом Годунова второго порядка [19] (кривые 4, рис. 6). В частности, при $M_{\Pi} = 3.6$ (рис. 6а) в полученном решении присутствуют колебания температуры с



Рис. 5. Зависимости скорости от времени: 1 - УВ, 2 - равновесной отраженной ДВ, 3 - ДВ Чепмена-Жуге при (а) - М_П = 4.0, (б) - 3.6, (в) - 3.2.



Рис. 6. Распределения температур в УВ (1) при $M_{\Pi} = 3.6, t = 4293$ мкс (а) и при 3.2, 8261 мкс (б); 2 – в равновесной отраженной ДВ, 3 – в ДВ Чепмена–Жуге, 4 – полученное в расчете методом Годунова второго порядка при t = 3975 мкс (а) и 8140 мкс (б).

несколько меньшей амплитудой, средние значения температуры совпадают. Необходимо отметить, что переменная скорость отраженной УВ приводит к зоне переменной энтропии за ней, а следовательно, и к колебаниям температуры, плотности и концентраций. Расчетными линиями в сеточно-характеристическом методе являются траектории газа, и в результате сеточная диффузия отсутствует. Расстояние между точками максимума температуры [15] (рис. 6) можно связать с продольными размерами детонационных ячеек δ . При $M_{\Pi} = 3.6 \, \delta \approx 9$ см при приближении к параметрам Чепмена—Жуге $M_{\Pi} = 3.2$ и $\delta \approx 38$ см, что коррелирует с данными [5–8].

2020



Рис. 7. Зависимости скоростей волны (1-3) и температуры перед волной (4) и за ней (5-7) от числа Маха падающей волны при $p_0 = 10^4$ Па, $T_0 = 300$ К: 1, 5 -замороженной отраженной УВ; 2, 6 -равновесной отраженной ДВ; 3, 7 -ДВ Чепмена–Жуге.

На рис. 7 приведено решение соотношений типа Ренкина—Гюгонио с различными замыкающими условиями, описанными выше. Из графиков, в частности, видно, что скорости равновесной отраженной ДВ (кривая 2) и волны Чепмена— Жуге (кривая 3) близки при $M_{\Pi} = 2.6-3.2$. Также необходимо обратить внимание на то, что для корректности расчетов время численного моделирования должно быть меньше, чем время самовоспламенения горючей смеси при параметрах течения перед отраженной волной (кривая 4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на примере смеси метана с воздухом рассмотрена в одномерной нестационарной невязкой постановке задача об отраженной ударной волне в горючей газовой смеси. Расчетным путем получена картина течения, включающая воспламенение горючей смеси у стенки, образование волн горения и сжатия, взаимодействие их с отраженной УВ, образование и распространение пересжатой ДВ. Получено, что пересжатая ДВ при числах Маха падающей волны больше 3.9 выходит на режим и распространяется с постоянной скоростью, а при меньших числах Маха падающей волны скорость пересжатой ДВ совершает колебания вокруг некоторого постоянного значения. При движении пересжатой ДВ в колебательном режиме за ней возникает ячеистая структура. Параметры пересжатой ДВ в среднем соответствуют параметрам, полученным из решения задачи о равновесной отраженной ДВ.

Работа выполнена по государственному заданию № FSFF-2020-0013.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гидаспов В.Ю., Северина Н.С. Численное моделирование детонации пропано-воздушной горючей смеси с учетом необратимых химических реакций // ТВТ. 2017. Т. 55. № 5. С. 795.

- 2. Басевич В.Я., Фролов С.М. Глобальные кинетические механизмы, использующиеся при моделировании многостадийного самовоспламенения углеводородов в реагирующих течениях // Химическая физика. 2006. Т. 25. № 6. С. 54.
- 3. Жуков В.П., Сеченов В.А., Стариковский А.Ю. Самовоспламенение метановоздушных смесей в широком диапазоне давлений // Физика горения и взрыва. 2003. Т. 39. № 5. С. 3.
- 4. Гидаспов В.Ю. Распад разрыва в детонирующем газе // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17. № 6. С. 72.
- 5. Нетлетон М. Детонация в газах. М.: Мир, 1989. 280 с.
- 6. Васильев А.А. Характеристики горения и детонации метаноугольных смесей // Физика горения и взрыва. 2013. Т. 49. № 4. С. 48.
- 7. Васильев А.А., Васильев В.А. Расчетные и экспериментальные параметры горения и детонации смесей на основе метана и угольной пыли // Вестник Научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. 2016. № 2. С. 8.
- Физика взрыва / Под ред. Орленко Л.П. М.: Физматлит, 2004. Т. 1. 832 с.
- 9. Бивол Г.Ю., Головастов С.В., Голуб В.В. Формирование пересжатой волны детонации в потоке метано-кислородных смесей в канале переменного сечения // ТВТ. 2017. Т. 55. № 4. С. 576.
- 10. Ленкевич Д.А., Головастов С.В., Голуб В.В., Бочарников В.М., Бивол Г.Ю. Параметрическое исследование распространения детонации в узких каналах, заполненных смесью пропан-бутан-кислород // ТВТ. 2014. Т. 52. № 6. С. 916.
- Гурвич Л.В., Вейц И.В., Медведев В.А. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ: Справочное издание в 4-х томах. М.: Наука, 1982.
- 12. Гидаспов В.Ю., Северина Н.С. Некоторые задачи физической газовой динамики. М.: Изд-во МАИ, 2016. 196 с.
- 13. Зельдович Я.Б. Теория горения и детонации газов. Изд-во АН СССР, 1944, 374 с.
- 14. Гидаспов В.Ю., Северина Н.С. Численное моделирование экспериментов по определению времени задержки воспламенения за падающими ударными волнами // ФГВ. 2013. Т. 9. № 4. С. 31.
- 15. Гидаспов В.Ю., Северина Н.С. Численное моделирование тонкой структуры цилиндрической детонационной волны в водородно-воздушной горючей смеси // ТВТ. 2015. Т. 53 № 4. С. 556.
- 16. *Gidaspov V.Yu., Golubev V.K., Severina N.S.* A Software Package for Simulation of Unsteady Flows of the Reacting Gas in the Chanel // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2016. Т. 9. № 3. С. 94.
- Бам-Зеликович Г.М. Распад произвольного разрыва в горючей смеси // Теоретическая гидромеханика. М.: Оборонгиз. 1949. № 4. С. 112.
- Коробейников В.П. Задачи теории точечного взрыва. М.: Физматлит, 1985. 400 с.
- Gidaspov V.Yu., Kononov D.S. On the Stability of a Detonation Wave in a Channel of Variable Cross Section with Supersonic Input and Output Flows. In: Smart Innovation, Systems and Technologies / Eds. Jain L.C., Favorskaya M.N., Nikitin I.S., Reviznikov D.L. V. 173. Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics. Springer, 2020.