ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 2020, том 58, № 6, с. 885–895

ТЕПЛОМАССООБМЕН И ФИЗИЧЕСКАЯ ГАЗОДИНАМИКА

УДК 532.51

ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ЛОКАЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ВО ВЛАЖНОЙ АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

© 2020 г. О. А. Синкевич[1], *, Г. О. Зинченко[1]

[1]*Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва, Россия*

**E-mail: oleg.sinkevich@itf.mpei.ac.ru*

Поступила в редакцию 19.08.2019 г.
После доработки 12.12.2019 г.
Принята к публикации 10.03.2020 г.

Исследуется устойчивость слоя влажного воздуха, находящегося над нагретой поверхностью суши или океана, при внезапном воздействии внутренних источников тепловыделения, зависящих от давления и плотности. Для малых трехмерных возмущений во вращающейся атмосфере получено дисперсионное уравнение. Оно содержит известные ранее волны – акустические, внутренние волны, волны Брента–Вяйсяля – и позволяет получить модифицированный критерий возникновения конвективной неустойчивости. Это дисперсионное уравнение позволяет также исследовать влияние внутренних тепловыделений на динамику возмущения в этих волнах, включая условия возникновения неустойчивости, генерируемой атмосферным электрическим разрядом. Учет новых рассматриваемых эффектов может приводить к выявлению новых неустойчивостей и модифицировать ранее известные. Предложенная система уравнений позволяет проводить численные расчеты вихревых течений во влажном воздухе в приповерхностном слое и более детально исследовать механизмы зарождения ураганов и торнадо.

DOI: 10.31857/S0040364420060204

ВВЕДЕНИЕ

Различного типа волны, возникающие в неоднородной атмосфере Земли, начиная с работ Гельмгольца, Кельвина, Рэлея и Лэмба, широко обсуждаются в литературе [1–10]. Результаты, относящиеся к внутренним гравитационным волнам, подробно разобраны в [2]. Влияние вязкости и теплопроводности на распространение волн в атмосфере рассмотрено в [6] и [9], где исследование проводится для изотермической атмосферы. Основным механизмом, учтенным в перечисленных работах, приводящим к возникновению и распространению возмущений, является неоднородность по высоте исходного стационарного фона и наличие сдвига горизонтальной скорости среды [2].

В данной работе анализируются динамические процессы в сжимаемых средах, когда возникают спонтанные источники тепловыделения (поглощения) $Q(\rho, P)$, отсутствующие в стационарной, неоднородной атмосфере Земли. Такими источниками могут быть: а) примеси, находящиеся в воздухе (газовая фаза) в виде твердых частичек (льда) и жидких капель воды, которые приводят к генерации фазовых переходов (испарение, конденсация, сублимация); б) тепловыделение от локальных электрических разрядов, вызывающих испарение влаги в разрядной стадии и ее конденсацию после окончания разряда. Подобные процессы возникают при протекании различного рода электрических разрядов включая молнии, когда протекание электрического тока приводит к джоулеву нагреву и испарению большого количества влаги. Источником рассматриваемых возмущений могут быть также микрометеориты, влетающие и сгорающие в плотных слоях атмосферы, или взрывы спутников, ракет и т.п.

Целью данной работы является анализ влияний спонтанных источников тепловыделения на распространение волн и устойчивость стационарного состояния среды и получение аналитических формул, позволяющих оценить времена развития неустойчивостей в рамках возмущений малой амплитуды. Представленная система уравнений позволяет также проводить численные расчеты динамики возмущений конечной амплитуды вихревых течений во влажном воздухе с учетом внутренних источников различного типа, наличия сдвига горизонтальной скорости среды, неколлинеарности стационарных профилей давления и плотности и более детально исследовать механизмы зарождения торнадо.

СТАЦИОНАРНЫЙ ФОН

Хорошо известно, что развитие возмущений зависит не только от источников, генерирующих эти возмущения, но и от вида стационарного фона, на котором они развиваются [3, 11]. Рассмотрим устойчивость плоского бесконечно протяженного слоя толщиной h, заполненного влажным воздухом, относительно трехмерных малых возмущений. В исходном стационарном состоянии профили давления, температуры и плотности неоднородны по высоте: $P_0(z), T_0(z), \rho_0(z)$. Исследование выполняется в декартовой системе координат: ось x направлена на восток, y – на север, z – к локальному зениту. В данном анализе рассматриваются длинноволновые возмущения, поэтому в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью учитываются силы тяжести $\vec{g}(0,0,-g)$ и Кориолиса $\rho[\mathbf{\Omega}_C \times \mathbf{v}]; \mathbf{\Omega}_C = 2\mathbf{e}_z\Omega_0 \sin(\alpha)$. Здесь α – широтный угол, $\Omega_0 = 0.73 \times 10^{-4}$ рад/с – угловая скорость вращения Земли, $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор вдоль вертикали к поверхности Земли.

В отличие от работы [10] стационарная среда считается неподвижной (не учитывается зависимость геопотенциала от координаты). Рассматривается специальный случай, когда в стационарном состоянии в среде выполняется силовое равновесие

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = -\rho_0 g, \tag{1}$$

а связь между плотностью и давлением зависит от вида протекающих в атмосфере процессов.

Процессы в атмосфере адиабатические S_0 = const. В этом случае при решении системы уравнений (1) можно воспользоваться связью $\frac{P_0(z)}{P_0(0)} = \left(\frac{\rho_0(z)}{\rho_0(0)}\right)^{\gamma}$. Тогда распределения давления, температуры и плотности по высоте описываются следующими уравнениями:

$$\begin{gathered}\frac{P_0(z)}{P_0(0)} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{gz}{R_g T_0(0)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \approx 1 - \frac{gz}{R_g T_0(0)},\\ \frac{T_0(z)}{T_0(0)} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{gz}{R_g T_0(0)},\\ \frac{\rho_0(z)}{\rho_0(0)} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{gz}{R_g T_0(0)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \approx 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{gz}{R_g T_0(0)},\\ \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = \left(\frac{1}{p_0}\frac{\partial p_0}{\partial z}\right)^{\frac{1}{\gamma}},\end{gathered} \tag{2}$$

где g – ускорение силы тяжести, S_0 – энтропия, γ – показатель адиабаты, R_g – газовая постоянная влажного воздуха.

Процессы в неподвижной атмосфере не являются адиабатическими $\frac{\partial S_0}{\partial z} \neq 0$. В этом случае считается, что выполняется условие равновесия (1), и из наблюдений известны распределения $T_0(z)$, $P_0(z), S_0(z)$.

Считается, что в начальный момент времени в неподвижной среде источники (стоки) тепловыделения $Q(\rho_0, P_0) = 0$ отсутствуют. Однако из-за того, что $\left(\frac{\partial Q}{\partial \rho}\right)_{P_0} \neq 0$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_{\rho_0} \neq 0$, при возникновении даже малых возмущений стационарного состояния эти источники оказывают влияние на состояние атмосферы.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

При анализе устойчивости исходного стационарного состояния $f_0(z)$ зависимая переменная представляется в виде суммы

$$f(\mathbf{r}, t) = f_0(z) + f'(x, y, z, t),$$

где $f_0(z)$ – известное стационарное значение, $f'(x, y, z, t)$ – возмущения (далее знак ' опускается). Без учета сдвига горизонтальной скорости течения исходя из общей системы уравнений сплошной среды и, ограничиваясь только линейными по возмущениям членами, получим следующую систему уравнений для возмущений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}) = 0, \tag{3}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p - [\mathbf{\Omega}_C \times \rho_0 \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g}, \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial T_0}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial p_0}{\partial z}\right) =\\ = \rho_0 \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho}\right)_p \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_\rho \frac{\partial p}{\partial t},\end{gathered} \tag{5}$$

$$P = R_g(T_0\rho + \rho_0 T) - P_0. \tag{6}$$

Если источники (стоки) тепловыделения $Q(p, T)$ зависят от давления и температуры, то их попрежнему можно свести к форме, приведенной в (5), используя уравнение состояния (6).

Аналогично [6], выделяя в горизонтальной составляющей скорости потенциальную и вихревую компоненты, можно записать поток массы в следующем виде:

$$\begin{gathered}\rho_0 \mathbf{v} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \rho_0 w\right) \equiv\\ \equiv \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}, G\right).\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $\Phi(x,y,z,t), \Psi(x,y,z,t)$ – неизвестные функции, через которые, согласно (7), выражаются горизонтальные потоки массы.

Поиск решения системы уравнений (3)–(6) осуществляется с помощью представления зависимости каждой функции $F(x,y,z,t)$ от координат и времени в виде

$$F(x,y,z,t) = f(z)\exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + \omega t),$$
$$G(x,y,z,t) = \varsigma(z)\exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + \omega t).$$

Здесь $\mathbf{r}_\perp(x,y,0)$; $\mathbf{k}_\perp(k_x,k_y,0)$; $-\infty < k_x < \infty$, $-\infty < k_y < \infty$ – координаты волнового вектора в горизонтальной плоскости Земли. Представление зависимости решения системы (3)–(6) от горизонтальных координат $\mathbf{r}$ в виде (8) – $\exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp)$ означает использование периодических граничных условий по этим координатам. С помощью уравнения состояния (6) можно выразить возмущение температуры через возмущения давления и плотности. Затем, используя уравнения (3)–(5), выразить все остальные функции через $\zeta(z)$. Такой подход позволяет для длинноволновых возмущений свести анализ всей системы (3)–(5) к решению одного уравнения для функции $\zeta(z)$ (см. Приложение 1):

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} - \frac{g\chi_p + F}{\chi_\rho a_s^2}\frac{d\zeta}{dz} - \left[\frac{k^2}{\omega^2+\Omega_C^2}\left(\omega^2 - \frac{Fg}{a_s^2}\frac{1}{\chi_\rho}\right) - \frac{\chi_p\omega^2}{\chi_\rho a_s^2}\right]\zeta - \hat{H}\zeta = 0, \tag{8}$$

где

$$\hat{H} = \left(\frac{\omega^2+\Omega_C^2}{k^2 a_s^4}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\chi_p a_s^2 k^2}{\left[\chi_\rho a_s^2 k^2 - \frac{\chi_p(\omega^2+\Omega_C^2)}{}\right]}\right)\frac{\partial a_s^2}{\partial z}\frac{d}{dz} + \frac{1}{\chi_\rho}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{F}{a_s^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\chi_p}{\chi_\rho}\left(\frac{\chi_\rho a_s^2 k^2}{\left[\chi_\rho a_s^2 k^2 - \frac{\chi_p(\omega^2+\Omega_C^2)}{}\right]}\right)\frac{F}{a_s^2}\frac{\omega^2+\Omega_C^2}{k^2 a_s^4}\frac{\partial a_s^2}{\partial z}\right],$$
$$k^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Уравнение (8) описывает ряд явлений в атмосфере планеты, не изучавшихся ранее с учетом спонтанных внутренних тепловыделений, отражаемых параметрами χ_p, χ_ρ. С точностью до малого параметра $\frac{g}{a_s^2 F}\frac{\partial F}{\partial z} \ll 1$ слагаемым $\hat{H}\zeta$ в (8) можно пренебречь, поэтому далее используется уравнение

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} - \frac{g\chi_p + F}{\chi_\rho a_s^2}\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \left[\frac{k^2}{\omega^2+\Omega_C^2}\left(\omega^2 - \frac{Fg}{a_s^2}\frac{1}{\chi_\rho}\right) - \frac{\chi_p\omega^2}{\chi_\rho a_s^2}\right]\varsigma = 0. \tag{9}$$

Здесь $F = \frac{(\gamma-1)a_s^2}{\gamma R_g}\frac{dS_0}{dz}$, $\chi_\rho = \left[\frac{1-\gamma}{a_s^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial \rho}\right)_p - 1\right]$, $\chi_p = \left[1-(\gamma-1)\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_\rho\right]$, S_0 – энтропия воздуха, $a_s = \sqrt{R_g T}$ – скорость звука, γ – показатель адиабаты, R_g – газовая постоянная влажного воздуха. Граничные условия для уравнения (9) зависят от конкретной физической задачи.

Далее рассмотрим процессы в слое толщиной h, находящемся над твердой поверхностью. Когда нижняя граница непроницаема, а на верхней границе поток массы экстремален, уравнение (9) решается со следующими условиями:

$$\zeta_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|_{z=h} = 0. \tag{10}$$

В других режимах, когда на нижней границе слоя происходит интенсивное испарение влаги (например, поверхность океана), а верхняя граница непроницаема или возмущения на ней стремятся к нулю, граничные условия сводятся к следующим:

$$\left.\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|_{z=0} = b\zeta_{z=0}, \quad \left.\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|_{z=h} = 0$$

или

$$\left.\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|_{z=0} = b\zeta_{z=0}, \quad \zeta(z\to 0)\to 0,$$

где b – коэффициент массообмена, учитывающий интенсивность образования потока массы на водной поверхности.

Для анализа устойчивости перейдем к безразмерным переменным:

$$\tilde{z} = \frac{g}{a_s^2}z, \quad \tilde{\zeta} = \frac{\zeta(\tilde{z})}{\rho_0 a_s}, \quad \tilde{F} = \frac{F}{g}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\Omega_C},$$
$$\tilde{k}^2 = k^2\frac{a_s^4}{g^2}, \quad W^2 = \frac{\Omega_C^2 a_s^2}{g^2}, \tag{11}$$

и, опуская далее тильду над безразмерными переменными, перепишем уравнение (8) и граничные условия (10) в виде

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} - \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\chi_p + F}{\chi_\rho} - \left[\frac{k^2}{\omega^2+1}\left(\omega^2 - \frac{1}{W^2}\frac{F}{\chi_\rho}\right) - \omega^2 W^2\frac{\chi_p}{\chi_\rho}\right]\zeta = 0, \tag{12}$$

$$\zeta(z=0)=0,\quad \left.\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|_{z=\frac{gh}{a_s^2}}=0. \tag{13}$$

С заменой переменных $\zeta(z)=f(z)\exp(\alpha z)$ уравнения (12), (13) сводятся к

$$f''+\Lambda^2 f=0, \tag{14}$$

$$f(0)=0,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial\tilde{z}}\right|_{\tilde{z}=\frac{gh}{a_s^2}}+\alpha f\left(\frac{gh}{a_s^2}\right)=0, \tag{15}$$

где

$$\Lambda^2=-\left[\frac{k^2}{\omega^2+1}\left(\omega^2-\frac{1}{W^2}\frac{F}{\chi_\rho}\right)-\omega^2W^2\frac{\chi_p}{\chi_\rho}+\alpha^2\right],$$

$$\alpha=\frac{\chi_p+F}{2\chi_\rho}.$$

Функции F,χ_p,χ_ρ можно определить, используя данные наблюдений о состоянии атмосферы. Изменения по высоте профилей давления, температуры, плотности $(P_0(z),T_0(z),\rho_0(z))$ и величин $\left(\frac{\partial Q}{\partial\rho}\right)_{P_0}\neq 0$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_{\rho_0}\neq 0$ зависят от состояния атмосферы Земли и могут иметь разные значения в различные сезоны и времена суток (Приложение 2). Для приближенных оценок можно воспользоваться либо уравнениями (2), либо усредненными по времени значениями (Приложение 2). В общем случае коэффициенты уравнения (12) ($a_s^2=R_gT(z)$, $F=\frac{(\gamma-1)a_s^2}{\gamma R_g}\frac{dS_0}{dz}$, χ_ρ,χ_p) и, следовательно, (14) зависят от координаты z. Однако при выполнении неравенства

$$S_0(z)\Big/\frac{dS_0}{dz}\gg h$$

их в первом приближении можно принять постоянными. Если это неравенство не выполнено, то при аналитическом решении задачи слой h разбивается на серию слоев m: $h=\sum_{i=1}^m h_i$, так чтобы внутри каждого слоя выполнялось условие

$$S_0(z)\Big/\frac{dS_0}{dz}\gg h_i,\quad h_{i-1}\le z\le h_i.$$

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И АНАЛИЗ ЕГО КОРНЕЙ

Решение уравнения (14) представляется в виде

$$f(z)=C_1\sin(\Lambda z)+C_2\cos(\Lambda z).$$

Из граничных условий (15) находим

$$C_2=0,\quad \Lambda=\frac{a_s^2}{gh}\pi\left(\frac{1}{2}+n\right),\quad n=0,1,\ldots,\infty.$$

Используя соотношение (18), находим дисперсионное уравнение

$$D(\omega,k)\equiv\omega^4+\omega^2\left[1-\frac{\chi_\rho}{W^2\chi_p}(\Lambda^2+k^2+\alpha^2)\right]-$$
$$-\frac{\chi_\rho}{W^2\chi_p}\left[\alpha^2+\Lambda^2-\frac{k^2}{W^2}\frac{F}{\chi_\rho}\right]=0.$$

Учитывая, что в атмосфере Земли параметр $W^2=\frac{\Omega_C^2a_s^2}{g^2}\approx 10^{-5}$ мал, удобно провести переопределение безразмерной частоты $\breve{\omega}=\frac{\omega}{g}\Omega_Ca_s$ и далее использовать дисперсионное уравнение $D(\breve{\omega},k)$ в виде

$$D(\breve{\omega},k)\equiv\breve{\omega}^4+\breve{\omega}^2\left[W^2-\frac{\chi_\rho}{\chi_p}\left(\Lambda^2+k^2+\alpha^2\right)\right]-$$
$$-\frac{\chi_\rho}{\chi_p}\left[W^2\left(\alpha^2+\Lambda^2\right)-k^2\frac{F}{\chi_\rho}\right]=0. \tag{16}$$

Корни дисперсионного уравнения (16), зависящие от параметров задачи (k,χ_p,χ_ρ,F) и определяющие поведение возмущений во времени, имеют простой вид

$$\breve{\omega}^2(k,\chi_p,\chi_\rho,F)=-\frac{1}{2}\left[W^2-\frac{\chi_\rho}{\chi_p}\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right)\right]\pm$$
$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left[W^2-\frac{\chi_\rho}{\chi_p}\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right)\right]^2+\frac{4\chi_\rho}{\chi_p}\left[W^2(\alpha^2+\Lambda^2)-k^2\frac{F}{\chi_\rho}\right]}. \tag{17}$$

Данная формула позволяет описать целый ряд процессов, происходящих во влажной, неоднородной по высоте атмосфере, и может быть использована для анализа явлений в атмосферах других планет Солнечной системы. Подчеркнем еще раз, что в качестве внутренних источников теплоты могут выступать не только процессы фазовых переходов, но и поглощение или генерация излучения, джоулев нагрев (когда в слое может протекать электрический ток). Учет электриче-

ского тока существенен для анализа устойчивости грозового облака [9].

Изменяя безразмерные переменные (11), можно рассмотреть процессы с характерными временами, различающимися на четыре порядка.

Далее исследуем ряд частных случаев для характерных параметров атмосферы Земли ($a_s \approx$ ≈ 320 м/с, $h = 7000$ м).

Тепловыделение и неоднородность температуры и давления отсутствуют. Если тепловыделение $Q = 0\left(\chi_p = 1, \chi_\rho = -1\right)$ и неоднородности температуры и давления отсутствуют $F = 0$, безразмерные коэффициенты в (17) принимают вид

$$\tilde{k}^2 = k^2 \frac{a_s^4}{g^2}, \quad W^2 = \frac{\Omega_C^2 a_s^2}{g^2} \approx 10^{-5},$$

$$\Lambda^2 = \left(\frac{a_s^2}{gh}\frac{\pi}{2}\right)^2 \approx 5.5, \quad \alpha = \frac{\chi_p + F}{2\chi_\rho} = -\frac{1}{2}.$$

В этом случае с учетом $W^2 \approx 10^{-5} \ll 1$ корни дисперсионного уравнения (17) записываются в виде

$$\breve{\omega}^2 = -\frac{1}{2}\left[\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2 + W^2\right] \pm$$
$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2 + W^2\right]^2 - 4W^2\left(\alpha^2 + \Lambda^2\right)} \approx$$
$$\approx -\frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2\right) \times$$
$$\times \left\{1 \pm \sqrt{\left[1 - 2W^2\left(\alpha^2 + \Lambda^2\right)\Big/\left(\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2\right)^2\right]}\right\},$$
$$\omega_1^2 \approx -\left(\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2\right),$$
$$\omega_2^2 \approx -W^2\left(\alpha^2 + \Lambda^2\right)\Big/\left(\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2\right).$$

Первая мода колебания, записанная в размерном виде:

$$\omega_{1n}^2 \approx -a_s^2\left(g^2 a_s^{-4} + \left(\pi/2 + \pi n\right)^2 h^{-2} + k^2\right), \quad n = 0, 1, \ldots, \infty, \tag{18}$$

описывает акустические колебания воздуха в слое толщиной h при наличии силы тяжести.

Вторая мода, записанная в размерном виде:

$$\omega_{2n}^2 \approx -\Omega_C^2\left(g^2 a_s^{-4} + (\pi/2 + \pi n)^2 h^{-2}\right)\Big/\left(g^2 a_s^{-4} + \right.$$
$$\left. + \left(\pi/2 + \pi n\right)^2 h^{-2} + k^2\right),$$

при выполнении неравенств $g^2 a_s^{-4} \gg \left(\pi/2 + \pi n\right)^2 h^{-2}$ и $k^2 \gg g^2 a_s^{-4}$ сводится к

$$\omega_{2n} = i\Omega_C \frac{g}{a_s^2 k}. \tag{19}$$

Мода ω_{2n} описывает колебания однородного слоя воздуха как целого под воздействием сил Кориолиса.

Существование вращательной неустойчивости, отмеченной в [8]. При условиях $Q = 0$ $\left(\chi_p = 1, \chi_\rho = -1\right)$ уравнение (9) сводится к уравнению (11) работы [8], если в нем пренебречь изменением скорости звука с высотой. Используя модельные представления о характере изменения скорости звука с высотой, автор [8] получил инкремент неустойчивости, названной вращательной:

$$\omega \approx \frac{\gamma - 1}{\gamma}\Omega_C \frac{g}{a_s^2 k}. \tag{20}$$

Согласно [8] обнаруженная вращательная неустойчивость связана с изменением скорости звука с высотой, однако формулы (19) и (20) различаются только множителем i и в (20) не входят какие-либо характеристики, связанные с изменением скорости звука. Следует отметить, что использованное автором выражение для скорости звука (см. формулу (2) работы [8]) отличается от стандартного термодинамического выражения $a_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{s=\text{const}}} = \sqrt{R_g T}$. В состоянии локального термодинамического равновесия скорость звука изменяется пропорционально $\sqrt{T_0(z)}$.

Если решить дифференциальное уравнение (11) работы [8], пренебрегая изменением скорости звука с высотой, то снова приходим к (19), демонстрирующей отсутствие вращательной неустойчивости, выявленной в [8].

Тепловыделения в неоднородной среде отсутствуют. В этом случае не учитывается тепловыделение, но принимаются во внимание неоднородность температуры и давления по высоте. С учетом характерных значений остальных безразмерных параметров корни дисперсионного уравнения (17) определяются выражением

$$\breve{\omega}^2\left(k, F\right) = -\frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2\right) \pm$$
$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2\right)^2 - 4\left[W^2(\alpha^2 + \Lambda^2) + k^2 F\right]}.$$

При выполнении условий

$$\left[W^2(\alpha^2 + \Lambda^2) - k^2 F\right] \ll (\alpha^2 + \Lambda^2 - k^2)^2, \quad W^2(\alpha^2 + \Lambda^2) \ll k^2 F) \tag{21}$$

корни уравнения (17) можно записать в удобном для дальнейшего анализа виде

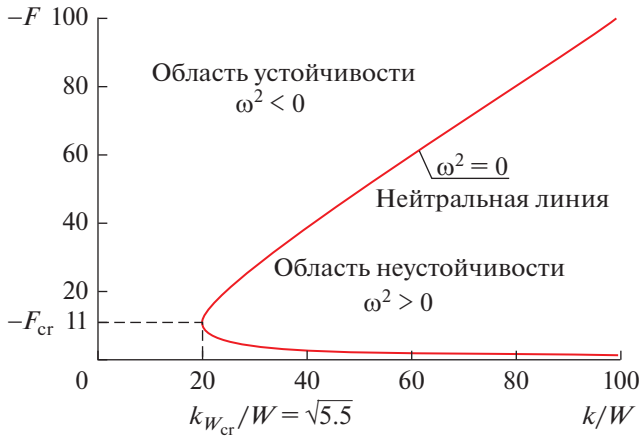

Рис. 1. Нейтральная линия $\omega^2 = 0$ при $\Lambda = 5.5$.

$$\breve{\omega}_3^2 = -(\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2) + \\ + \left[W^2(\alpha^2 + \Lambda^2) + k^2 F\right] \Big/ (\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2) \approx \\ \approx -(\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2),$$

$$\breve{\omega}_4^2 = -\left[W^2(\alpha^2 + \Lambda^2) + k^2 F\right] \Big/ (\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2).$$

Мода $\breve{\omega}_3^2 = \breve{\omega}_1^2$ аналогична соотношению (18) и представляет собой акустические колебания воздуха в слое толщиной h при наличии силы тяжести. Мода $\breve{\omega}_4^2$ демонстрирует влияние силы Кориолиса на внутренние гравитационные волны и условия возникновения конвекции. В частных случаях $W = 0$ и $k^2 \gg \alpha^2 + \Lambda^2, -F < 0$ или $\dfrac{dS_0}{dz} > 0$ эта мода в размерной форме имеет вид

$$\omega_{4n}^2 \approx -g\left(\frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dz} - \frac{\gamma - 1}{\gamma P_0}\frac{dP_0}{dz}\right) = -g\frac{\gamma - 1}{R_g \gamma}\left|\frac{dS_0}{dz}\right|$$

и описывает внутренние гравитационные волны-колебания Брента–Вяйсяля [2].

При условии

$$F \approx \frac{dS_0}{dz} < 0$$

происходит нарастание возмущения – образуется неустойчивость, связанная с возникновением конвекции в атмосфере. Если данное неравенство записать в другом виде, то условие возникновения конвекции сводится к хорошо известному критерию Шварцшильда:

$$\frac{dT_0(z)}{dz} < 0, \quad \left|\frac{dT_0(z)}{dz}\right| > \frac{g}{C_p}.$$

С учетом силы Кориолиса $W \neq 0$ из (21) условие возникновения неустойчивости атмосферы

$$\left[W^2(\alpha^2 + \Lambda^2) + k^2 F\right] \Big/ (\alpha^2 + \Lambda^2 + k^2) < 0$$

в пространстве параметров F, k, Λ, W представляет собой поверхность ("нейтральную кривую"), отделяющую области устойчивости $W^2(\alpha^2 + \Lambda^2) + k^2 F > 0$ от областей неустойчивости $W^2(\alpha^2 + \Lambda^2) + k^2 F < 0$:

$$W^2(\alpha^2 + \Lambda^2) + k^2 F = \\ = W^2[(1 + F)^2 + 4\Lambda^2] + 4k^2 F = 0. \tag{22}$$

На рис. 1 в пространстве параметров задачи (k, F) показано поведение нейтральной кривой $k_W^2 = f(-F)$, получаемой из условия $\omega^2(k_W^2, -F) = 0$. При выполнении условий $Q = 0$, $\chi_\rho = -1$, $\chi_P = 1$, $\tilde{F} \neq 0$ критические значения волнового числа $k_{W\text{cr}}$ и величины F_{cr} находятся из условия (22) и имеют вид

$$F_{\text{cr}} = -\sqrt{(1 + 4\Lambda^2)} \approx -2\Lambda,$$

$$k_{W\text{cr}} = W\sqrt{[8\Lambda^2 + 2 - 2\sqrt{(1 + 4\Lambda^2)}] \Big/ \sqrt{(1 + 4\Lambda^2)}} \Big/ 2 \approx \\ \approx W\sqrt{\Lambda}.$$

Полученные здесь результаты хорошо демонстрируют влияние вращения атмосферы ($W \neq 0$) на возникновение конвекции в атмосфере. При $W \neq 0$ критерий Шварцшильда $F < 0$ остается необходимым, а достаточное условие принимает вид

$$k > k_{W\text{cr}}, \quad -F_{\max}(k^2, W) < -F < -F_{\min}(k^2, \Lambda, W), \tag{23}$$

где

$$F_{\max}(k^2, W) = 4k^2 \big/ W^2, \quad F_{\min}(k^2, \Lambda, W) = W^2\Lambda^2 \big/ k^2.$$

При $W \to 0$

$$k_{W\text{cr}} \to 0, \quad F_{\max}(k^2, W) \to 0, \quad F_{\min}(k^2, \Lambda, W) \to \infty$$

и условие (23) сводится к критерию Шварцшильда.

Из неравенств (23) следует, что во вращающейся атмосфере $W \neq 0$ при $k > k_{W\text{cr}}$ с ростом градиента температуры $|-F| > |-F_{\text{cr}}|$ происходит стабилизация конвективной неустойчивости (рис. 1).

Данные об изменении параметра F в реальной атмосфере, приведенные на рис. 2 (Приложение 2), показывают, что условия для возникновения конвективной неустойчивости [2], связанной с неоднородностью атмосферы $|-F| > |F_{\text{cr}}| \approx 20$, реализуются.

Учет вязкости $\eta = \mu/\rho$ и теплопроводности $\chi = \lambda/\rho c_v$ в системе уравнений (3)–(6) приведет к ограничению области неустойчивости ($\omega > 0$), изображенной на рис. 1, в диапазоне больших волновых чисел (малых длин волн) $k > \sqrt{\left|\dfrac{\gamma - 1}{R_g \gamma}\dfrac{dS_0}{dz}\right| g/\eta_m}$, где $\eta_m = \max(\eta, \chi)$.

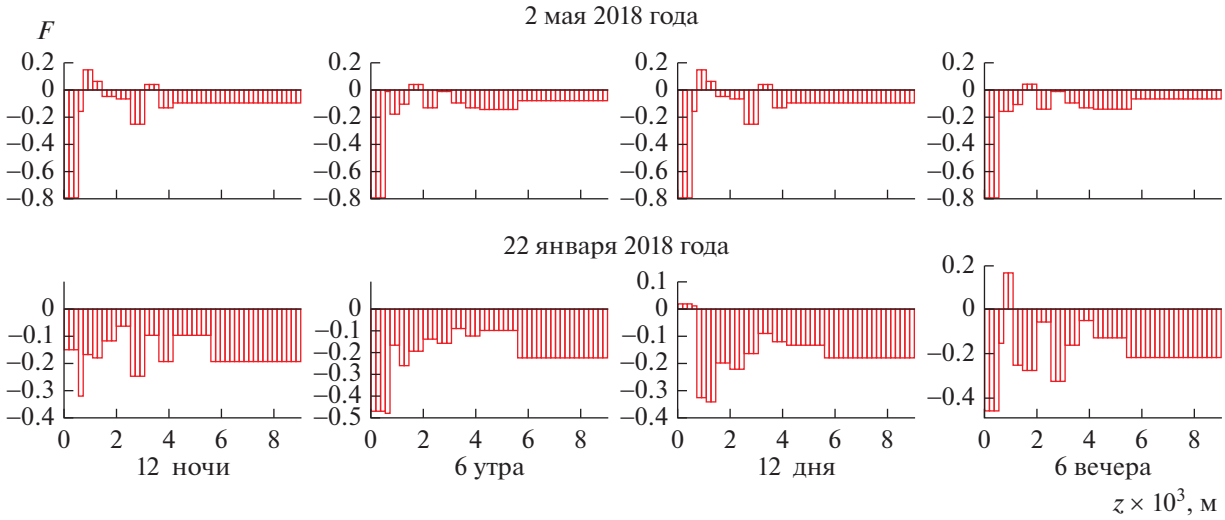

Рис. 2. Изменение параметра F в атмосфере Земли в различные периоды времени.

Влияние тепловыделения и неоднородностей температуры и давления на устойчивость атмосферы. Рассмотрим более детально общий случай, в котором учитываются тепловыделения, связанные с появлением источников возмущений. Такие процессы возникают в атмосфере с неоднородностью температуры и давления по высоте при испарении или конденсации влаги, при джоулевом нагреве от электрического разряда. В таких процессах вклад источников тепловыделения удовлетворяет условию $Q(P_0,\rho_0)/T_0\dfrac{dS_0}{dz}h = \varepsilon \ll 1$, и поэтому с точностью до малого параметра можно рассмотреть случай, когда в системе (1), определяющей исходные стационарные состояния (P_0,ρ_0,T_0), полагается $Q(P_0,\rho_0) = 0$, но в возмущениях $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial \rho}\right)_{P_0} \neq 0, \left(\dfrac{\partial Q}{\partial P}\right)_{\rho_0} \neq 0$. Анализ корней (17) дисперсионного уравнения (16) демонстрирует широкое разнообразие в поведении возмущений в атмосфере в зависимости от соотношения между параметрами задачи $W, F, \chi_\rho, \chi_P, k, \Lambda$.

В частном случае в данной задаче имеет место принцип смены устойчивости. При $W = \text{const}$ в пятимерном пространстве параметров $(F, \chi_\rho, \chi_P, k, \Lambda)$ существует поверхность, отделяющая области устойчивости от областей неустойчивости. Эта поверхность получается из условия

$$\operatorname{Re}\omega(F,\chi_\rho,\chi_P,k,\Lambda) = 0.$$

При $\Lambda = \text{const}$ в двумерном пространстве (F, k) нейтральная кривая $-F = f(k)$

$$\operatorname{Re}\omega(F,\chi_\rho = -1,\ \chi_P = 1,\ k,\Lambda = \sqrt{5.5} = \text{const}) = 0$$

изображена на рис. 1.

Используя это условие и найденные корни уравнения (16), можно рассчитать границу возникновения неустойчивости атмосферы.

Чтобы кратко продемонстрировать влияние тепловыделений, можно рассмотреть более детально частный случай неподвижной атмосферы $W = 0$, когда источник зависит только от давления: $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial \rho}\right)_{p_0} = 0, \chi_\rho = -1, \left(\dfrac{\partial Q}{\partial P}\right)_{\rho_0} > 0,\ \chi_p > 0$. В этом случае корни (17) дисперсионного уравнения (16) принимают вид

$$\breve{\omega}^2(k,\chi_p,F) = -\frac{1}{2\chi_p}\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right) \pm \pm\frac{1}{2}\sqrt{\left[-\frac{1}{\chi_p}\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right)\right]^2 - \frac{4k^2F}{\chi_p}}. \tag{24}$$

Если выполняются условия

$$\chi_p > 0,\quad F < 0,\quad \left[\frac{1}{\chi_p}\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right)\right]^2 + \frac{4k^2|F|}{\chi_p} > 0,$$

одна из мод является неустойчивой и возмущение нарастает с инкрементом

$$\operatorname{Re}\breve{\omega}_1(k,\chi_p,F) = = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{1}{\chi_p}\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right)\right]^2 + \frac{4k^2|F|}{\chi_p}} - -\frac{1}{2\chi_p}\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right)\right\}^{1/2}. \tag{25}$$

При условии $\left[-\frac{1}{\chi_p}\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right)\right]^2 \gg \frac{4k^2F}{\chi_p}$ инкремент не зависит от переменной χ_p:

$$\breve{\omega}_1(k,F)=\sqrt{-\frac{k^2F}{\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right)}}.$$

При условии $\left[-\frac{1}{\chi_p}\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right)\right]^2 < \frac{4k^2F}{\chi_p}$ эта мода является неустойчивой и возмущение нарастает с инкрементом:

$$\operatorname{Re}\breve{\omega}_1(k,\chi_p,F)\approx\left\{\frac{1}{2}\frac{4k^2|F|}{\chi_p}\right\}^{1/4}.$$

Для этого случая инкремент зависит от переменной χ_p и ее рост параметра приводит к снижению инкремента.

Другая мода уравнения (24) соответствует колебаниям с частотами:

$$\breve{\omega}_1(k,\chi_p,F)=$$
$$=\pm i\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{1}{\chi_p}\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right)\right]^2+\frac{4k^2|F|}{\chi_p}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\chi_p}\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right)\right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим два других конкретных примера влияния тепловыделения на устойчивость неоднородной атмосферы.

1) $\left(\frac{\partial Q}{\partial\rho}\right)_{p_0}=0$, $\chi_\rho=-1$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_{\rho_0}>0$. Возмущения создаются находящимися в воздухе в виде твердых частичек (льда) и (или) жидких капель воды примесями. В этом случае источниками возмущений являются фазовые переходы (испарение, конденсация, сублимация) в атмосфере. В данном простейшем случае они могут быть представлены в виде

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_{\rho 0}=h_{LG}\frac{1}{R_g\rho}\frac{\partial(\rho_w f)}{\partial T},$$
$$\chi_P=1+h_{LG}\frac{1}{R_g\rho}\frac{\partial(\rho_w f)}{\partial T}.$$

Здесь $f=\frac{P_w}{P_{ws}}$ – влажность воздуха; P_w – давление водяных паров; P_{ws} – давление насыщения водяных паров; ρ – плотность влажного воздуха; ρ_w – плотность паров воды; h_{LG} – теплота парообразования (конденсации), Дж/кг; R_g – газовая постоянная влажного воздуха, Дж/(кг К).

При

$$F<0,\quad \frac{\partial(\rho_w f)}{\partial T}>0, \tag{26}$$

возникает неустойчивость, инкремент которой может быть определен из уравнения (25). Если наряду с неравенством (26) выполняются условия

$$1<h_{LG}\frac{1}{R_g\rho}\frac{\partial(\rho_w f)}{\partial T},$$
$$\left[\frac{1}{\chi_p}\left(\alpha^2+\Lambda^2+k^2\right)\right]^2 \ll \frac{4k^2|F|}{\chi_p},$$

то инкремент равен

$$\breve{\omega}_1(k,\chi_p,F)\approx\sqrt{\frac{k^2|F|}{1+h_{LG}\frac{1}{R_g\rho}\frac{\partial(\rho_w f)}{\partial T}}}.$$

При

$$F<0,\quad \frac{\partial(\rho_w f)}{\partial T}<0,$$
$$\text{но}\quad 1>h_{LG}\frac{1}{R_g\rho}\left|\frac{\partial(\rho_w f)}{\partial T}\right|\to 1,$$

для коротковолновых возмущений неустойчивость развивается очень быстро.

2) Источником возмущений является джоулев нагрев, генерируемый электрическим током атмосферного электрического разряда [11, 12].

В этом случае источник возмущений может быть представлен в виде

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_{\rho 0}=E^2\left[\frac{1}{R_g\rho}\frac{\partial\sigma(T,P)}{\partial T}+\frac{\partial\sigma(T,P)}{\partial P}\right],$$
$$\chi_P=1+E^2\left[\frac{1}{R_g\rho}\frac{\partial\sigma(T,P)}{\partial T}+\frac{\partial\sigma(T,P)}{\partial P}\right].$$

Здесь $\sigma(T,P)$ – электропроводность воздуха, $E=\sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau(E(\tau'))^2d\tau'}$ – средняя напряженность электрического поля в разряде.

При развитии электрического разряда в атмосфере электропроводность воздуха возникает не только за счет ионизации атомов азота и кислорода, но и из-за наличия в воздухе фрагментов, содержащих щелочные металлы. В большинстве важных случаев

$$\frac{1}{R_g\rho}\frac{\partial\sigma(T,P)}{\partial T}+\frac{\partial\sigma(T,P)}{\partial P}>0.$$

При электрическом разряде в атмосфере возникают возмущения, инкремент которых равен

$$\breve{\omega}_1(k,\chi_p,F,E) \approx \approx \sqrt{\frac{k^2|F|}{1+E^2\left[\frac{1}{R_g\rho}\frac{\partial\sigma(T,P)}{\partial T}+\frac{\partial\sigma(T,P)}{\partial P}\right]}}.$$

Отметим, что случаи $\left(\frac{\partial Q}{\partial\rho}\right)_{p_0} < 0$, $\chi_\rho < 0$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_{\rho_0} < 0$ и $\chi_p \to 0$ требуют специальных рассмотрений, которым посвящено отдельное исследование с использованием дисперсионного уравнения (16).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование устойчивости двухфазного слоя влажного воздуха, находящегося над нагретой поверхностью суши или океана, с учетом внутренних источников тепловыделения, зависящих от давления и плотности.

Для малых трехмерных возмущений во вращающейся атмосфере получено дисперсионное уравнение, которое позволяет получить модифицированный критерий возникновения конвективной неустойчивости. Показано, что во вращающейся неоднородной атмосфере $W \neq 0$ при $k > k_{W\text{cr}}$ с ростом неоднородности – параметра $|-F| > |-F_{\text{cr}}| \approx 20$ – происходит стабилизация конвективной неустойчивости.

Полученное дисперсионное уравнение позволяет аналитически исследовать целый ряд частных явлений, хорошо фиксируемых экспериментами в лабораториях и наблюдаемых во вращающейся атмосфере. В частности, удается проследить совместные влияния неоднородности стационарного профиля атмосферы и различного рода тепловыделений на волны в атмосфере.

Получены условия возникновения неустойчивостей, в которых источником возмущений является джоулев нагрев, генерируемый током атмосферного электрического разряда в воздухе, или испарение и последующая конденсация влаги. Показано, что учет тепловыделения может приводить как к регистрации новых неустойчивостей, так и к модификации ранее известных.

Предложенная система уравнений позволяет выполнять численные расчеты динамики возмущений конечной амплитуды вихревых течений во влажном воздухе с учетом источников теплоты различной природы и более детально исследовать механизмы зарождения различного рода смерчей.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вывод уравнения для функции $\zeta = \rho_0 w$.

Уравнения изменения импульса (4) в проекции на оси x, y могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}-\Omega_C\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)= = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi-\Omega_C\Psi+P\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\Omega_C\Phi\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}+\Omega_C\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)= = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi-\Omega_C\Psi+p\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi+\Omega_C\Phi\right)=0.$$

Решение этих уравнений может быть получено, если выполнены условия

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi-\Omega_C\Psi+P=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\Psi+\Omega_C\Phi=0.$$

Данную систему уравнений можно разрешить, связав изменение каждой из функций Φ, Ψ с давлением P:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Omega_C^2\right)\Psi=\Omega_C P,\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Omega_C^2\right)\Phi=-\frac{\partial}{\partial t}P.$$

Входящее в уравнение энергии (5) слагаемое $\frac{\partial T}{\partial t}$ удобно преобразовать, используя уравнение состояния (6):

$$c_p\rho_0\frac{\partial T}{\partial t}=(c_p\rho_0T_0)\frac{\partial(T/T_0)}{\partial t}= =(c_p\rho_0T_0R_g/R_g)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{P_0}-\frac{\rho}{\rho_0}\right)= =[\rho_0\gamma\rho_0T_0/(\gamma-1)]\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{P_0}-\frac{\rho}{\rho_0}\right)= =\left[\gamma\frac{\partial}{\partial t}P-a_s^2\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]\Big/(\gamma-1),$$

$$c_p\rho_0\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{\gamma-1}\left\{\gamma\frac{\partial}{\partial t}P-a_s^2\frac{\partial\rho}{\partial t}-(\gamma-1)\frac{\partial P}{\partial t}\right\}= =\frac{1}{\gamma-1}\left[\frac{\partial P}{\partial t}-a_s^2\frac{\partial\rho}{\partial t}\right],$$

$$\rho_0\mathbf{v}c_p\frac{\partial T_0}{\partial z}-\mathbf{v}\frac{\partial P_0}{\partial z}=\rho_0\mathbf{v}\left[c_p\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}\right]= =\rho_0\mathbf{v}R_gT_0\left[\frac{c_p}{R_gT_0}\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{1}{R_gT_0\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}\right]= =\rho_0\mathbf{v}R_gT_0\left[\frac{\gamma}{(\gamma-1)T_0}\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{1}{P_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}\right]= =\rho_0\mathbf{v}\frac{a_s^2}{\gamma-1}\left[\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{1}{\gamma P_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}\right]= =\rho_0\mathbf{v}a_s^2\frac{\gamma-1}{\gamma}\left[\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{1}{\gamma P_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}\right]= =\rho_0\mathbf{v}\frac{(\gamma-1)a_s^2}{\gamma R_gT_0}\left[c_p\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}\right]=\rho_0\mathbf{v}\frac{(\gamma-1)a_s^2}{\gamma R_g}\frac{dS_0}{dz}.$$

В результате уравнение (5) приводится к виду

$$c_p\rho_0\frac{\partial T}{\partial t}+c_p\rho_0\mathbf{v}\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial t}-\mathbf{v}\frac{\partial P_0}{\partial z}-$$
$$-\left(\frac{\partial Q}{\partial\rho}\right)_P\frac{\partial\rho}{\partial t}-\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_\rho\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{\gamma-1}\left[\frac{\partial P}{\partial t}-a_s\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]+$$
$$+\rho_0\mathbf{v}\frac{a_s^2}{\gamma-1}\left[\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{\gamma-1}{\gamma P_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}\right]-\left(\frac{\partial Q}{\partial\rho}\right)_P\frac{\partial\rho}{\partial t}-$$
$$-\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_\rho\frac{\partial p}{\partial t}=\left[1-(\gamma-1)\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_\rho\right]\frac{\partial P}{\partial t}-$$
$$-a_s^2\left[1+\frac{\gamma-1}{a_s^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial\rho}\right)_P\right]\frac{\partial\rho}{\partial t}+$$
$$+\rho_0\mathbf{v}a_s^2\left[\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{\gamma-1}{\gamma P_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}\right]=0,$$

$$c_p\rho_0\mathbf{v}\frac{\partial T_0}{\partial z}-\mathbf{v}\frac{\partial P_0}{\partial z}=\rho_0\mathbf{v}R_g\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{\partial P_0}{\partial z}\Big/R_g\rho_0\right]=$$
$$=\rho_0\mathbf{v}R_g\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{\gamma-1}{\gamma R_g\rho_0T_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}\right],$$

или

$$\left[1-(\gamma-1)\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_\rho\right]\frac{\partial P}{\partial t}-a_s^2\left[1+\frac{(\gamma-1)}{a_s^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial\rho}\right)_P\right]\frac{\partial\rho}{\partial t}+$$
$$+\rho_0\mathbf{v}a_s^2\left[\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{1}{\gamma P_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}\right]= \tag{27}$$
$$=\chi_\rho\frac{\partial P}{\partial t}+\chi_\rho a_s^2\frac{\partial\rho}{\partial t}+\zeta F=0.$$

Функции χ_ρ,χ_ρ,F определяются уравнениями

$$\chi_p=\left[1-(\gamma-1)\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_\rho\right],\quad \chi_\rho=-\left[1+\frac{\gamma-1}{a_s^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial\rho}\right)_P\right],$$
$$F=a_s^2\left[\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_0}{\partial z}-\frac{\gamma-1}{\gamma P_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}\right]=\frac{(\gamma-1)a_s^2}{\gamma R_g}\frac{dS_0}{dz},$$

где $\gamma=\dfrac{c_P}{c_v}$, $a_s=\sqrt{\gamma R_g a T_0}$ – скорость звука.

Если решение системы уравнений (3)–(6) ищется в виде

$$F(x,y,z,t)=f(z)\exp\left(i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{r}_\perp+\omega t\right),$$
$$G(x,y,z,t)=\varsigma(z)\exp\left(i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{r}_\perp+\omega t\right),$$

то решение системы уравнений (3)–(5) разыскивается в виде (7), и она сводится к пяти уравнениям для функций $\Psi,\Phi,P,\rho,\varsigma$.

Уравнение неразрывности (3) принимает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\varsigma=$$
$$=\omega\rho-k_\perp^2\Phi+\frac{\partial}{\partial z}\varsigma=0. \tag{28}$$

Уравнения движения (4) сводятся к

$$\Phi=-\omega P\Big/(\Omega_C^2+\omega^2),\quad \Psi=\Omega_C P\Big/(\Omega_C^2+\omega^2), \tag{29}$$

$$\omega\zeta+\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g=0. \tag{30}$$

Уравнение энергии (5) после преобразования (27) принимает вид

$$\omega a_s^2\chi_\rho\rho+\omega\chi_P P+\zeta F=0.$$

Полученное уравнение связывает ρ с функциями P,ζ и позволяет исключить ρ из уравнений (28). Поэтому, используя связь ρ с функциями P,ζ и (29), можно из (28) выразить давление P через функцию $\zeta(z)$ и ее производную

$$P=\frac{-\dfrac{\partial}{\partial z}+(F\big/a_s^2\chi_p)}{\omega[k^2\big/(\omega^2+\Omega_C^2)-\chi_p\big/a_s^2\chi_p]}\zeta, \tag{31}$$

а уравнение (31) свести к виду

$$\zeta\left(\omega-\frac{Fg}{\chi_\rho\omega a_s^2}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{g}{a_s^2}\frac{\chi_p}{\chi_\rho}\right)P=0, \tag{32}$$

где

$$\chi_\rho=-\left[1+(\gamma-1)\left(\frac{\partial Q}{\partial\rho}\right)_P\right],\quad \chi_P=1-(\gamma-1)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_\rho.$$

Подставляя P из (31) в (32), приходим к уравнению для возмущенного потока массы в вертикальном направлении $\zeta(z)$

$$(\omega-gF\big/\omega a_s^2\chi_p)\zeta+\left[\frac{\partial}{\partial z}-(g\chi_P\big/a_s^2\chi_p)\right]P=$$
$$=(\omega-gF\big/\omega a_s^2\chi_p)\zeta+\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{g\chi_P}{a_s^2\chi_p}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{\omega\left[\dfrac{k^2}{\omega^2+\Omega_C^2}-\dfrac{\chi_P}{a_s^2\chi_p}\right]}\left[-\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{F}{a_s^2\chi_p}\zeta\right]=$$
$$=\omega\left(\omega-\frac{gF}{\omega a_s^2\chi_p}\right)\left[\frac{k^2}{\omega^2+\Omega_c^2}-\frac{\chi_P}{a_s^2\chi_p}\right]\zeta+$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{g\chi_P}{a_s^2\chi_p}\right)\left[-\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{F}{a_s^2\chi_p}\zeta\right]+$$
$$+\frac{\chi_P}{\chi_\rho}\frac{1}{\omega\left[\dfrac{k^2}{\omega^2+\Omega_C^2}-\dfrac{\chi_P}{a_s^2\chi_p}\right]}\left(\frac{1}{a_s^4}\frac{\partial(a_s^2)}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F}{a_s^2}\right)\right]\frac{\zeta}{\chi_\rho}=0,$$

$$P=\frac{1}{[k^2\big/(\omega^2+\Omega_C^2)-\chi_P\big/a_s^2\chi_\rho]}\left[-\frac{\partial\zeta}{\partial z}+(F\big/a_s^2\chi_\rho)\zeta\right]\times$$
$$\times\omega(\omega-gF\big/\omega a_s^2\chi_\rho)[k^2\big/(\omega^2+\Omega_C^2)-\chi_P\big/a_s^2\chi_\rho-$$
$$-g\chi_p\big/a_s^2\chi_\rho)(F\big/a_s^2\chi_\rho)]\zeta-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{F+g\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}\frac{\partial}{\partial z}\zeta=$$
$$=\omega(\omega-gF\big/\omega a_s^2\chi_\rho)[k^2\big/(\omega^2+\Omega_C^2)-\chi_P F(1+g)]\zeta-$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{F+g\chi_p}{a_s^2\chi_\rho}\frac{\partial}{\partial z}\zeta=0,$$

$$\left(\omega^2-\frac{gF}{a_s^2\chi_\rho}\right)\left[\frac{k^2}{\omega^2+\Omega_C^2}-\frac{\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}\right]\zeta+$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{g\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}\right)\left[-\frac{\partial}{\partial z}\zeta+\frac{F}{a_s^2\chi_\rho}\zeta\right]+H=$$
$$=\left[\frac{k^2}{\omega^2+\Omega_c^2}\left(\omega^2-\frac{gF}{a_s^2\chi_\rho}\right)-\frac{\omega^2\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}+\frac{gF}{a_s^2\chi_\rho}\frac{\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}-\right.$$
$$\left.-\frac{g\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}\frac{F}{a_s^2\chi_\rho}\right]\zeta-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\zeta+\left(\frac{g\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}+\frac{F}{a_s^2\chi_\rho}\right)\frac{\partial}{\partial z}\zeta+$$
$$+\hat{H}\zeta=\left[\frac{k^2}{\omega^2+\Omega_C^2}\left(\omega^2-\frac{gF}{a_s^2\chi_\rho}\right)-\frac{\omega^2\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}\right]\zeta-\frac{d^2}{dz^2}\varsigma+$$
$$+\left(\frac{g\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}+\frac{F}{a_s^2\chi_\rho}\right)\frac{d}{dz}\zeta+\hat{H}\varsigma=0,$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\varsigma - \frac{F + g\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}\frac{d}{dz}\zeta -$$
$$-\left[\frac{k^2}{\omega^2 + \Omega_C^2}\left(\omega^2 - \frac{gF}{a_s^2\chi_\rho}\right) - \frac{\omega^2\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}\right]\zeta - \hat{H}\varsigma = 0.$$

Оператор

$$\hat{H} = \frac{\chi_p}{\chi_\rho}\left(1 - \frac{1}{a_s^2}\frac{\omega^2 + \Omega_C^2}{k^2}\frac{\chi_p}{\chi_\rho}\right)^{-1}\frac{\omega^2 + \Omega_C^2}{k^2 a_s^4}\frac{\partial a_s^2}{\partial z}\frac{d}{dz} +$$
$$+\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{F}{a_s^2}\right) - \frac{\chi_p}{\chi_\rho}\left(1 - \frac{1}{a_s^2}\frac{\omega^2 + \Omega_C^2}{k^2}\frac{\chi_p}{\chi_\rho}\right)^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{F}{a_s^2}\frac{\omega^2 + \Omega_C^2}{k^2 a_s^4}\frac{\partial a_s^2}{\partial z}\right]\frac{1}{\chi_\rho}$$

учитывает зависимость температуры (так как $\frac{1}{a_s^2}\frac{\partial(a_s^2)}{\partial z} = \frac{1}{T_0}\frac{\partial T_0}{\partial z}$) и комплекса $\left(\frac{F}{a_s^2}\right)$ от координаты z.

Без учета слагаемого $\hat{H}\zeta$ уравнение для функции ζ принимает вид

$$\frac{d^2}{dz^2}\varsigma - \frac{F + g\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}\frac{d}{dz}\zeta -$$
$$-\left[\frac{k^2}{\omega^2 + \Omega_C^2}\left(\omega^2 - \frac{gF}{a_s^2\chi_\rho}\right) - \frac{\omega^2\chi_P}{a_s^2\chi_\rho}\right]\zeta = 0.$$

Зная решение данного уравнения ζ из системы (28)–(30), можно определить все остальные функции Ψ, Φ, P, ρ.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Изменения параметра $\tilde{F}$ в атмосфере Земли взяты по данным интернет-ресурса https://www. ventusky.com

Графики распределения параметра $\tilde{F} = \frac{a_s^2}{g}\left[\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_0}{\partial z} - \frac{\gamma - 1}{\gamma P_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}\right] = \frac{(\gamma - 1)a_s^2}{\gamma g R_g}\frac{dS_0}{dz}$, определяющего влияние градиента давления и температуры, по высоте до 9 км зимой и весной для разного времени суток приведены на рис. 2. Видно, что градиент температуры по высоте практически всегда играет преобладающую роль вне зависимости от времени года, высоты и времени суток. На высоте до 1–2 км явно заметны максимумы перепада температур, однако в дневное время около поверхности земли ($z \le 0.5$ км) распределение температуры выравнивается, и тогда определяющим воздействием обладает градиент давления.

Видно, что в среднем по высоте и по времени в теплое время года градиент температуры оказывается меньшим, чем в холодное время года. Поэтому в теплое время года в нижних слоях атмосферы, согласно дисперсионному уравнению (16), перепады давления будут появляться чаще и влиять сильнее на устойчивость атмосферы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лэмб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
2. *Госсард Э.Э., Хук У.Х.* Волны в атмосфере. Инфразвуковые и гравитационные волны в атмосфере – их генерация и распространение / Пер. с англ. Под ред. Г.С. Голицына. М.: Мир, 1978. 532 с.
3. *Лайтхил Дж.* Волны в жидкостях / Пер. с англ. Под ред. П.П. Корявова, П.И. Чушкина. М.: Мир, 1981. 598 с.
4. *Голицын Г.С.* Введение в динамику планетных атмосфер. М.: Гидрометеоиздат, 1973. 104 с.
5. *Голицын Г.С.* Исследование конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 56 с.
6. *Голицын Г.С.* Затухание малых атмосферных колебаний благодаря вязкости и теплопроводности // Изв. АН СССР. Сер. Физ. атмосферы и океана. 1965. Т. 1. № 2. С. 136.
7. *Обухов А.М.* Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 178 с.
8. *Руткевич П.Б.* Неустойчивость не конвективной природы в насыщенном влажном воздухе. 2001.
9. *Шекин А.К., Дебле Ц.Б., Верещагин Д.А.* Локальные дисперсионные соотношения для акустико-гравитационных волн в изотермической атмосфере // Изв. АН СССР. Сер. Физ. атмосферы и океана. 1991. Т. 27. № 1. С. 95.
10. *Солдатенко С.А.* Влияние статической устойчивости атмосферы и меридиального градиента температуры на рост амплитуды неустойчивых волн синоптического масштаба // Изв. РАН. Сер. Физ. атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 6. С. 630.
11. *Синкевич О.А.* Волны и неустойчивости в сплошных средах. М.: Изд-во МЭИ, 2016. 263 с.
12. *Синкевич О.А.* О неустойчивости электрически заряженной границы двухфазного грозового облака и турбулентной атмосферы // ТВТ. 2016. Т. 54. № 6. С. 827.