ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 2020, том 58, № 6, с. 844–855

УДК 537.52

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФФУЗНОЙ МОДЫ КОРОТКОЙ СИЛЬНОТОЧНОЙ ВАКУУМНОЙ ДУГИ В АКСИАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2020 г. Т. М. Сапронова[1], *, К. Н. Ульянов[1]

[1]*Всероссийский электротехнический институт – филиал ФГУП "Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. акад. Е.И. Забабахина", Москва, Россия*

**E-mail: sapron0109@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.04.2019 г.
После доработки 19.02.2020 г.
Принята к публикации 10.03.2020 г.

Развита теория диффузной моды аксиально-симметричной короткой сильноточной вакуумной дуги во внешнем аксиальном магнитном поле. Получено дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных для линий уровней тока разряда (2D-модель). Сформулированы граничные условия на катодной и анодной границах плазмы. Решение этого уравнения с учетом уравнения баланса тепла для электронов и уравнения для концентрации плазмы позволяет определить зависимости линий тока от координат. С помощью этих линий по полученным аналитическим формулам могут быть рассчитаны компоненты плотности тока, магнитного поля, а также распределения температуры электронов и концентрации плазмы в разрядном промежутке. Предложена и обоснована (1.5D) математическая модель ($j_r \ll j_z$), которая существенно упрощает расчеты и имеет достаточно широкие пределы применимости. При проведении расчетов по этой модели использовался метод последовательных приближений, который обеспечил получение результатов с необходимой точностью. Рассчитаны распределения компонентов магнитного поля B_r, B_θ, B_z, плотности тока (j_r, j_z, j_θ), распределения температуры электронов и концентрации электронов и ионов в плазме вакуумной дуги.

DOI: 10.31857/S0040364420060174

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе авторы рассматривают диффузную моду вакуумной дуги (ВД) с большим количеством катодных пятен, которая реализуется в аксиальном магнитном поле в разрядном промежутке с электродами из Cu50Cr50. Именно эта форма ВД с таким материалом электродов находит широкое практическое применение. Разработана математическая модель диффузной моды аксиально-симметричной короткой сильноточной вакуумной дуги во внешнем аксиальном магнитном поле B_0 с учетом магнитных полей, создаваемых аксиальным током дуги (B_θ) и током Холла ($B_z^{\text{H}}, B_r^{\text{H}}$). При отсутствии внешнего магнитного поля B_0 плазма дуги под действием силы Ампера $j_z B_\theta$ поляризуется в поперечном току направлении, возникает большое радиальное электрическое поле E_r и радиальное падение потенциала $\varphi(r)-\varphi_0$. В теории сильноточных разрядов высокого давления (z-пинч) сила $j_z B_\theta$ компенсируется радиальным компонентом градиента давления [1]. В ВД низкой плотности ($n_e = Zn_i = 3.6 \times 10^{20}$ м$^{-3}$ для плотности тока разряда $j = 10^7$ А/м^2) такая компенсация при больших токах невозможна [2]. Падение напряжения между центром и внешней границей R плазмы и электродов при j_z = const имеет вид $\varphi(R) - \varphi(0) = 17I$ В, где ток в килоамперах. Например, при $I = 50$ кА $\varphi(R) - \varphi(0) = 850$ В. Это значение на два порядка превышает как напряжение на плазме разряда, так и радиальную разность потенциалов, связанную с радиальным градиентом давления. Поэтому при $B_0 = 0$ диффузная мода ВД может существовать только при небольших токах (до нескольких килоампер [3]), а сильноточная ВД при больших токах существует в контрагированной моде при гораздо более высоком давлении (порядка атмосферного). При наличии внешнего аксиального поля B_0 ситуация меняется кардинальным образом. В плазме ВД реализуется режим протекания тока, при котором его линии наклонены относительно оси. Возникает радиальный ток j_r, взаимодействие которого с полем B_θ генерирует азимутальный ток Холла j_θ. При этом сила $j_\theta B_z$ практически полностью уравновешивает силу $j_z B_\theta$ (пинч-эффект), величина радиального электрического поля снижается до значений, при которых возможен режим проте-

кания большого тока с эквипотенциальным анодом. Таким образом, в сильноточной ВД с аксиальным магнитным полем действует принцип глубокой компенсации радиальных магнитных сил. Именно по этой причине математические модели диффузной моды аксиально-симметричной сильноточной ВД должны быть двумерными. Они должны учитывать три компоненты плотности тока (j_r, j_z, j_θ), три компоненты магнитного поля (B_r, B_z, B_θ) и две компоненты электрического поля (E_r, E_z), компонента $E_\theta = 0$. Такие модели были разработаны [2–9], они применялись для расчета различных режимов диффузной сильноточной ВД. Эти модели основаны на различных математических подходах, они по-разному учитывают влияние собственного магнитного поля тока ВД. Например, в [4, 5, 7, 8] в расчет принимались только B_θ и B_0, магнитное поле тока Холла B^{H} не учитывалось. В работах [2, 3] магнитное поле Холла учитывалось, однако не вполне корректно рассчитывалось анодное падение. В частности, для его определения использовалась формула Ленгмюра, область применимости которой ограниченна. В дальнейшем оказалось, что эта формула неприменима для анодного падения ВД [10].

При расчете параметров плазмы ВД для определения зависимости температуры электронов от координат необходимо использовать баланс энергии электронов. В настоящей работе показано, что в этом балансе коэффициенты теплопроводности и электропроводности для электронов зависят от магнитного поля. Наличие аксиального (продольного) поля B_0 и поперечных полей B_r и B_θ существенным образом влияет как на эти коэффициенты, так и на распределения температуры электронов в разрядном промежутке. Рост B_0 увеличивает значения коэффициентов теплопроводности и электропроводности, а увеличение поперечных полей B_r и B_θ уменьшают эти коэффициенты. В опубликованных работах этот фактор не принимается во внимание.

В настоящей работе для плазмы короткой сильноточной ВД разработаны две математические модели (2D и 1.5D), которые позволяют произвести расчет параметров плазмы ВД. Получены распределения компонентов плотности тока, магнитного поля, концентрации и распределения электронной температуры в плазме ВД с учетом зависимости коэффициентов теплопроводности и электропроводности от компонентов магнитного поля.

2D МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим ВД с большим количеством катодных пятен в аксиальном магнитном поле. Из катодных пятен в направлении анода вылетают струи полностью ионизованной плазмы с широким угловым распределением [5, 6]. При движении к аноду происходит пересечение струй отдельных факелов. На некотором (небольшом) расстоянии от катода находится стартовая плоскость, начиная с которой плазму можно рассматривать как однородную сплошную среду. В промежутке катод–стартовая плоскость плазма дискретна. Стартовая плоскость является катодной границей плазмы. На этой границе имеется круговая область, из которой в направлении анода истекает плазма, состоящая из электронов и быстрых катодных ионов со средним зарядом Z. Поскольку ток ионов ВД на порядок меньше тока электронов, то при расчете магнитных полей пренебрегаем ионным током.

Рассмотрим движение электронов в цилиндрической системе координат во внешнем магнитном поле B_z с учетом магнитных полей, создаваемых током дуги I. Ось z направлена к аноду, система координат (r, θ, z) – правая. Уравнение движения электронов в магнитогидродинамическом приближении имеет вид [1]

$$mn_e \frac{dV_{e\alpha}}{dt} = -\frac{\partial p_e}{\partial x_\alpha} - en_e\left(E_\alpha + \frac{1}{c}\left[\overline{V}_e\overline{B}\right]_\alpha\right) + \frac{j_{e\alpha}}{\sigma}. \quad (1)$$

Здесь V_e – скорость, p_e – давление, n_e – концентрация электронов, σ – электропроводность плазмы. Электроны в плазме замагничены, ларморовский радиус электронов на два–три порядка меньше характерных размеров плазмы, поэтому в (1) можно пренебречь [1] инерцией электронов (левой частью (1)). Тогда для компонентов электрического поля E_α имеем

$$E_\theta = -\frac{j_r B_z - j_z B_r}{cen_e} + \frac{j_\theta}{\sigma} = 0,$$

$$E_r = \frac{j_\theta B_z - j_z B_\theta}{cen_e} + \frac{j_r}{\sigma} - \frac{1}{en_e}\frac{\partial p_e}{\partial r},$$

$$E_z = \frac{j_r B_\theta - j_\theta B_r}{cen_e} + \frac{j_z}{\sigma} - \frac{1}{en_e}\frac{\partial p_e}{\partial z}.$$

Поскольку $E_\theta = 0$, то можно записать выражение для плотности тока Холла

$$j_\theta = \frac{\sigma}{cen_e}\left(j_r B_z - j_z B_r\right).$$

Параметр Холла в замагниченной плазме ВД $\beta_{\text{H}} = B_z\sigma/cen_e = \omega_e\tau_{ei} \gg 1$. Исключая j_θ из выражений для E_r и E_z, имеем

$$E_r = \frac{j_r}{\sigma}\left(1 + \beta_{\text{H}}^2\right) - \frac{j_z}{\sigma}\left(\beta_{\text{H}}\frac{B_\theta}{B_z} + \beta_{\text{H}}^2\frac{B_r}{B_z}\right) - \frac{1}{en_e}\frac{\partial p_e}{\partial r}, \quad (2)$$

$$E_z = \frac{j_z}{\sigma}\left(1 + \beta_{\text{H}}^2\frac{B_r^2}{B_z^2}\right) + \frac{j_r}{\sigma}\left(\beta_{\text{H}}\frac{B_\theta}{B_z} - \beta_{\text{H}}^2\frac{B_r}{B_z}\right) - \frac{1}{en_e}\frac{\partial p_e}{\partial z}. \quad (3)$$

Введем новую переменную I – ток вакуумной дуги:

$$I(r,z) = 2\pi\int_0^r j_z r dr. \quad (4)$$

Дифференцируя (4) по r и учитывая непрерывность линий тока $\mathrm{div} j = 0$, получим выражения для j_r и j_z:

$$j_r = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial I}{\partial z}, \quad j_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial I}{\partial r}. \quad (5)$$

Из уравнений (2) и (3) можно исключить j_r, j_z и получить выражения для E_r и E_z, в которые входят только ток $I(r, z)$ и давление электронов p_e. Имеем

$$E_r = -\frac{1+\beta_\text{Н}^2}{2\pi\sigma r}\frac{\partial I}{\partial z} - \frac{\beta_\text{Н}}{2\pi\sigma r}\left(-\frac{B_\theta}{B_z} + \beta_\text{Н}\frac{B_r}{B_z}\right)\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{1}{en_e}\frac{\partial p_e}{\partial r}, \quad (6)$$

$$E_z = \frac{1}{2\pi\sigma r}\left(1+\beta_\text{Н}^2\frac{B_r^2}{B_z^2}\right)\frac{\partial I}{\partial r} + \frac{\beta_\text{Н}}{2\pi\sigma r}\left(\frac{B_\theta}{B_z} + \beta_\text{Н}\frac{B_r}{B_z}\right)\frac{\partial I}{\partial z} - \frac{1}{en_e}\frac{\partial p_e}{\partial z}. \quad (7)$$

Используем уравнение $\mathrm{rot}\, E = 0$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial r}.$$

Продифференцируем (6) по z, (7) по r, приравняем производные и получим уравнение второго порядка в частных производных для определения линий уровня тока $I(r, z)$. Перейдем к безразмерным переменным $\tilde{I} = I/I_0$, $\tilde{r} = r/R$, $\tilde{z} = z/L$, где R – радиус электродов, L – расстояние между ними. Значение I_0 задается произвольно, например $I_0 = 40$ кА. Тогда

$$a_1\frac{\partial^2\tilde{I}}{\partial\tilde{z}^2} + a_2\frac{\partial^2\tilde{I}}{\partial\tilde{r}^2} + a_3\frac{\partial^2\tilde{I}}{\partial\tilde{r}\partial\tilde{z}} + \frac{\partial\tilde{I}}{\partial\tilde{r}}\left(\frac{\partial a_2}{\partial\tilde{r}} + \frac{\partial b_2}{\partial\tilde{z}}\right) + \frac{1}{\tilde{r}}\left(b_1\frac{\partial\tilde{I}}{\partial\tilde{z}} - a_2\frac{\partial\tilde{I}}{\partial\tilde{r}}\right) + \frac{\partial\tilde{I}}{\partial\tilde{z}}\left(-\frac{\partial b_1}{\partial\tilde{r}} + \frac{\partial a_1}{\partial\tilde{z}}\right) + c\tilde{r}\left(\frac{\partial\tilde{T}_e}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial p_e}{\partial\tilde{r}} - \frac{\partial\tilde{T}_e}{\partial\tilde{r}}\frac{\partial p_e}{\partial\tilde{z}}\right) = 0, \quad (8)$$

где

$$a_1(\tilde{r},\tilde{z}) = \frac{R}{L}\frac{1+\beta_\text{Н}^2}{\tilde{\sigma}}, \quad a_2(\tilde{r},\tilde{z}) = \frac{L}{R}\frac{1+\beta_\text{Н}^2\dfrac{B_r^2}{B_z^2}}{\tilde{\sigma}},$$

$$a_3(\tilde{r},\tilde{z}) = \beta_\text{Н}^2\frac{B_r}{B_z}, \quad b_1(\tilde{r},\tilde{z}) = \frac{\beta_\text{Н}\left(\dfrac{B_\theta}{B_z} - \beta_\text{Н}\dfrac{B_r}{B_z}\right)}{\tilde{\sigma}},$$

$$b_2(\tilde{r},\tilde{z}) = \frac{\beta_\text{Н}\left(\dfrac{B_\theta}{B_z} + \beta_\text{Н}\dfrac{B_r}{B_z}\right)}{\tilde{\sigma}}, \quad c = \frac{2\pi\sigma_0 R}{I_0}\frac{kT_e(0)}{e},$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma(0)} = t_e^{\frac{3}{2}}\frac{1}{F(B)}, \quad t_e = \frac{T_e}{T_e(0)},$$

$$F(B) = 1 + \frac{B_\theta^2(z) + B_r^2(z)}{B_z^2(z)}\frac{\beta_\text{Н}^2}{1+\beta_\text{Н}^2}.$$

Граничные условия для уравнения (8) задаются на катодной и анодной границах плазмы. Катодную границу можно считать эквипотенциальной, поскольку все катодные факелы идентичны (токи в них одинаковые). Такое граничное условие применяется во всех ранее опубликованных теоретических работах. Поэтому $\varphi(0) = 0$, $E_r(0) = 0$. На анодной границе плазмы потенциал $\varphi_\text{пл}(L) = \varphi_a - U_a$. На катодной границе необходимо задать распределения тока $j_r(r, 0)$, $j_z(r, 0)$. Следует отметить, что радиальные электрические силы и силы, связанные с радиальным градиентом электрического давления, на два порядка меньше радиальных магнитных сил $j_\theta B_z$ и $j_z B_\theta$ [11]. В этом случае между компонентами плотности тока j_r и j_z имеет место соотношение

$$j_r = j_z\frac{\beta_\text{Н}}{1+\beta_\text{Н}^2}\left(\frac{B_\theta}{B_z} + \beta_\text{Н}\frac{B_r}{B_z}\right), \quad \frac{j_r}{j_z} = \mathrm{tg}\delta,$$

где δ – угол наклона линий тока к оси z. Граничное условие для плазмы ВД можно записать в виде

$$\varphi(L) - \varphi(0) = -\int_0^L E_z(z)dz + U_a = U_0 = \mathrm{const}.$$

Зависимость $E_z(z)$ определяется формулой (3). Таким образом, в плоскости $z = 0$ задается распределение $j_z(r, 0)$. После этого из (8) в заданном магнитном поле $B_z(r, z)$ и $B_r(r, z)$ в промежутке находятся распределения линий уровня тока, распределения плотности тока (5), электрического поля $E(r, z)$ и потенциала, а также распределение концентрации плазмы. При этом распределение потенциала на аноде может зависеть от координаты r. Полученные зависимости магнитных полей от тока $I(r, z)$, а также от тока Холла $j_\theta(r, z)$ позволяют рассчитать распределения новых магнитных полей B_r, B_z, B_θ в промежутке. С этим распределением полей расчет повторяется. Решение находится методом последовательных приближений. Распределение $j_z(r)$ изменяется до тех пор, пока потенциал на аноде не перестанет зависеть от координаты, а распределение параметров плазмы и магнитных полей установятся. При наличии внешнего магнитного поля B_r и B_z линии тока наклонены к оси. Взаимодействие j_r с B_z и j_z с B_r приводит к появлению тока Холла j_θ, выражение для которого может быть записано в виде

$$j_\theta = j_{z\text{ср}} f(r)\left(\frac{B_\theta}{B_z} + \frac{B_r}{B_z\beta_\text{Н}}\right)\left(1+\beta_\text{Н}^{-2}\right)^{-1},$$
$$B_\theta = -\frac{\mu_0 I}{\pi R\tilde{r}}\int_0^{\tilde{r}} f(\tilde{r})\tilde{r}d\tilde{r}, \quad j_{z\text{ср}} = \frac{I}{\pi R^2}. \tag{9}$$

Для расчета компонентов магнитного поля тока Холла $B_r^\text{Н}$ и $B_z^\text{Н}$ плазма ВД разбивается на кольца равноотстоящими цилиндрическими поверхностями вокруг оси z и равноотстоящими параллельными плоскостями, перпендикулярными оси z. По этим кольцам течет ток Холла. В плоскости r, z образуется система из $M \times N$ прямоугольников, каждый из которых является сечением кольца. При достаточно большом числе колец плотность азимутального тока в каждом из них можно считать постоянной, а сами кольца тонкими. Для азимутального тока каждого кольца можно записать $I_{\theta ik} = j_{\theta ik}h_r h_z$, где $h_r = \Delta r$ и $h_z = \Delta z$ – радиальный и аксиальный размеры кольца. Для компонентов $B_r^\text{Н}$ и $B_z^\text{Н}$ магнитного поля тонкого кольца используем известные аналитические формулы [12]

$$B_{zik}^\text{Н}(r_p, z_p) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mu_0 I_{\theta ik}}{\sqrt{(r_p + r_{ik})^2 + (z_p - z_i)^2}}\times$$
$$\times\left[K(q) + \frac{r_{ik}^2 - r_p^2 - (z_p - z_i)^2}{(r_{ik} - r_p)^2 + (z_p - z_i)^2}E(q)\right], \tag{10}$$

$$B_{rik}^\text{Н}(r_p, z_p) = \frac{z_p - z_i}{2\pi r_p}\frac{\mu_0 I_{\theta ik}}{\sqrt{(r_p + r_{ik})^2 + (z_p - z_i)^2}}\times$$
$$\times\left[-K(q) + \frac{r_{ik}^2 + r_p^2 + (z_p - z_i)^2}{(r_{ik} - r_p)^2 + (z_p - z_i)^2}E(q)\right], \tag{11}$$

$$I_{\theta ik} = j_\theta(r_k, r_i)h_r h_z,$$
$$K(q) = \int_0^{\pi/2}(1 - q\sin^2\theta)^{-1/2}d\theta,$$
$$E(q) = \int_0^{\pi/2}(1 - q\sin^2\theta)^{1/2}d\theta, \tag{12}$$
$$q = \frac{4r_{ik}r_p}{(r_{ik} + r_p)^2 + (z_p - z_i)^2}.$$

Здесь r_p и z_p – координата точки, в которой вычисляются компоненты магнитного поля, $r_{ik} = r_k(z_i)$. Величины компонентов поля в заданной точке находятся двойным суммированием по индексам i и k. Полная величина магнитного поля находится суммированием в каждой точке компонентов внешнего магнитного поля $B_z(r, z)$, $B_r(r, z)$ и компонентов $B_z^\text{Н}(r, z)$ и $B_r^\text{Н}(r, z)$.

1.5D МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим более простую модель, в которой $j_r \ll j_z$. В этой модели магнитные поля имеют три компонента B_r, B_z, B_θ, зависящие от r, z. Поле B_z является суммой внешнего аксиального магнитного поля и магнитного поля тока Холла, поле B_r создается током Холла. Поле B_θ создается азимутальным током дуги. Линии уровня плотности тока в такой модели практически параллельны оси z, угол наклона этих линий к оси $\delta \ll 1$. Связь между плотностью тока j и j_z при $j_r \ll j_z$ определяется соотношением $j = j_z(1 + j_r^2/j_z^2)^{1/2} \approx j_z(1 + 0.5\, j_r^2/j_z^2)$. В результатах расчетов максимальное значение отношения j_r/j_z меньше 0.135, тогда отношение j_z/j больше 0.99. Отметим, что линии тока практически параллельны оси z. Таким образом, в 1.5D-модели можно принять, что $j = j_z$, и считать плотность тока не зависящей от z. В такой модели расчет распределения плотности тока по радиусу существенно упрощается, поскольку это распределение не будет зависеть от z. Разобьем плазму ВД в плоскости (r, z) на клетки таким же образом, как при расчете магнитного поля тока Холла. Индекс k нумерует клетки по r, индекс i – по z. Тогда, интегрируя электрическое поле E_{zk} по z и учитывая анодное падение U_a, получим напряжение U_0 между катодной границей плазмы и анодом:

$$E_{zk} = E_{zk}^\sigma - \frac{1}{en_e}\frac{\partial p_e}{\partial z}, \quad E_{zk}^\sigma = -\frac{j_\text{ср} f_k}{\sigma(0)t_e^{\frac{3}{2}}}F,$$
$$F_\kappa = 1 + \frac{B_{\theta\kappa}^2(z) + B_{r\kappa}^2(z)}{B_{z\kappa}^2(z)}\frac{\beta_\text{Н}^2}{1+\beta_\text{Н}^2},$$
$$U_0 = \varphi(L) - \varphi(0) = \int_0^L E_{zk}^\sigma(z)dz + U_a +$$
$$+ \frac{\kappa(T_e(z) - T_e(0))}{e} + Un, \; Un = \int_0^z \frac{\kappa T_e(z)}{e}\ln n_e dz, \tag{13}$$

где κ – постоянная Больцмана. Напряжение U_0 должно быть постоянным, поскольку эквипотенциальные поверхности анода и катодной границы плазмы параллельны. Запишем (13) в форме, удобной для проведения расчетов:

$$U_0 = E^* h_z f_k \sum_{i=1}^{nz} F_{ki}(z)(t_{eki}(z))^{\frac{-3}{2}} +$$
$$+ U_{ak} + \frac{kT_e(0)}{e}(t_{ek}(1) - 1) + Un,$$
$$\omega_e = \frac{eB_z}{mc} = 1.76\times10^7 B_z, \tag{14}$$
$$\tau_{ei} = \frac{3.5\times10^4}{(\lambda/10)}\frac{(T_e(0)eB)^{3/2}}{Z_i n_e}t_e^{3/2}, \quad f_k = \frac{j_z(r_k)}{j_\text{ср}}$$
$$E^* = \frac{I}{\pi R^2\sigma(0)} = \frac{j_\text{ср}}{\sigma(0)}, \quad U_k = U_0 \text{ при } f_k = f_0.$$

Таблица 1. Зависимость анодного падения η_a и η_L от параметра v_0/v_T

v_0/v_T	0.005	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
η_a	−3.93	−3.25	−2.6	−2.22	−1.96	−1.76	−1.61	−1.48	−1.37	−1.27
η_L	−3.91	−3.21	−2.52	−2.12	−1.83	−1.61	−1.43	−1.27	−1.14	−1.02
v_0/v_T	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
η_a	−1.19	−0.698	−0.564	−0.466	−0.331	−0.245	−0.188	−0.148	−0.119	−0.098
η_L	−0.909	−0.223	0	–	–	–	–	–	–	–

Здесь λ – кулоновский логарифм [1], $\sigma(0)$ – электропроводность на стартовой плоскости. Значение f_0 подбирается так, чтобы $\int_0^1 f(\tilde{r})\tilde{r}d\tilde{r} = 0.5$, $\tilde{r} = \dfrac{r}{R}$.

Отметим, что первый член в правой части (14) – это омическое падение напряжения на плазме, второй член – анодное падение, третий и четвертый члены получены при интегрировании по z члена с градиентом давления. При этом учтено, что

$$\frac{1}{en_e}\frac{\partial n_e \kappa T_e}{\partial z} = \frac{1}{e}\frac{\partial \kappa T_e}{\partial z} + \frac{\kappa T_e}{e}\frac{\partial}{\partial z}\ln n_e.$$

Второй член в правой части не вносит существенного вклада в U_0, поскольку скорость потока быстрых ионов, движущихся от стартовой плоскости к аноду, мало меняется. Тем не менее в расчетах этот член будет учитываться.

Функция $f_k(r)$, подбираемая с учетом выполнения условия U_0 = const, является отношением плотности тока при заданном k к средней плотности тока $j_{ср}$. В уравнение (14) входит анодное падение U_a, которое зависит от отношения направленной скорости электронов v_0 к тепловой v_T на анодной границе плазмы, температуры электронов на катодной ($T_e(0)$) и анодной ($T_e(0)t_{ek}(1)$) границах плазмы. Таким образом, одновременно с решением (14) необходимо для каждого значения $f_k(r)$ решать уравнение баланса энергии электронов, вычислять анодное падение, относительную электронную температуру $t_{ek}(1)$, а также относительную концентрацию плазмы $\tilde{n} = n(L)/n(0)$ на анодной границе.

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ АНОДНОЕ ПАДЕНИЕ

Теория отрицательного анодного падения развита в [10]. При малых отношениях направленной скорости к тепловой $v_0/v_T \approx 10^{-2}$ отрицательное анодное падение согласуется с рассчитанным по формуле Ленгмюра $U_a = -(\kappa T_e/e)\ln(v_0/v_T)$, которая ранее использовалась для расчета U_a всеми авторами. При $v_0/v_T \geq 0.1$ различие существенно. Показано, что с ростом v_0/v_T значение U_a монотонно приближается к нулю, оставаясь отрицательным. Для расчета U_a в [10] получены аналитические выражения. Результаты расчетов $\eta_a = e\varphi_a/\kappa T_e$ приведены в табл. 1. Там же для сравнения представлены значения η_L, рассчитанные по формуле Ленгмюра. Отметим, что $\eta_L = 0$ при $v_0/v_T = 0.25$, а при больших значениях v_0/v_T анодное падение становится положительным (в этом случае формулой Ленгмюра пользоваться нельзя). При расчете U_a были использованы значения η_a, приведенные в табл. 1.

Анодное падение для паров меди может быть рассчитано по формулам

$$U_a = \frac{\kappa T_e}{e}\eta_a(v_0/v_T),$$

$$\frac{v_0}{v_T} = \frac{1+\gamma}{\gamma}\sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{\varepsilon_i}{\kappa T_e^*}\frac{m_e}{m_i}}\,t_e(1)^{-\frac{1}{2}}\tilde{n}(1)^{-1}, \quad t_e(1) = \frac{T_e(L)}{T_e(0)}.$$

Для меди доля ионного тока $\gamma = 0.08$.

БАЛАНС ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Запишем баланс энергии в виде баланса тепла [1]

$$\frac{3}{2}n_e V_e\frac{d\kappa T_e}{dz} + n_e\kappa T\frac{dV_e}{dz} = -\frac{dq_e}{dz} + Q_e. \qquad (15)$$

В (15) V_e – скорость электронов, q_e – плотность потока тепла, Q_e – источник тепла, $q_e = q_u^e + q_T^e$, $q_u^e = 0.9n_e\kappa T_e V_e$, $q_T^e = \kappa_e\, dT_e/dz$ [1], κ_e – коэффициент теплопроводности. В источнике тепла Q_e необходимо учитывать нагрев электронов аксиальным и азимутальным токами, а также потери энергии электронами W_{el} при столкновении с ионами. Выражение для Q_e имеет вид

$$Q_e = \frac{j_z^2 t_e^{3/2}}{\sigma(0)}\left(1 + \frac{2\left(B_\theta^2 + B_r^2\right)}{B_z^2}\right) - W_{el},$$

$$W_{el} = \frac{3m_e}{m_i}\frac{n_e}{\tau_{ei}}(\kappa T_e - \kappa T_i).$$

Отношение W_{el} к джоулеву нагреву $j^2/\sigma(0) = 3\gamma^2\kappa Te/(1+\gamma)^2 m_i V_i^2 = 3 \times 10^{-4}$ (при $\varepsilon_i = 70$ эВ,

$\kappa T_e = 3$ эВ). В выражении для Q_e пренебрежем упругими потерями. В балансе тепла для электронов учитывались джоулев нагрев электронов при столкновении с ионами, конвективный перенос тепла на анод, а также перенос тепла электронной теплопроводностью на катодную границу плазмы. При записи баланса тепла предполагалось, что $j = j_z$, пренебрегалось поперечной теплопроводностью. В рассматриваемой задаче $\kappa_{e\perp}/\kappa_{e\|} = F(r, z)\beta_{\text{H}}^{-2} \ll 1$. Расчеты показали, что при внешнем аксиальном магнитном поле $B_0 = 2.5$ мТл/кА и конфигурации плазмы $R = 6$ см, $L = 3$ см максимальное значение этого отношения – 0.01, а минимальное – 10^{-4}.

В магнитном поле, имеющем продольную составляющую B_z, поперечные составляющие B_θ и B_r, выражение для электропроводности имеет вид $\sigma_e = \sigma(0)t_e^{3/2}F^{-1}$. С учетом закона Видемана–Франца, связывающего коэффициенты теплопроводности κ_e^* и электропроводности σ_e для полностью ионизованной плазмы соотношением $\kappa_e^*/\sigma_e = (4\kappa^2 T_e)/e^2$, коэффициент теплопроводности может быть записан в виде $\kappa_e^* = \kappa^*(0)t_e^{5/2}F^{-1}$, где $\kappa^*(0)$ – коэффициент теплопроводности на нижней границе плазмы при $t_e(0) = 1$. Таким образом, оба коэффициента зависят от отношения суммы квадратов поперечных полей к квадрату продольного поля.

Перейдем к безразмерным переменным:

$$t_e = \frac{T_e}{T_e(0)}, \quad f_e = \frac{2}{7}t_e^{7/2}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}.$$

Нормировочные коэффициенты $T_e(0)$ и d можно выбирать произвольно. Для функции $f_e(z)$ получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{gathered} f_e'' = (\ln F_k(\tilde{z}))' + 0.96\beta f_k F_k f_e^{\frac{-5}{7}} f' - \\ - \beta^2 f_k^2 F_k F_k^* f_e^{\frac{-3}{7}} - 1.9 f_k F_k \frac{d}{dz}\ln\tilde{n}, \\ F_k^* = 1 + \frac{2(B_\theta^2 + B_r^2)}{B_z^2} \end{gathered} \tag{16}$$

с граничными условиями $f_e(0) = 2/7$, $f_e'(1) = 0$. Здесь

$$\begin{gathered} t_e = \left(\frac{7}{2}f_e\right)^{\frac{2}{7}}, \quad \beta = \frac{j_{\text{ср}}L}{j^* d}, \\ j^* = \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{3}{14}}\left(\frac{\sigma(0)\kappa^*(0)T_e(0)}{d^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{gathered} \tag{17}$$

Условие $f_e'(1) = 0$ означает, что поток тепла на анод переносится конвективно [13, 14]. В расчетах приняты типичные для ВД значения $\kappa T_e(0) = 3$ эВ, $d = 10^{-2}$ м. Тогда $j^* = 9 \times 10^6$ А/м^2. При этом все коэффициенты в (17) оказались одного порядка, что свидетельствует о существенной роли как электронной теплопроводности, так и конвект ивного выноса тепла. Распределение электронной температуры зависит от параметра β, граничных условий и от распределений магнитных полей и концентрации плазмы. При решении (16) для каждого набора параметров подбирается значение производной на катодной границе для выполнения граничного условия на анодной границе плазмы и решается уравнение для определения $\tilde{n}_k(z)$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ИОНОВ В ПЛАЗМЕ ВД

Распределение концентрации ионов находится из уравнения движения [1]

$$\begin{gathered} m_i n_i v_i \frac{dv_i}{dz} = -\frac{dp_i}{dz} - eZn_i\left(E_z + \left[\bar{v}_i\bar{B}\right]_z\right) + R_{ie}, \\ R_{ie} = -R_{ei} = -en_e j_e/\sigma_e. \end{gathered} \tag{18}$$

Здесь R_{ie} – сила трения электронов и ионов. Для потока быстрых ионов $v_i = v_{iz}$, поэтому $\left[\bar{v}_i\bar{B}\right]_z = 0$.

Электрическое поле в плазме E_z имеет вид (13). Подставив E_z в уравнение (18), получим

$$\begin{gathered} m_i n_i v_i \frac{dv_i}{dz} = -\frac{d(p_i + p_e)}{dz} - \\ - eZn_i E^* t_e^{-3/2} f_k\left(F_k(r_k, z) - 1\right). \end{gathered} \tag{19}$$

В (19) можно пренебречь давлением ионов p_i, поскольку $T_i \ll T_e$. В плазме ВД поток ионов нагревается W_{el} до температуры на аноде t_a. Используя уравнение баланса энергии для ионов [1], для $t_a = T_i(L)/T_i(0)$ запишем

$$t_a = 1 + 2\frac{m_e}{m_i}\frac{T_e(0)}{T_i(0)}\frac{L}{V_i\tau_{ei}}\int_0^1 t_e^{-1/2}d\tilde{z}.$$

Оценим t_a для ионов меди ($m_e/m_i = 10^{-5}$, $V_i = 1.5 \times 10^6$ см/с, $\kappa T_e(0) = 3$ эВ, $\kappa T_i(0) = 0.2$ эВ). При $L = 1$ см $t_a = 1.3$, при $L = 3$ см $t_a = 1.9$. Таким образом, температура ионов на аноде на порядок меньше температуры электронов, и давлением ионов можно пренебречь.

Введем безразмерные переменные $\tilde{n}_i = n_i/n_i(0)$, $\tilde{v}_{iz} = v_{iz}/v_{iz}(0)$, $\tilde{z} = z/L$. Для $\tilde{n}_{iz}$ получим

$$\frac{d\tilde{n}_i}{d\tilde{z}} = \tilde{n}_i^3\left(a_1\frac{dt_e}{d\tilde{z}} + a_2 t_e^{-3/2}\left(F(r,\tilde{z})-1\right)\right)\left(1-a_1 t_e \tilde{n}_i^2\right)^{-1},$$
$$a_1 = \frac{\kappa Z T_e(0)}{m_i v_i^2(0)}, \quad a_2 = \frac{eZE^*L}{m_i v_i^2(0)}. \tag{20}$$

Уравнение (20) определяет зависимость $\tilde{n}_i(\tilde{z})$ для каждого r_k. Отметим, что $\tilde{n}_i(z)$ входит в выражение для анодного падения $\tilde{n}_i(1)$, формулы (13), (14) для напряжения U_0, а также в уравнение для расчета температуры электронов. Распределение безразмерной скорости $\tilde{v}_i$ определяется соотношением $\tilde{n}_i\tilde{v}_i = 1$. Распределение концентрации заряженных частиц в плазме ВД имеет вид

$$n_{ik}(z) = \frac{\gamma j_{\text{ср}}}{eV_i(0)}\tilde{n}_{ki}(r_k,z)f_k(r_k), \quad n_e = Zn_i.$$

Значение $\tilde{n}_i$ увеличивается по $\tilde{z}$ в результате торможения потока ионов встречным электрическим полем E_{zk} (13), которое возникает в результате действия тормозящих сил Ампера и градиента давления. На зависимости $\tilde{n}(\tilde{r})$ и $f(\tilde{r})$ существенное влияние оказывает зависимость $t_e(\tilde{r})$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При проведении расчетов предполагалось, что в плазме ВД средний заряд иона меди $Z = 1.8$. Энергия электронов на катодной границе плазмы $\kappa T_e(0) = 3$ эВ, энергия ионов $\varepsilon_i(0) = 70$ эВ. Для заданных значений тока дуги I и однородного аксиального магнитного поля B_0 с использованием 1.5D-модели подбиралось распределение $j_{zk}(r) = f_k j_{\text{ср}}$. Задавалось значение f_0 для $k = 0$, после чего рассчитывалось напряжение U_0 с помощью уравнения (14). При этом вычислялось анодное падение и решались уравнение баланса энергии электронов (16) для определения $t_e(r, z)$ и уравнение (20) для определения $\tilde{n}(r,z)$. Первый расчет проводился в поле B_0 без учета магнитного поля тока Холла при $\tilde{n} = 1$. На оси $B_r = B_\theta = 0$, поэтому $F_{0i} = 1$. Такие расчеты проводились для всех значений k, после чего определялись зависимости $f_k(r)$, $\tilde{n}(r,z)$, $t_e(r, z)$ и вычислялся интеграл в (14). Затем производился расчет B_θ и j_θ по (9), а также расчет компонентов магнитного поля тока Холла по (10)–(12). Поскольку первое значение f_0 задавалось произвольно, то значение интеграла отличалось от 0.5. Таким образом, в первом приближении определены $B_z^{\text{Н}}$ и $B_r^{\text{Н}}$. Следующее приближение $f(r)$ рассчитывается с тем же значением f_0 с учетом всех компонентов магнитного поля и с полученными значениями $\tilde{n}(r,z)$ и $t_e(r, z)$. Определяется новое значение интеграла. Эта процедура повторяется пока значения $B_z^{\text{Н}}$, $B_r^{\text{Н}}$, $f(r)$ не установятся. Расчеты повторялись до тех пор, пока интеграл не будет отличаться от 0.5 на две-три единицы в третьем знаке, а значения $\tilde{n}(r,z)$ и $t_e(r, z)$ установятся. Для улучшения сходимости приближений использовался метод регуляризации А.Н. Тихонова. Применение метода последовательных приближений позволяет решать уравнения для t_e (16) и $\tilde{n}$ (20) независимо, поскольку при их решении в правой части использовались компоненты магнитного поля и значения $\tilde{n}(r,z)$ и $t_e(r, z)$ из предыдущего приближения.

В обширной литературе по ВД широко используется приведенное магнитное поле, равное отношению B/I в единицах мТл/кА, поэтому ниже результаты расчетов магнитных полей приводятся в этих единицах. Расчеты были выполнены для трех значений приведенного внешнего аксиального магнитного поля $B_0 = 1.5, 2.5, 4.0$ мТл/кА, двух конфигураций плазмы $R = 6$ см, $L = 1, 3$ см. Результаты расчетов приведены в табл. 2–6 и на рис. 1–8 при $I = 40$ кА.

Таблица 2. Значения $B_z^{\text{Н}}$, мТл/кА

k	i										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	–1.48	–1.64	–1.76	–1.85	–1.90	–1.91	–1.90	–1.85	–1.76	–1.64	–1.48
1	–1.43	–1.58	–1.69	–1.77	–1.82	–1.84	–1.82	–1.77	–1.69	–1.58	–1.43
2	–1.33	–1.47	–1.58	–1.65	–1.70	–1.71	–1.70	–1.65	–1.58	–1.47	–1.33
3	–1.21	–1.33	–1.43	–1.49	–1.53	–1.55	–1.53	–1.49	–1.43	–1.33	–1.21
4	–1.05	–1.16	–1.24	–1.30	–1.33	–1.35	–1.33	–1.30	–1.24	–1.16	–1.05
5	–0.87	–0.96	–1.03	–1.08	–1.11	–1.16	–1.11	–1.08	–1.03	–0.96	–0.87
6	–0.68	–0.74	–0.80	–0.83	–0.85	–0.86	–0.85	–0.83	–0.80	–0.74	–0.68
7	–0.47	–0.51	–0.55	–0.57	–0.59	–0.59	–0.59	–0.57	–0.55	–0.51	–0.47
8	–0.26	–0.27	–0.29	–0.30	–0.30	–0.30	–0.30	–0.30	–0.29	–0.27	–0.26
9	–0.04	–0.02	0.011	0.002	0.003	0.004	0.003	0.002	0.011	–0.02	–0.04
10	0.17	0.23	0.28	0.30	0.32	0.32	0.32	0.30	0.28	0.23	0.17

Таблица 3. Значения $B_r^{\text{Н}}$, мТл/кА

k	i										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.15	0.13	0.09	0.06	0.03	0	–0.03	–0.06	–0.09	–0.13	–0.15
2	0.27	0.22	0.17	0.11	0.06	0	–0.06	–0.11	–0.17	–0.22	–0.27
3	0.37	0.31	0.23	0.15	0.08	0	–0.08	–0.15	–0.23	–0.31	–0.37
4	0.45	0.37	0.28	0.19	0.09	0	–0.09	–0.19	–0.28	–0.37	–0.45
5	0.51	0.42	0.32	0.21	0.10	0	–0.10	–0.21	–0.32	–0.42	–0.51
6	0.54	0.45	0.34	0.23	0.11	0	–0.11	–0.23	–0.34	–0.45	–0.54
7	0.55	0.46	0.35	0.23	0.12	0	–0.12	–0.23	–0.35	–0.46	–0.55
8	0.53	0.44	0.33	0.22	0.11	0	–0.11	–0.22	–0.33	–0.44	–0.53
9	0.46	0.38	0.29	0.19	0.1	0	–0.1	–0.19	–0.29	–0.38	–0.46
10	0.33	0.28	0.21	0.14	0.07	0	–0.07	–0.14	–0.21	–0.28	–0.33

Таблица 4. Значения $t_e(r, z)$

k	i										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1.13	1.23	1.31	1.38	1.43	1.47	1.50	1.53	1.544	1.549
2	1	1.14	1.25	1.33	1.40	1.45	1.50	1.53	1.56	1.57	1.58
4	1	1.17	1.29	1.38	1.46	1.52	1.56	1.60	1.63	1.64	1.65
6	1	1.20	1.34	1.44	1.52	1.58	1.64	1.68	1.71	1.726	1.732
8	1	1.23	1.39	1.50	1.59	1.66	1.71	1.75	1.78	1.80	1.81
10	1	1.26	1.43	1.56	1.66	1.74	1.80	1.84	1.87	1.89	1.90

Таблица 5. Значения $t_e(1)$, $\tilde{n}_k(1)$, f_k, $f_k\tilde{n}_k(1)$, Un/Up при $L = 1$ см

k	0	2	4	6	8	10
$t_e(1)$	1.19	1.21	1.22	1.26	1.28	1.30
$\tilde{n}_k(1)$	1.0075	1.012	1.019	1.024	1.028	1.031
f_k	1.82	1.65	1.31	1.04	0.83	0.66
$f_k\tilde{n}_k(1)$	1.83	1.66	1.34	1.06	0.86	0.68
Un/Up	0.0079	0.012	0.020	0.025	0.029	0.031

Таблица 6. Значения $t_e(1)$, $\tilde{n}_k(1)$, f_k, $f_k\tilde{n}_k(1)$, Un/Up при $L = 3$ см

k	0	2	4	6	8	10
$t_e(1)$	1.55	1.58	1.65	1.73	1.81	1.90
$\tilde{n}_k(1)$	1.021	1.027	1.040	1.053	1.064	1.069
f_k	1.63	1.55	1.35	1.10	0.85	0.62
$f_k\tilde{n}_k(1)$	1.66	1.60	1.41	1.16	0.90	0.67
Un/Up	0.012	0.015	0.022	0.030	0.035	0.037

Значения приведенных магнитных полей Холла $B_z^{\text{Н}}$ и $B_r^{\text{Н}}$ для $B_0 = 2.5$ мТл/кА представлены в табл. 2, 3 и на рис. 1. Отметим, что значение $B_z^{\text{Н}}$ на оси сопоставимо с B_0, при увеличении r значения $B_z^{\text{Н}}$ уменьшаются. На краю $B_z^{\text{Н}}$ меняет знак, модуль B_z на краю меньше $|B_0|$. Распределения $|B_z^{\text{Н}}|$ по z более однородны, они имеют максимум в центре промежутка. Величина $B_r^{\text{Н}}$ в центре промежутка меняет знак, она монотонно уменьшается по z. Для каждого значения k кривая $|B_r^{\text{Н}}|$ симметрична.

На рис. 1 приведены распределения компонентов магнитного поля для $z = L/2$ ($i = 5$). Отметим нелинейную зависимость B_θ(r), связанную с контракцией тока ($f(r) \neq 1$), а также заметное влияние на зависимость $B_z(r)$ магнитного поля тока Холла. В данном случае $f_0 = 1.63$. При большей контракции кривая $B_\theta(r)$ может пройти через максимум. На рис. 2 представлены значения функции $F(r, z)$, имеющей важное значение в теории ВД в магнитном поле.

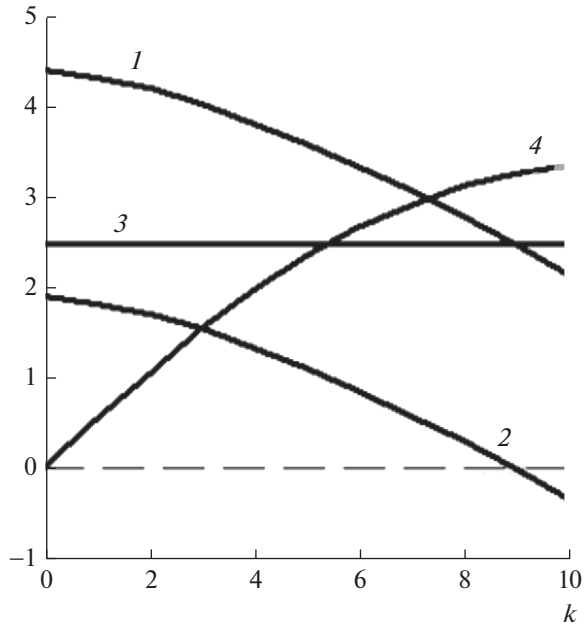

Рис. 1. Компоненты магнитного поля: *1* – B_z; *2* – $B_z^{\text{Н}}$; *3* – B_0; *4* – B_θ, мТл/кА.

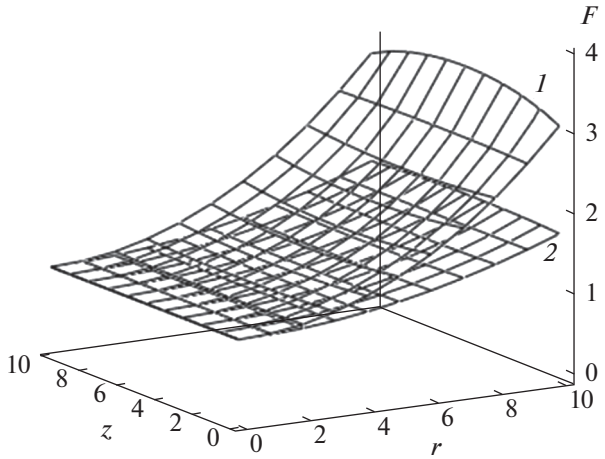

Рис. 2. Значения функции $F(r, z)$ для аксиальных магнитных полей B_0: *1* – B_0 = 2.5 мТл/кА, *2* – 4.0.

Функция $F(r, z)$ характеризует рост по r удельного сопротивления ρ плазмы в магнитном поле. Именно с этим фактом связана контракция электронного тока: на краю (по r) промежутка ρ больше, поэтому для выполнения условия эквипотенциальности анода с ростом r должна уменьшаться плотность тока.

На рис. 3 представлены зависимости $f(r)$ для трех значений внешнего магнитного поля B_0. С ростом B_0 уменьшается контракция тока и удельное сопротивление плазмы (функция $F(r, z)$).

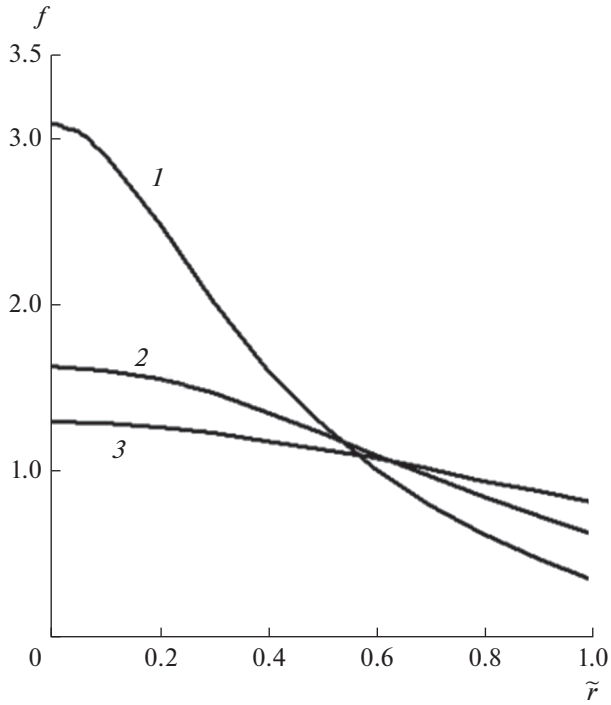

Рис. 3. Значения функции $f(r)$: *1* – B_0 = 1.5 мТл/кА, *2* – 2.5, *3* – 4.0.

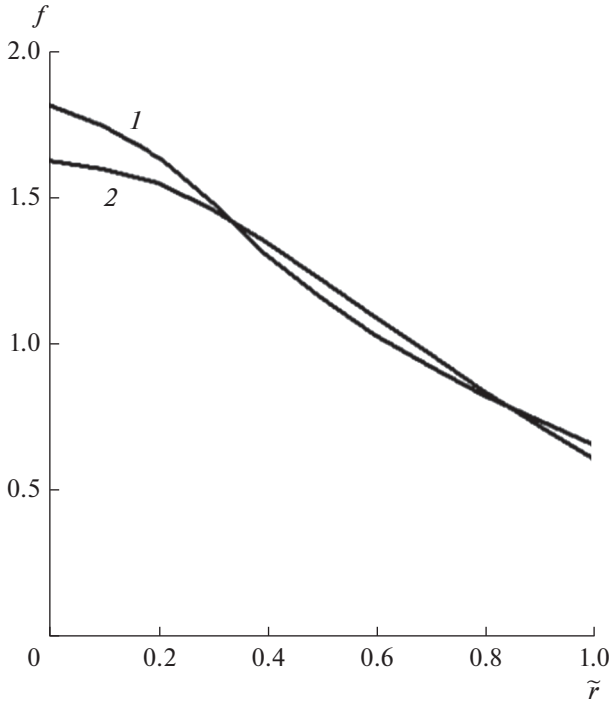

Рис. 4. Значения функции $f(r)$ для B_0 = 2.5 мТл/кА: *1* – L = 1 см, *2* – 3.

На рис. 4 показаны аналогичные зависимости для двух значений L.

В табл. 4 приведены значения относительной электронной температуры ($t_e(r, z)$). Отметим, что

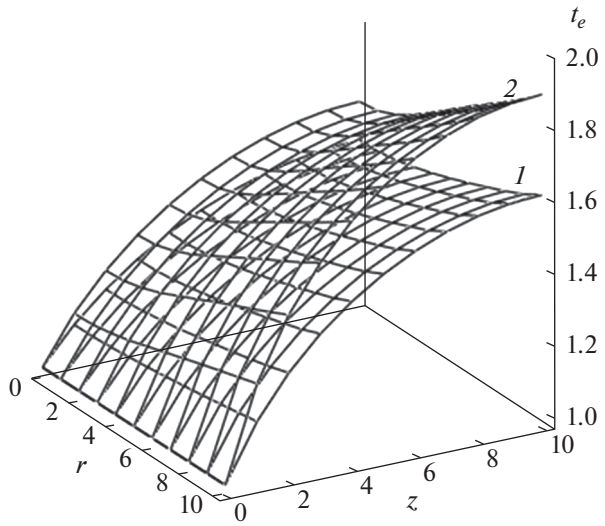

Рис. 5. Электронная температура $t_e(r, z)$: *1* – B_0 = = 4.0 мТл/кА, *2* – 2.5.

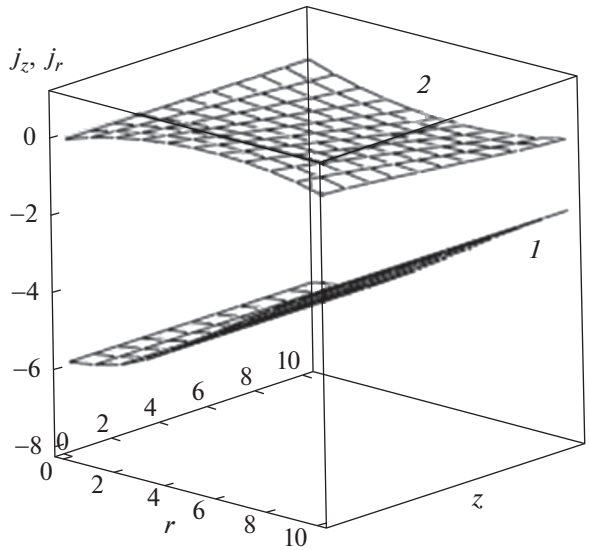

Рис. 6. Плотность тока при B_0 = 2.5 мТл/кА: *1* – $j_z(r, z)$, *2* – $j_r(r, z)$.

скорость роста температуры с увеличением z существенно уменьшается. Это связано с тем фактом, что при увеличении температуры уменьшается интенсивность нагрева (j^2/σ) и увеличивается коэффициент электронной теплопроводности. При этом часть тепла отводится в направлении катодной границы плазмы. Рост температуры по r связан с нагревом электронов током Холла.

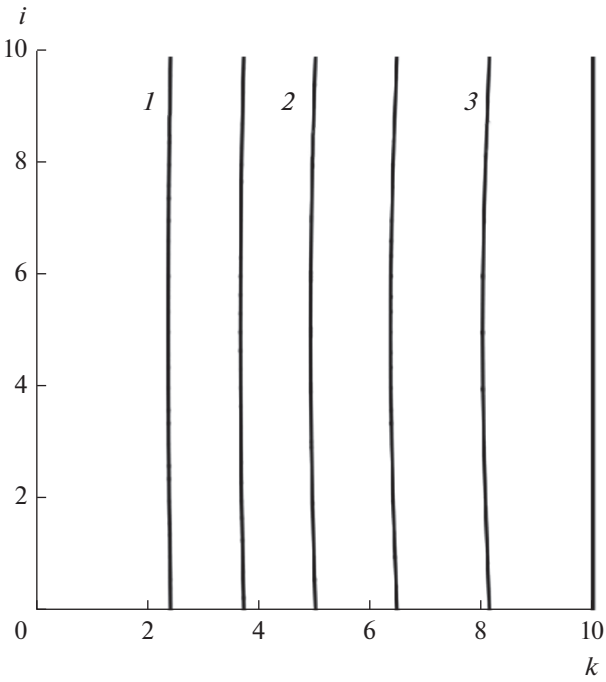

Рис. 7. Линии уровней плотности тока $j \times 10^{-6}$А/м^2 для B_0 = 2.5 мТл/кА: –5.44 (*1*), –4.46 (*2*), –3.03 (*3*).

На рис. 5 представлены поверхности значений $t_e(r, z)$ для двух B_0. С ростом B_0 нагрев электронов уменьшается, что в первую очередь связано с уменьшением степени контракции тока. Результаты расчетов позволяют проверить возможность использования 1.5D-модели, применимость которой ограничена условием $j_r \ll j_z$. На рис. 6 приведены поверхности зависимостей $j_r(r, z)$ и $j_z(r, z)$. Видно, что $j_r \ll j_z$. На рис. 7 приведены линии уровней плотности тока j. Они параллельны оси z. Это полностью соответствует 1.5D-модели. В ВД сила радиального сжатия $j_z B_\theta$ уравновешена силой $j_\theta B_z$. ВД – это короткая дуга в движущемся с большой скоростью потоке плазмы. Время пролета ионами промежутка L – порядка 10^{-6} с. Форму плазменной границы определяют радиальные магнитные силы, она совпадает с линиями тока на рис. 7.

На рис. 8 приведены значения параметра Холла $\beta_H(r, z)$. Поскольку температура электронов существенно увеличивается по z, то $\beta_H(z)$ растет. Таким образом, 1.5D-модель вполне пригодна для расчета параметров плазмы и распределения плотности тока, если $j_r \ll j_z$. Если j_r и j_z сравнимы, то необходимо воспользоваться гораздо более сложной 2D-моделью.

В табл. 5 и 6 приведены результаты расчетов с учетом $\tilde{n}(\tilde{r}, \tilde{z})$ распределений на анодной границе температуры электронов $t_e(1)$, концентрации ионов $\tilde{n}_i(1)$, функции f_k, концентрации плазмы, произведения $f_k \tilde{n}_k(1)$. Приведено также отношение доли напряжения Un, связанного с учетом влияния $\ln \tilde{n}$ (формулы (13), (16)) к напряжению на плазме Up. Это отношение характеризует сте-

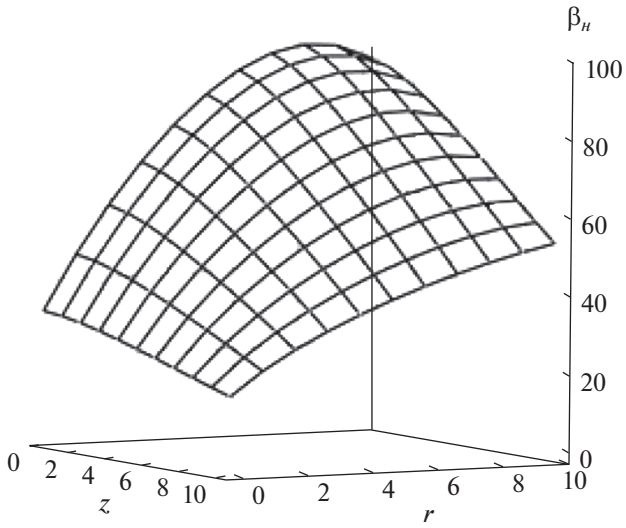

Рис. 8. Значения параметра Холла $\beta_H(r, z)$ для $B_0 = 2.5$ мТл/кА.

пень влияния $\tilde{n}(\tilde{r}, \tilde{z})$ на распределение $f(\tilde{r})$. Если пренебречь этим влиянием и считать $\tilde{n}_i = 1$, то функцию $f(\tilde{r})$ следует увеличить в $(1 + Un/Up)$ раза, снова скорректировать расчет, который уменьшит расхождение точного и приближенного ($\tilde{n}_i = 1$) расчетов. Таким образом, в рассмотренных случаях распределение концентрации плазмы практически не влияет на распределение плотности тока.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обратим внимание на тот факт, что плазма ВД полностью ионизована. Кулоновская электропроводность и теплопроводность плазмы без магнитного поля зависят только от температуры электронов и не зависят от концентрации плазмы. В магнитном поле обе эти величины зависят от магнитного поля через функцию $F = 1 + \frac{B_\theta^2(z) + B_r^2(z)}{B_z^2(z)} \frac{\beta_H^2}{1 + \beta_H^2}$, где β_H – параметр Холла. Параметр Холла β_H включает концентрацию электронов. Значение β_H в диффузной вакуумной дуге много больше единицы, поэтому множитель $\beta_H^2/(1 + \beta_H^2)$ можно считать равным единице. Функция F_k, полученная с учетом глубокой компенсации аксиальных и радиальных магнитных сил, зависит от отношения суммы квадратов поперечных полей B_θ и B_r к квадрату B_z. Она определяет распределения плотности тока, компонентов магнитного поля тока дуги и температуры электронов. Для практических целей при разработке устройств, использующих диффузную форму ВД с аксиальным магнитным полем (например, в вакуумных дугогасительных камерах), можно эффективно применять предложенную в работе 1.5D-модель на стадии конструирования. С помощью расчетов обеспечивается необходимая степень однородности распределения плотности тока по аноду. При неоднородном распределении анод максимально нагревается в центре. При температуре $T_a > 1800$ К с поверхности анода испаряются медленные атомы в предельно допустимом количестве, которые ионизуются в плазме ВД. Разряд переходит из диффузной моды в моду с анодным пятном. В этом режиме вакуумный выключатель перестает надежно отключать переменный ток. Чем более однородно распределение тока по поверхности анода, тем больший ток может отключить выключатель.

Целесообразно было бы сравнить результаты расчетов с экспериментом. Однако экспериментальные данные по распределению плотности тока в сильноточной ВД во внешнем однородном магнитном поле отсутствуют. Накопленные экспериментальные данные по отключающей способности (максимальному току отключения) вакуумных дугогасительных камер (ВДК) позволяют создавать в разрядном промежутке приведенное магнитное поле $B_z > 3$ мТл/кА. Считается, что в этом случае распределение плотности тока в плазме ВД близко к однородному. Этот факт согласуется с результатами расчетов, представленных в данной работе на рис. 3.

Для количественного сравнения рассчитанных распределений плотности тока с экспериментальными данными следует провести специальный эксперимент с разрядным промежутком, в котором секционированный анод состоит из системы концентрических колец. Внешнее однородное магнитное поле B_z должно создаваться с помощью катушек Гельмгольца. Ток через каждое кольцо можно измерять поясом Роговского. Одновременно можно проводить скоростную многокадровую фотосъемку катодных пятен (как это делалось в [15, 16]), обработка результатов которой позволяет определить распределение плотности пятен по поверхности катода. Поскольку токи в катодных пятнах одинаковы, то это распределение совпадает с распределением плотности тока на катоде. Такой эксперимент представляет несомненный научный и практический интерес.

Отметим также, что при конструировании ВДК индукторы, создающие магнитное поле B_z, B_r, расположены внутри электродов. Магнитное поле B_z, как правило, заметно уменьшается с ростом r, а B_r увеличивается. На краю электрода значение B_r может превышать B_z. При этом линии тока сильно наклонены к оси, удельное сопротивление плазмы с ростом r резко возрастает. Эти факты могут привести к сильной контракции то-

ка ($f_0 \gg 1$) на аноде. Для расчета распределения плотности тока в плазме с такими индукторами необходимо использовать 2D-модель.

В настоящее время возникла потребность разработки ВДК для электроэнергетики: генераторные выключатели на токи в несколько сотен кА, а также высоковольтные выключатели для напряжений 110 и 220 кВ. Для решения этих весьма сложных задач метод математического расчета распределений плотности тока на стадии разработки особенно эффективен.

Кратко сформулируем основные результаты работы.

1. Развита теория двухмерной аксиально-симметричной ВД, учитывающая магнитное поле, создаваемое током дуги (B_θ), магнитное поле тока Холла ($B_z^{\text{Н}}$, $B_r^{\text{Н}}$) и внешнее магнитное поле (B_z, B_r). Для линий уровня тока получено дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных (2D-модель), сформулированы нелинейные граничные условия.

2. В приближении $j_r \ll j_z$ разработана более простая 1.5D-модель ВД. В этой модели магнитное поле имеет те же компоненты, что и в 2D-модели, однако угол наклона линий тока к оси $\delta \ll 1$. Такую модель удобно использовать для расчетов на стадии конструирования вакуумных дугогасительных устройств для разработки конструкций с достаточно однородным распределением плотности тока $j(r)$.

3. Для расчета распределения температуры электронов в плазме ВД получено интегро-дифференциальное уравнение, учитывающее зависимость коэффициентов теплопроводности и электропроводности от компонентов магнитного поля B_r, B_θ и B_z. Для этих коэффициентов получены аналитические выражения. В уравнении учтено влияние распределения концентрации плазмы на температуру электронов.

4. Для различных значений внешнего аксиального магнитного поля и размеров плазмы рассчитаны распределения компонентов плотности тока ВД (j_r, j_θ, j_z), магнитного поля тока Холла ($B_z^{\text{Н}}$, $B_r^{\text{Н}}$), азимутального магнитного поля B_θ, распределения электронной температуры $t_e(r, z)$ и концентрации плазмы. Расчеты выполнены с учетом нелинейной зависимости анодного падения от плотности тока. Показано, что магнитное поле тока Холла $B_z^{\text{Н}}$, $B_r^{\text{Н}}$ сравнимо с внешним магнитным полем, оно влияет на зависимость $j(r)$. Увеличение индукции внешнего магнитного поля B_z уменьшает контракцию электронного тока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брагинский С.И.* Явления переноса в плазме. В кн.: Вопросы теории плазмы / Под ред. Леонтовича М.А. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183.
2. *Лондер Я.И., Ульянов К.Н.* Кризис течения быстрых ионов в сильноточном вакуумно-дуговом разряде // ТВТ. 2007. Т. 45. № 4. С. 499.
3. *Schade E., Shmelev D.* Numerical Simulation of High-current Vacuum Arcs with an External Axial Magnetic Fild (AMF) // IEEE Trans. Plasma Sci. 2003. V. 31. № 5. P. 890.
4. *Лондер Я.И., Ульянов К.Н.* Двумерная математическая модель короткой вакуумной дуги во внешнем магнитном поле // ТВТ. 2005. Т. 43. № 6. С. 845.
5. *Лондер Я.И., Ульянов К.Н.* Двумерная математическая модель короткой вакуумной дуги во внешнем магнитном поле. Результаты численных расчетов // ТВТ. 2006. Т. 44. № 1. С. 25.
6. *Keidar M., Beilis I., Boxman R.L., Goldmith S.* 2D Expansion of the Low-density Interelectrode Vacuum Arc Plasma Jet in an Axial Magnetic Fields // J. Phys. D: Appl. Phys. 1996. V. 26. P. 1973.
7. *Beilis I., Keidar M., Boxman R.L., Goldmith S.* Theoretical Study of Plasma Expansion in a Magnetic Field in a Disk Anode Vacuum Arc // J. Appl. Phys. 1998. V. 83. № 2. P. 709.
8. *Wang L., Jia S., Shi Z., Rong M.* MHD Simulation of Vacuum Arc under Different AMF // Proc. 21st Int. Symp. on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum. Yalta. Crimea. 2004. P. 197.
9. *Londer Y.I., Ulynov K.N.* Model of Shot Vacuum Arc at Collision Free Motion of Ions // IEEE Trans. Plasma Sci. 2013. V. 41. № 8. P. 1996.
10. *Лондер Я.И., Ульянов К.Н.* Теория отрицательного анодного падения в разрядах низкого давления // ТВТ. 2013. Т. 51. № 1. С. 13.
11. *Лондер Я.И., Ульянов К.Н.* Теоретическое изучение влияния магнитного поля тока Холла на параметры сильноточного вакуумно-дугового разряда // ТВТ. 2008. Т. 46. № 2. С. 185.
12. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. С. 661.
13. *Boxman R.L., Martin P., Sanders D.* Handbook of Vacuum Arc Sience and Technology. Ridge Park, USA: Noyes Publ., 1995.
14. *Boxman R.L., Goldsmith S.* Model of the Anode Region in a Uniform Multi-cathode-spot Vacuum Arc // J. Appl. Phys. 1983. V. 54. № 2. P. 592.
15. *Прозоров Е.Ф., Ульянов К.Н., Федоров В.А., Лондер Я.И.* Изучение процесса обрыва постоянного тока во внешнем неоднородном магнитном поле // ТВТ. 2011. Т. 49. № 5. С. 649.
16. *Прозоров Е.Ф., Ульянов К.Н., Федоров В.А.* Изучение динамики катодных пятен в вакуумно-дуговом разряде с кольцевыми электродами // ТВТ. 2013. Т. 51. № 2. С. 176.