ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 2021, том 59, № 4, с. 485–491

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАЗМЫ

УДК 533.9, 537.872

О ВЫСОКОЧАСТОТНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭНЕРГИИ РАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ИДЕАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

© 2021 г. В. Б. Бобров

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

E-mail: vic5907@mail.ru

Поступила в редакцию 01.10.2020 г.
После доработки 24.01.2021 г.
Принята к публикации 19.05.2021 г.

Показано, что степенной характер убывания по частоте в высокочастотной асимптотике спектрального распределения энергии равновесного излучения в электронной плазме имеет место при произвольном отрицательном значении химического потенциала электронов в рамках приближения идеального газа для поперечной диэлектрической проницаемости.

DOI: 10.31857/S0040364421040050

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], спектральное распределение Планка для энергии равновесного излучения соответствует идеализированной модели абсолютно черного тела, представляющего собой полость, заполненную излучением и ограниченную поглощающим веществом. При этом предполагается, что излучение находится в термодинамическом равновесии с веществом, хотя эффекты взаимодействия фотонов с ограничивающим веществом не рассматриваются [1]. Основное внимание при практической реализации распределения Планка связано с рассмотрением макроскопического тела, находящегося в тепловом равновесии с окружающим его “черным” излучением [2]. В решении этой задачи, имеющей непосредственное отношение к закону Кирхгофа, достигнуты большие успехи (см. подробнее [3, 4] и цитируемую там литературу).

Однако в последнее время уделяется большое внимание вопросу о спектральном распределении энергии излучения в самом веществе, находящемся в состоянии термодинамического равновесия с собственным излучением (см. [5–17] и списки литературы в них). Решение данной теоретической проблемы имеет существенное значение для интерпретации и обработки экспериментальных данных (см., например, [18–21]). В частности, на примере идеальной плазмы в пределе слабого и сильного вырождения было установлено, что спектральное распределение энергии равновесного излучения в веществе принципиально отличается от распределения Планка как в области предельно малых, так и предельно больших частот (см. [12–17] и ссылки в них).

В настоящей работе на основе полученных ранее результатов показано, что высокочастотная асимптотика спектрального распределения энергии равновесного излучения в идеальной электронной плазме характеризуется степенным характером убывания при произвольном отрицательном значении химического потенциала электронов.

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ РАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ВЕЩЕСТВЕ

Последовательное решение вопроса о вычислении спектрального распределения энергии равновесного излучения в веществе дано в [11] на основе рассмотрения равновесной системы нерелятивистских заряженных частиц и фотонов, для которой по аналогии с описанием идеального газа фотонов средняя энергия равновесного излучения в веществе может быть представлена в виде

$$E_{ph} = V\sum_{\lambda}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\hbar\omega_{\mathbf{k}}f(\mathbf{k},\lambda) = V\int_0^{\infty}d\omega\varepsilon_{\omega}(T,\{\gamma_a\}), \quad (1)$$

где $f(\mathbf{k},\lambda) \equiv \left\langle \hat{c}^{+}_{\mathbf{k},\lambda}\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}\right\rangle$ — точная равновесная функция распределения фотонов по импульсам; $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$, c — скорость света в вакууме; $\hat{c}^{+}_{\mathbf{k},\lambda}$ и $\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}$ — соответственно операторы рождения и уничтожения для фотонов с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и поляризацией $\lambda = 1, 2$. Угловые скобки обозначают осреднение с большим каноническим распределением Гиббса, которое характеризуется объемом V, занимаемым рассматриваемой системой, а также температурой T для фотонов и для заряженных частиц. Кроме того, спектральное распределение энергии излучения в веществе $\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ зависит не только от частоты и температуры, как это имеет место в формуле Планка для идеального газа фотонов, но и от характеристик вещества, а именно набора химических потенциалов заряженных частиц $\{\gamma_a\}$.

При этом для спектрального распределения энергии равновесного излучения в веществе $\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ справедливо соотношение

$$\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\}) = \varepsilon_\omega^{(0)}(T) + \Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\}), \tag{2}$$

где величина $\varepsilon_\omega^{(0)}(T)$ задается формулой Планка

$$\varepsilon_\omega^{(0)}(T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/T) - 1}, \tag{3}$$

а функция $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ равенством

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\}) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)\times \\ \times\left(\frac{c^5}{\pi\omega}\int_0^\infty dkk^4\frac{\operatorname{Im}\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)}{\left|\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)\,\omega^2 - c^2k^2\right|^2} - \frac{1}{2}\right). \tag{4}$$

В результате отличие спектрального распределения энергии излучения в веществе от формулы Планка (3) полностью определяется поперечной диэлектрической проницаемостью (ДП) $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)$ рассматриваемой системы. Необходимо отметить, что соотношение (4) справедливо только для однородной и изотропной системы, линейные электромагнитные свойства которой однозначно определяются продольной $\varepsilon^l(k,\omega)$ и поперечной $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)$ ДП [22].

Как следует из (4), принципиальное значение имеет учет не только частотной, но и пространственной дисперсии в поперечной ДП $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)$, особенно в области больших волновых векторов k. Для обеспечения сходимости интеграла в (4) при фиксированной частоте ω должно выполняться условие

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{Im}\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega) = 0. \tag{5}$$

Это означает, что при вычислении функции $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)$ необходимо последовательно учитывать квантовые эффекты. Действительно при рассмотрении квантовой идеальной (бесстолкновительной) плазмы в области больших k $\operatorname{Im}\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega) \sim \sim \exp\left(-\hbar^2k^2/8Tm_a\right)$, где m_a – масса заряженных частиц сорта a, входящих в состав плазмы (см. подробнее [23, 24]). Обратим внимание, что требование (5) для $\operatorname{Im}\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)$ должно выполняться и при вычислении потерь энергии пробной заряженной частицы, проходящей через плазму (см., например, [22, 25, 26]). Таким образом, можно рассматривать условие (5) как общее свойство функции $\operatorname{Im}\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)$.

Вычисление поперечной ДП $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)$ системы заряженных частиц и собственного излучения является весьма сложной задачей, что в еще большей степени относится к вычислению интеграла в (4). Однако при рассмотрении высокочастотного предела $(\omega\to\infty)$ соотношение (4) можно существенно упростить. Как показано в [12, 17], асимптотическое поведение величины $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ при $\omega\to\infty$ определяется соотношением

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})\big|_{\omega\to\infty} \to \\ \to \frac{\hbar c^2}{\pi^3\omega^2}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}kk^4\operatorname{Im}\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)\right)\Bigg|_{\omega\to\infty}. \tag{6}$$

Таким образом, появляется возможность решить вопрос о степени влияния вещества на асимптотическое поведение спектрального распределения энергии равновесного излучения в области высоких частот $(\omega\to\infty)$.

Дело в том, что спектральное распределение “черного” излучения, согласно (3), характеризуется экспоненциальным убыванием в пределе $\omega\to\infty$. В то же время величина $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ для идеальной плазмы в пределе слабого вырождения убывает в пределе $\omega\to\infty$ по степенному закону [12, 17]. Другими словами, в пределе $\omega\to\infty$ спектральное распределение энергии равновесного излучения в веществе принципиально отличается от формулы Планка.

ПОПЕРЕЧНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ИДЕАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЫ

В силу того что до настоящего времени теоретическому исследованию поперечной ДП $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)$ не уделяется достаточного внимания, в данной работе проводится анализ соотношения (6) для идеальной электронной плазмы, находящейся в компенсирующем фоне положительного заряда для обеспечения условия квазинейтральности.

При использовании такой модели предполагается, что постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \cong 1/137$, которая характеризует силу взаимодействия между электрическими зарядами и фотонами, является малым параметром. Это обстоятельство является основой для использования в квантовой статистической электродинамике теории возмущений (диаграммной техники), связанной с представлением средних значений физических величин в виде рядов по степеням α [27]. В частности, вывод соотношений (2)–(4) для спектральной плотности равновесного излучения в веществе основан на результатах диаграммной техники теории возмущений для фотонной функции Грина [11]. Далее ограничимся рассмотрением "нулевого" приближения по параметру α. Другими словами, будем рассматривать функцию $\varepsilon^{\text{tr}}(k,\omega)$ для системы заряженных частиц, пренебрегая их взаимодействием с фотонами.

Кроме того, предполагается, что рассматриваемая плазменная система удовлетворяет условиям

$$m_e e^4/\hbar^2 \ll T \ll m_e c^2, \quad e^2/\langle r_e k_e\rangle \ll 1, \tag{7}$$

где $\langle r_e\rangle = (4\pi n_e/3)^{-1/3}$ – среднее расстояние между электронами, $\langle k_e\rangle$ – средняя кинетическая энергия, приходящаяся на один электрон [12]. В этом случае можно пренебречь кулоновским взаимодействием заряженных частиц, что и отвечает рассмотрению поперечной ДП идеальной электронной плазмы (индекс 0) (см. подробнее [23, 28]):

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^{\text{tr}}(k,\omega) = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} - \\ - \frac{4\pi}{\omega^2}\left(\Phi_0^{(dd)}(k,\omega) + \Phi_0^{(pp)}(k,\omega)\right),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\Phi_0^{(dd)}(k,\omega) = (2s_e+1)\frac{e^2\hbar^2}{2m_e^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(p^2 - \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2}\right)\times \\ \times\frac{f_e(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2) - f_e(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2)}{\hbar\omega + \epsilon_e(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2) - \epsilon_e(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2) + i0},\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\Phi_0^{(pp)}(k,\omega) = \frac{(2s_e+1)s_e(s_e+1)}{3}\left(\frac{\mu_e c}{s_e}\right)^2 k^2\times \\ \times\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{f_e(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2) - f_e(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2)}{\hbar\omega + \epsilon_e(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2) - \epsilon_e(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2) + i0}.\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\omega_e = \left(4\pi e^2 n_e/m_e\right)^{1/2}$ – плазменная частота для электронов с зарядом e, массой m_e, спином s_e, собственным магнитным моментом μ_e и средней плотностью числа частиц n_e; $\epsilon_e(p) = \hbar^2p^2/2m_e$ – энергия электрона; $f_e(p)$ – функция распределения по импульсам $\hbar\mathbf{p}$ для электронов, которая находится распределением Ферми–Дирака

$$f_e(p) = \left\{\exp\left((\epsilon_e(p) - \gamma_e)/T\right) + 1\right\}^{-1}. \tag{11}$$

Величина химического потенциала электронов γ_e при заданной температуре T определяется концентрацией электронов n_e из условия

$$n_e = (2s_e+1)\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}f_e(p). \tag{12}$$

При этом, согласно (8)–(12), явные аналитические выражения для поперечной ДП идеальной электронной плазмы могут быть получены в двух предельных случаях: слабого $\left(n_e\Lambda_e^3 \ll 1\right)$ и сильного $\left(n_e\Lambda_e^3 \gg 1\right)$ вырождения электронов, где $\Lambda_e = \left(2\pi\hbar^2/m_eT\right)^{1/2}$ – тепловая длина волны де Бройля для электронов [28–30].

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА ДЛЯ ЭНЕРГИИ РАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ИДЕАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

Однако, как будет показано далее, имеется возможность определения высокочастотной асимптотики для спектрального распределения энергии равновесного излучения в идеальной электронной плазме при произвольном отрицательном значении химического потенциала электронов.

Для этого с учетом (8) представим величину $\Delta\varepsilon_\omega(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty}$ (6), определяющую отличие распределения энергии равновесного излучения от распределения Планка $\varepsilon_\omega^{(0)}(T)$ (3) в высокочастотном пределе $\omega\to\infty$, в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_\omega(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} = \Delta\varepsilon_\omega^{(dd)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} + \\ + \Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty}, \\ \Delta\varepsilon_\omega^{(dd)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} \to \\ \to -\frac{4\hbar c^2}{\pi^2\omega^4}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}k k^4 \operatorname{Im}\Phi_0^{(dd)}(k,\omega)\right)\Bigg|_{\omega\to\infty},\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} \to \\ \to -\frac{4\hbar c^2}{\pi^2\omega^4}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}k k^4 \operatorname{Im}\Phi_0^{(pp)}(k,\omega)\right)\Bigg|_{\omega\to\infty}.\end{aligned} \tag{14}$$

Учитывая значения спина $(s_e = 1/2)$ и магнитного момента $(\mu_e = e\hbar/(2mc))$ для электронов, из соотношений (9), (10) следуют такие выражения для функций $\operatorname{Im}\Phi_0^{(dd)}(k,\omega)$ и $\operatorname{Im}\Phi_0^{(pp)}(k,\omega)$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}\Phi_0^{(dd)}(k,\omega) &= \frac{e^2}{4\pi m_e k}\int\limits_{k\Delta^{(+)}(k,\omega)}^{\infty} \mathrm{d}p p f_e(p)\times \\
&\times\left[p^2 - k^2\left(\Delta^{(+)}(k,\omega)\right)^2\right] - \\
&- \frac{e^2}{4\pi m_e k}\int\limits_{k\left|\Delta^{(-)}(k,\omega)\right|}^{\infty} \mathrm{d}p p f_e(p)\left[p^2 - k^2\left(\Delta^{(-)}(k,\omega)\right)^2\right],
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}\Phi_0^{(pp)}(k,\omega) &= -\frac{e^2 k}{8\pi m_e}\int\limits_{k\left|\Delta^{(-)}(k,\omega)\right|}^{k\Delta^{(+)}(k,\omega)} \mathrm{d}p p f_e(p), \\
\Delta^{(\pm)}(k,\omega) &= \frac{m_e\omega}{\hbar k^2} \pm \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Подставляя (15), (16) в (13), (14), получаем

$$
\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_\omega^{(dd)}(T,\gamma_e)\Big|_{\omega\to\infty} &\to \frac{2c^2e^2m_e^3}{\pi^3\hbar^3\beta_\omega^3}\times \\
&\times\left\{F_4(\beta_\omega,\gamma_e/T)\Big|_{\omega\to\infty} + F_5(\beta_\omega,\gamma_e/T)\Big|_{\omega\to\infty}\right\} + \\
&+ \frac{c^2e^2m_e^3}{\pi^3\hbar^3\beta_\omega^4}\left\{4F_1(\beta_\omega,\gamma_e/T)\Big|_{\omega\to\infty} - \right. \\
&\left. - \beta_\omega^2 F_2(\beta_\omega,\gamma_e/T)\Big|_{\omega\to\infty} - F_3(\beta_\omega,\gamma_e/T)\Big|_{\omega\to\infty}\right\},
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\Big|_{\omega\to\infty} \to \frac{2c^2e^2m_e^3}{\pi^3\hbar^3\beta_\omega^4}F_3(\beta_\omega,\gamma_e/T)\Big|_{\omega\to\infty}, \tag{18}
$$

где $\beta_\omega = \hbar\omega/T$, а набор числовых функций $F_\alpha(\beta,\gamma)$ $(\alpha = 1,\ldots,5)$ определяется следующими равенствами:

$$
\begin{aligned}
F_1(\beta,\gamma) &= \int\limits_0^\infty dyy\int\limits_{y\Delta_y^{(-)}(\beta)}^{y\Delta_y^{(+)}(\beta)} \frac{dxx}{\exp(x-\gamma)+1}, \\
F_2(\beta,\gamma) &= \int\limits_0^\infty dy\ln\left(\frac{1+\exp\left(\gamma - y\Delta_y^{(-)}(\beta)\right)}{1+\exp\left(\gamma - y\Delta_y^{(+)}(\beta)\right)}\right), \\
F_3(\beta,\gamma) &= \int\limits_0^\infty dyy^2\ln\left(\frac{1+\exp\left(\gamma - y\Delta_y^{(-)}(\beta)\right)}{1+\exp\left(\gamma - y\Delta_y^{(+)}(\beta)\right)}\right), \\
F_4(\beta,\gamma) &= \int\limits_0^\infty dyy\ln\left(1+\exp\left(\gamma - y\Delta_y^{(-)}(\beta)\right)\right), \\
F_5(\beta,\gamma) &= \int\limits_0^\infty dyy\ln\left(1+\exp\left(\gamma - y\Delta_y^{(+)}(\beta)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Здесь и далее

$$
\Delta_y^{(\pm)}(\beta) = (\beta/y \pm 1)^2/4.
$$

Таким образом, задача сводится к установлению асимптотического поведения набора числовых функций $F_\alpha(\beta_\omega,\gamma_e/T)$ $(\alpha = 1,\ldots,5)$ в области высоких частот $(\beta_\omega \to \infty)$.

Далее рассмотрим идеальную электронную плазму, для которой химический потенциал γ_e является отрицательной величиной ($\gamma_e < 0$). В этом случае для функций $F_\alpha(\beta,\gamma)$ можно использовать представление в виде функциональных рядов:

$$
\begin{aligned}
F_1(\beta,\gamma) &= \int\limits_0^\infty dyy\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\exp((n+1)\gamma)\times \\
&\times\int\limits_{y\Delta_y^{(-)}(\beta)}^{y\Delta_y^{(+)}(\beta)} dxx\exp(-(n+1)x) = \\
&= 2\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{\exp((n+1)\alpha)}{(n+1)}\times \\
&\times\int\limits_0^\infty dyy\exp\left(-(n+1)\left(\frac{\beta^2}{4y}+\frac{y}{4}\right)\right)\left\{\left(\frac{\beta^2}{4y}+\frac{y}{4}+\right.\right. \\
&\left.+\frac{1}{n+1}\right)\sinh\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right) - \left.\frac{\beta}{2}\cosh\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right)\right\} = \\
&= \beta^3\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{\exp((n+1)\gamma)}{(n+1)}\left\{\left(K_1\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right)+\right.\right. \\
&\left.+K_3\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right)+\frac{4}{(n+1)\beta}K_2\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right)\right)\times \\
&\times\sinh\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right) - \left.K_2\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right)\cosh\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right)\right\},
\end{aligned} \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2(\beta,\gamma) &= 2\int\limits_0^\infty dy\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\times \\
&\times\frac{\exp(n\gamma)}{n}\exp\left(-n\left(\frac{\beta^2}{4y}+\frac{y}{4}\right)\right)\times \\
&\times\sinh\left(\frac{n\beta}{2}\right) = 4\beta\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\frac{\exp(n\gamma)}{n}\times \\
&\times K_1\left(\frac{n\beta}{2}\right)\sinh\left(\frac{n\beta}{2}\right),
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
F_3(\beta,\gamma) &= 2\int\limits_0^\infty dyy^2\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\frac{\exp(n\gamma)}{n}\times \\
&\times\exp\left(-n\left(\frac{\beta^2}{4y}+\frac{y}{4}\right)\right)\sinh\left(\frac{n\beta}{2}\right) = 4\beta^3\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\times \\
&\times\frac{\exp(n\gamma)}{n}K_3\left(\frac{n\beta}{2}\right)\sinh\left(\frac{n\beta}{2}\right),
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
F_4(\beta,\gamma) &= \int\limits_0^\infty dyy\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\frac{\exp(n\gamma)}{n}\times \\
&\times\exp\left(-n\left(\frac{\beta^2}{4y}+\frac{y}{4}\right)\right)\exp\left(\frac{n\beta}{2}\right) = 2\beta^2\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\times \\
&\times\frac{\exp(n\gamma)}{n}K_2\left(\frac{n\beta}{2}\right)\exp\left(\frac{n\beta}{2}\right),
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$F_5(\beta,\gamma) = \int_0^\infty dyy \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\exp(n\gamma)}{n} \times$$
$$\times \exp\left(-n\left(\frac{\beta^2}{4y} + \frac{y}{4}\right)\right)\exp\left(-\frac{n\beta}{2}\right) = \qquad (23)$$
$$= 2\beta^2 \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\exp(n\gamma)}{n} K_2\left(\frac{n\beta}{2}\right)\exp\left(-\frac{n\beta}{2}\right).$$

В соотношениях (19)–(23) учтено, что

$$\int_0^\infty dxx^{\nu-1}\exp\left(-\frac{\alpha}{x} - \tau x\right) = 2\left(\frac{\alpha}{\tau}\right)^{\nu/2} K_\nu\left(2\sqrt{\alpha\tau}\right), \qquad (24)$$

где $K_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода или функция Макдональда, которая удовлетворяет следующему асимптотическому соотношению [31]:

$$K_\nu(x)\big|_{x\to\infty} = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} \exp(-x). \qquad (25)$$

Подставляя (24), (25) в (19)–(23), находим с точностью до экспоненциально малых членов $\exp(-n\beta_\omega)$:

$$F_1(\beta_\omega, \gamma_e/T)\big|_{\omega\to\infty} \to$$
$$\to \sqrt{\pi}\beta_\omega^{5/2} A_1(\gamma_e/T) + 4\sqrt{\pi}\beta_\omega^{3/2} A_2(\gamma_e/T),$$
$$F_2(\beta_\omega, \gamma_e/T)\big|_{\omega\to\infty} \to 4\sqrt{\pi}\,\beta_\omega^{1/2} A_3(\gamma_e/T), \qquad (26)$$
$$F_3(\beta_\omega, \gamma_e/T)\big|_{\omega\to\infty} \to 4\sqrt{\pi}\beta_\omega^{5/2} A_3(\gamma_e/T),$$
$$F_4(\beta_\omega, \gamma_e/T)\big|_{\omega\to\infty} \to 2\sqrt{\pi}\beta_\omega^{3/2} A_3(\gamma_e/T),$$

где функции $A_\alpha(\gamma)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ равны

$$A_1(\gamma) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\exp(n\gamma)}{n^{5/2}},$$
$$A_2(\gamma) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\exp(n\gamma)}{n^{7/2}}, \qquad (27)$$
$$A_3(\gamma) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\exp(n\gamma)}{n^{3/2}}.$$

При этом

$$F_5(\beta_\omega, \gamma_e/T)\big|_{\omega\to\infty} \to$$
$$\to 2\sqrt{\pi}\beta_\omega^{3/2} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\exp(n\gamma_e/T)}{n^{3/2}} \exp(-n\beta_\omega). \qquad (28)$$

Таким образом, с учетом (17), (18), (26)–(28) асимптотическое поведение “диамагнитного” $\Delta\varepsilon_\omega^{(dd)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty}$ и “парамагнитного” $\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty}$ вкладов в высокочастотное спектральное распределение энергии равновесного излучения в идеальной электронной плазме имеет вид

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(dd)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} \to 4\sqrt{\pi}\frac{c^2e^2m_e^3}{\pi^3\hbar^3\beta_\omega^{3/2}} \times$$
$$\times \{A_1(\gamma_e/T) - A_3(\gamma_e/T)\} + \qquad (29)$$
$$+ 16\sqrt{\pi}\frac{c^2e^2m_e^3}{\pi^3\hbar^3\beta_\omega^{5/2}} A_2(\gamma_e/T),$$

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} \to 8\sqrt{\pi}\frac{c^2e^2m_e^3}{\pi^3\hbar^3\beta_\omega^{3/2}} A_3(\gamma_e/T). \qquad (30)$$

Соотношения (29), (30) в соответствующих приближениях эквивалентны результатам работ [12, 17] для равновесного излучения в идеальной квазиклассической плазме. Следует учитывать, что условие (12) в рамках проведенного рассмотрения $(\gamma_e < 0)$ можно представить как

$$\Lambda_e^3 n_e(T,\gamma_e) = 2A_3(\gamma_e/T). \qquad (31)$$

В результате, согласно (30), (31), обусловленный учетом собственного магнитного момента электронов “парамагнитный” вклад в высокочастотное спектральное распределение энергии равновесного излучения в идеальной электронной плазме пропорционален концентрации электронов $n_e(T,\gamma_e)$ и не зависит явно от температуры при произвольном отрицательном значении химического потенциала:

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} \to \frac{8\sqrt{2}e^2 n_e(T,\gamma_e)}{\pi c}\left(\frac{m_ec^2}{\hbar\omega}\right)^{3/2}. \qquad (32)$$

Чтобы оценить область концентраций n_e и температур T, отвечающих отрицательным значениям химического потенциала $(\gamma_e < 0)$ при выполнении условий (7), используется соотношение (31). Прежде всего, нужно учесть, что, согласно (11), (12), для модели идеальной электронной плазмы в компенсирующем фоне положительного заряда выполняется условие термодинамической устойчивости [1]: $(\partial n_e/\partial\gamma_e)_T > 0$.

Это условие означает, что средняя концентрация электронов является однозначной, монотонной возрастающей функцией химического потенциала γ_e при фиксированной температуре T. При этом функциональный ряд (27), определяющий функцию $A_3(\gamma)$, сходится на всем интервале отрицательных значений переменной γ: $-\infty < \gamma \le 0$.

В частности, в области больших отрицательных значений химического потенциала ($\gamma_e < 0$, $|\gamma_e| \gg T$) при вычислении функции $A_3(\gamma_e/T)$ достаточно ограничиться учетом только первого члена ряда (27) по степеням $\exp(\gamma)$: $A_3(\gamma) \to \exp(\gamma)$. Следовательно, согласно (31):

$$\Lambda_e^3 n_e \cong 2\exp(\gamma_e/T),$$

и получаем хорошо известный результат для идеальной квазиклассической электронной плазмы (см., например [1]):

$$\gamma_e \cong T \ln\left(\Lambda_e^3 n_e / 2\right),$$

который отвечает области значений параметра вырождения $\Lambda_e^3 n_e \ll 1$.

В свою очередь, в пределе $\gamma_e/T \to -0$ соотношение (31) принимает вид

$$\Lambda_e^3 n_e (T, \gamma_e \to -0) = \\ = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}} = 2\left(1 - 2^{-1/2}\right)\zeta(3/2), \tag{33}$$

где $\zeta(z)$ – дзета-функция Римана, $z > 1$ [31]:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\left(1 - 2^{1-z}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}. \tag{34}$$

Значения функции $\zeta(z)$ при различных значениях переменной z представлены, например, в [32]. Согласно (33), (34):

$$\Lambda_e^3 n_e (T, \gamma_e \to -0) \cong 1.530.$$

Таким образом, область отрицательных значений химического потенциала идеальной электронной плазмы соответствует следующим значениям параметра вырождения: $0 < \Lambda_e^3 n_e \le 1.530$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно проведенному рассмотрению, высокочастотное спектральное распределение энергии равновесного излучения в идеальной электронной плазме полностью определяется наличием вещества и принципиально отличается от формулы Планка (3). Характер убывания распределения энергии равновесного излучения с ростом частоты носит степенной характер в идеальной электронной плазме при произвольном отрицательном значении химического потенциала. Несмотря на “медленность” убывания с ростом частоты средняя энергия равновесного излучения, приходящаяся на единицу объема, согласно (1), (29)–(32), является конечной величиной.

Дальнейшее развитие полученных выше результатов связано с построением самосогласованных приближений для поперечной ДП электронной плазмы при учете взаимодействия между электронами.

Автор выражает благодарность участникам семинара теоретического отдела им. Л.М. Бибермана ОИВТ РАН за полезное обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение с ОИВТ РАН № 075-15-2020-785 от 23 сентября 2020 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
2. *Левин М.Л., Рытов С.М.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М.: Наука, 1967. 307 с.
3. *Волокитин А.И., Перссон Б.Н.Дж.* Радиационная передача тепла и бесконтактное трение между наноструктурами // УФН. 2007. Т. 177. № 9. С. 921.
4. *Виноградов Е.А., Дорофеев И.А.* Термостимулированные электромагнитные поля твердых тел // УФН. 2009. Т. 179. № 5. С. 449.
5. *Bobrov V.B.* On the Relation between Magnetic Constant and the Photon Distribution Function in a Medium // J. Phys.: Cond. Matt. 1990. V. 2. № 31. P. 6695.
6. *Opher M., Opher R.* Was the Electromagnetic Spectrum a Blackbody Spectrum in the Early Universe? // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. № 14. P. 2628.
7. *Medvedev M.V.* Thermodynamics of Photons in Relativistic $e^+e\gamma$ Plasmas // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. № 5. P. R4766.
8. *Bannur V.M.* Self-consistent Quasiparticle Model Results for Ultrarelativistic Electron-positron Thermodynamic Plasma // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. № 6. P. 067401.
9. *Trigger S.A.* Non-Planck Equilibrium Radiation in Plasma Model of Early Universe // Phys. Lett. A. 2007. V. 370. № 5–6. P. 365.
10. *Triger S.A., Khomkin A.L.* Non-Planckian Equilibrium Radiation of Plasma-like Media // Plasma Phys. Rep. 2010. V. 36. № 13. P. 1095.
11. *Бобров В.Б., Соколов И.М., Тригер С.А.* О спектральном распределении энергии равновесного излучения в веществе // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101. № 5. С. 326.
12. *Бобров В.Б., Тригер С.А.* Высокочастотное спектральное распределение энергии равновесного излучения в плазме // ТМФ. 2016. Т. 187. № 1. С. 104.
13. *Mati P.* Quasiparticles in an Interacting System of Charge and Monochromatic Field // Phys. Rev. A. 2017. V. 95. № 5. P. 053852.
14. *Маслов С.А., Тригер С.А., Гусейн-заде Н.Г.* Асимптотическое поведение спектральной функции распределения энергии равновесного излучения в максвелловской плазме при низких частотах // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2018. № 8. С. 14.
15. *Маслов С.А., Тригер С.А., Гусейн-заде Н.Г.* Низкочастотное поведение спектральной функции распределения энергии равновесного излучения в вырожденном электронном газе // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2018. № 12. С. 15.
16. *Munirov V.R., Fisch N.J.* Radiation in Equilibrium with Plasma and Plasma Effects on Cosmic Microwave Background // Phys. Rev. E. 2019. V. 100. № 2. P. 023202.
17. *Bobrov V.B., Trigger S.A., Sokolov I.M.* Spectral Energy Distribution of the Equilibrium Radiation and Its As-

ymptotic Behavior in Ideal Gaseous Plasmas // Phys. Plasmas. 2020. V. 27. № 2. P. 022106.

18. *Агранат М.Б., Ашитков С.И., Овчинников А.В., Ситников Д.С., Юркевич А.А., Чефонов О.В., Перельман Л.Т., Анисимов С.И., Фортов В.Е.* Тепловое излучение горячих электронов металла // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101. № 9. С. 671.
19. *Русин С.П.* Определение температуры непрозрачного материала по спектральному распределению интенсивности собственного излучения при неизвестной излучательной способности // ТВТ. 2018. Т. 56. № 2. С. 203.
20. *Соснин Э.А., Андреев М.В., Диденко М.В., Панарин В.А., Скакун В.С., Тарасенко В.Ф.* Профили интенсивности излучения на различных этапах формирования апокампического разряда // ТВТ. 2018. Т. 56. № 6. С. 859.
21. *Смирнов Б.М.* Инфракрасное излучение в энергетике атмосферы // ТВТ. 2019. Т. 57. № 4. С. 609.
22. *Силин В.П., Рухадзе А.А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: Либроком, 2013. 248 с.
23. *Bobrov V.B.* To the Theory of the Linear Magnetic Permeability of a Medium // Physica A. 1992. V. 187. № 3–4. P. 603.
24. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* О квантовом описании линейных кинетических свойств бесстолкновительной плазмы // УФН. 1999. Т. 169. № 6. С. 687.
25. *Киржниц Д.А.* О торможении быстрой частицы в среде // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 46. № 6. С. 244.
26. *Ахиезер А.И., Пелетминский С.В.* Методы статистической физики. М.: Наука, 1977. 368 с.
27. *Фрадкин Е.С.* Метод функций Грина в теории квантованных полей и в квантовой статистике // Труды ФИАН. 1965. Т. 29. С. 7.
28. *Бобров В.Б.* О поперечной диэлектрической проницаемости вырожденной электронной плазмы // ТВТ. 2017. Т. 55. № 4. С. 489.
29. *Бобров В.Б., Тригер С.А.* О квантовых эффектах в поперечной диэлектрической проницаемости максвелловской плазмы // ТМФ. 2017. Т. 192. № 3. С. 523.
30. *Bobrov V.B., Maslov S.A., Trigger S.A.* On the Transverse Dielectric Permittivity of the Collisionless Gaseous Plasmas with Quantum Effects // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. № 7. P. 072116.
31. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963. 1100 с.
32. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / Eds. Abramowitz M., Stegun I.A. Washington: National Bureau of Standarts, 1972. 1046 p.