

УДК 532.529:534.2

АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С ГАЗОВЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ, ИМЕЮЩИМИ ЖИДКУЮ ПРОСЛОЙКУ И ВЯЗКОУПРУГУЮ ОБОЛОЧКУ

© 2021 г. Д. А. Губайдуллин¹, Ю. В. Федоров¹, *

¹Институт механики и машиностроения – обособленное структурное
подразделение ФИЦ КазНЦ РАН, г. Казань, Россия

*E-mail: kopperfildd@ya.ru

Поступила в редакцию 28.12.2019 г.

После доработки 26.05.2020 г.

Принята к публикации 18.06.2020 г.

В работе выведено модифицированное уравнение Релея–Ламба, учитывающее радиальные колебания пузырька газа, покрытого вязкоупругой оболочкой, на внутренней поверхности которой определен тонкий слой жидкости. Для случая малых возмущений найдено дисперсионное уравнение, учитывающее межфазный теплообмен между газом, жидкой прослойкой, вязкоупругой оболочкой и несущей жидкостью. Выписано аналитическое выражение равновесной скорости звука, и установлена ее зависимость от размеров жидкого слоя, вязкоупругой оболочки и частоты возмущений. Проиллюстрировано различие размера внутреннего жидкого слоя в оболочечном пузырьке на динамику акустических волн. Показано влияние зависимостей модуля сдвига и вязкости бутиловой резины от частоты возмущений при различной температуре на кривые фазовой скорости и коэффициента затухания. Дано сравнение теории с экспериментальными данными.

DOI: 10.31857/S0040364421040128

ВВЕДЕНИЕ

Изучение распространения волн в сложных пузырьковых средах по-прежнему актуально, о чем свидетельствуют недавние публикации [1–4]. В частности, в работах [3, 4] исследовано взаимодействие акустических волн с границей между чистой жидкостью и жидкостью с парогазовыми пузырьками с учетом фазовых превращений. Проанализировано влияние концентрации пара в пузырьках и основных параметров смеси на коэффициенты отражения и прохождения. Оценка влияния фазовых превращений на границе парогазожидкостной смеси по упрощенным формулам приведена также в [5], где показана монотонная зависимость коэффициента отражения от концентрации пара для пузырьковой жидкости. В [6] указано на различие во взаимодействии малых возмущений со слоем пузырьковой жидкости и слоем газокапельной смеси. К настоящему времени имеется немало и экспериментальных работ по исследованию акустических свойств пузырьковых сред. Вот лишь некоторые из них [7–9], где определены частотные зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания. Основные теоретические модели опубликованы, к примеру, в работах [10–12]. С большим количеством публикаций можно ознакомиться в обзорах [13, 14].

Покрытые упругой оболочкой пузырьки встречаются во многих областях. Но основное применение они нашли в биомедицине, где используются в качестве контрастных веществ для ультразвуковой диагностики [15, 16]. Знание свойств покрытых пузырьков легло в основу создания микророботов, которые имеют огромный потенциал в медицинской практике: от доставки лекарств до диагностики заболеваний. В частности, в работе [17] приведено описание микроробота, способного перемещаться в жидкой среде следующим способом. На поверхности устройства закрепляются пузырьки газа в специальных капсулах. Под воздействием ультразвуковых колебаний пузырьки начинают поочередно расширяться и сжиматься, оказывая давление на стенку, к которой они прикреплены. Частота колебаний зависит от размеров пузырьков, и чем ближе она к их резонансной частоте, тем эффективнее происходит движение микроробота. Существующие теоретические модели основаны на различных формах записи уравнений колебаний сферических пузырьков с учетом упругости, вязкости поверхностного слоя. В работе [18] получено модифицированное уравнение Релея–Плессета, учитывающее радиальные колебания газового пузырька с вязкоупругой оболочкой конечной толщины в жидкости на основе реологического уравнения Кельвина–Фойгта. Проанализирова-

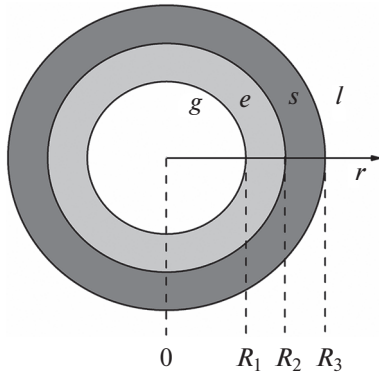


Рис. 1. Схема включения: g – пузырь газа, e – жидкая фаза, s – вязкоупругая оболочка, l – несущая жидкость.

но влияние параметров оболочки. Впоследствии модель [18] была упрощена для случая, когда толщина вязкоупругой оболочки пузырьков близка к нулю [19]. Здесь же теоретически и экспериментально показано влияние полимерной оболочки микропузырьков на затухание импульсного возмущения. В работе [20] на основе результатов [18] представлена математическая модель, определяющая распространение акустических волн в жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой в приближении взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов [21]. В [22] же рассмотрены пузырьки газа, находящиеся в вязкоупругой среде, и исследована акустика данной пузырьковой смеси. Из сравнения результатов [20] и [21] следует, что учет вязкоупругости несущей среды или оболочки пузырьков приводит к уменьшению коэффициента затухания возмущений и увеличению резонансной частоты включений, что хорошо подтверждено в приведенных сравнениях с экспериментальными данными. Другое направление применения контрастных веществ – газовая эмболотерапия [23–25]. Данный метод подразумевает введение капель специального вещества, каждая из которых заключена в вязкоупругую биологическую оболочку, в кровеносные сосуды, питающие опухоли. После с внешнего устройства подается ультразвук и внутри капель жидкости образуются пузырьки газа, которые растут и блокируют кровеносные сосуды. Без кровоснабжения опухоли не могут расти и распространяться дальше. В связи с этим в данной работе рассмотрены пузырьки газа, содержащие жидкую прослойку и вязкоупругую оболочку, и исследована динамика акустических волн в жидкости с данными включениями.

МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ РЕЛЕЯ–ЛАМБА

Рассмотрим сферический пузырь газа, покрытый вязкоупругой оболочкой, внутри которой

распределена жидкая фаза в виде тонкого слоя на поверхности оболочки. Пузырь находится внутри массива неподвижной несжимаемой жидкости (рис. 1).

Ввиду непроницаемости жидкой оболочки скорость изменения ее радиуса $\dot{R}_1 = dR_1/dt$ совпадает с радиальной скоростью движения на поверхности $u(R_1, t)$. Уравнение неразрывности в сферической системе координат при наличии центральной симметрии записывается следующим образом:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) = 0,$$

и его решение имеет вид

$$u(r, t) = \frac{R_1^2(t)}{r^2} \dot{R}_1(t). \quad (1)$$

Уравнение сохранения импульса в сферических координатах берется в виде

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi}}{r}, \quad (2)$$

где ρ – плотность, p – давление, τ – компоненты тензора напряжений. В силу [26] для сферы компоненты тензора связаны соотношением $\tau_{rr} = -(\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi})$. Проинтегрируем уравнение (2) от R_1 до ∞ с учетом (1). В этом случае интервал от R_1 до R_2 будет соответствовать параметрам жидкой фазы, от R_2 до R_3 – параметрам вязкоупругого слоя, от R_3 до ∞ – параметрам несущей жидкости:

$$\begin{aligned} \rho_s \left(R_1 F \ddot{R}_1 + \frac{4F - H}{2} \dot{R}_1^2 \right) &= p_e(R_1, t) - p_e(R_2, t) + \\ &+ p_s(R_2, t) - p_s(R_3, t) + p_l(R_3, t) - p_\infty + \\ &+ \tau_{rr,e}(R_2, t) - \tau_{rr,e}(R_1, t) + \tau_{rr,s}(R_3, t) - \tau_{rr,s}(R_2, t) - \\ &- \tau_{rr,l}(R_3, t) + 3 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau_{rr,e}}{r} dr + 3 \int_{R_2}^{R_3} \frac{\tau_{rr,s}}{r} dr + 3 \int_{R_3}^{\infty} \frac{\tau_{rr,l}}{r} dr, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{где } F &= \frac{\rho_e}{\rho_s} + \frac{\rho_s - \rho_e}{\rho_s} \frac{R_1}{R_2} + \frac{\rho_l - \rho_s}{\rho_s} \frac{R_1}{R_3}, \quad H = \frac{\rho_e}{\rho_s} + \\ &+ \frac{\rho_s - \rho_e}{\rho_s} \frac{R_1^4}{R_2^4} + \frac{\rho_l - \rho_s}{\rho_s} \frac{R_1^4}{R_3^4}. \end{aligned}$$

Запишем граничные условия между двумя движущимися средами при учете сил поверхностного натяжения [26]

$$p_e(R_1, t) - p_g(R_1, t) + \frac{2\sigma_1}{R_1} = \tau_{rr,e}(R_1, t) - \tau_{rr,g}(R_1, t), \quad (4)$$

$$p_s(R_2, t) - p_e(R_2, t) + \frac{2\sigma_2}{R_2} = \tau_{rr,s}(R_2, t) - \tau_{rr,e}(R_2, t), \quad (5)$$

$$p_l(R_3, t) - p_s(R_3, t) + \frac{2\sigma_3}{R_3} = \tau_{rr,l}(R_3, t) - \tau_{rr,s}(R_3, t), \quad (6)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Если касательные напряжения отсутствуют ($\tau_{rr} = 0$), то имеет место простое уравнение Лапласа [27, 28]. Компоненты тензора напряжений

для жидкости и газа задаются следующим образом:

$$\tau_{rr,l} = 2\mu_l \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \tau_{rr,e} = 2\mu_e \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \tau_{rr,g} = 2\mu_g \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (7)$$

где μ – динамическая вязкость. Отметим, что величина $\tau_{rr,g}$ по порядку меньше, чем $\tau_{rr,l}$, поскольку вязкость газа меньше вязкости жидкости, поэтому в дальнейшем данной величиной можно пренебречь. Вязкоупругость оболочки учитывается на основе реологического уравнения Кельвина–Фойгта, поэтому тензор напряжений задается следующим соотношением [18]:

$$\tau_{rr,s} = -4\left(R_2^2/r^3\right)\left[G_s(R_2 - R_{e2}) + \mu_s \dot{R}_2\right],$$

$$R_{e2} = R_{20}(1 + Z), \quad Z = \frac{1}{4G_s} \frac{R_{30}^3}{V_s} \left(\frac{2\sigma_2}{R_{20}} + \frac{2\sigma_3}{R_{30}}\right), \quad (8)$$

$$V_s = R_{30}^3 - R_{20}^3,$$

где G_s – модуль сдвига оболочки. С учетом (4)–(8) после алгебраических преобразований и по условию несжимаемости оболочки $R_1^2 \dot{R}_1 = R_2^2 \dot{R}_2$ уравнение (3) окончательно примет вид

$$\rho_s \left(R_1 F \ddot{R}_1 + \frac{4F - H}{2} \dot{R}_1^2 \right) = p_g - p_\infty - \frac{2\sigma_1}{R_1} - \frac{2\sigma_2}{R_2} -$$

$$- \frac{2\sigma_3}{R_3} - 4 \frac{G_s V_s}{R_3^3} \left(1 - \frac{R_{e2}}{R_2} \right) -$$

$$- 4 \frac{\dot{R}_1}{R_1} \left(\mu_l \frac{R_1^3}{R_3^3} + \mu_e \left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3} \right) + \mu_s V_s \frac{R_1^3}{R_2^3 R_3^3} \right). \quad (9)$$

Линеаризуем полученное модифицированное уравнение Релея–Ламба (9): $\psi = \psi_0 + \psi'$, $\psi' \ll \psi_0$, $\psi = \{R_1, R_2, R_3, p\}$. Учитывая условие несжимаемости оболочки $R_1^2 \dot{R}_1 = R_2^2 \dot{R}_2 = R_3^2 \dot{R}_3$, находим связь между возмущениями $R_{30}^2 R_3' = R_{20}^2 R_2' = R_{10}^2 R_1'$. После необходимых математических действий линеаризованное уравнение (9) записывается в виде

$$R_{10} \eta \ddot{R}_1' + \frac{4}{\rho_s R_{10}} \left(\mu_l \frac{R_{10}^3}{R_{30}^3} + \mu_e \left(1 - \frac{R_{10}^3}{R_{20}^3} \right) + \right.$$

$$\left. + \mu_s V_s \frac{R_{10}^3}{R_{20}^3 R_{30}^3} \right) \dot{R}_1' + X R_1' = \frac{p_g' - p_\infty'}{\rho_s},$$

$$\eta = \frac{\rho_e}{\rho_s} + \frac{\rho_s - \rho_e}{\rho_s} \frac{R_{10}}{R_{20}} + \frac{\rho_l - \rho_s}{\rho_s} \frac{R_{10}}{R_{30}}, \quad (10)$$

$$X = \frac{1}{\rho_s R_{10}} \left\{ \frac{4V_s G_s R_{10}^3}{R_{20}^3 R_{30}^3} \left(1 + Z \left(1 + 3 \frac{R_{20}^3}{R_{30}^3} \right) \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\sigma_1}{R_{10}} - \frac{2\sigma_2 R_{10}^3}{R_{20}^4} - \frac{2\sigma_3 R_{10}^3}{R_{30}^4} \right\}.$$

В случае, когда отсутствует жидкая прослойка $R_{10} = R_{20}$, $\rho_e = \rho_g$, линеаризованное уравнение (10) по виду совпадает с уравнением, полученным в работе [20].

МЕЖФАЗНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

Для учета межфазного теплообмена запишем уравнения теплопроводности для газа, жидкой прослойки и вязкоупругой оболочки [21, 29]:

$$\rho_g c_{pg} \frac{dT_g}{dt} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_g r^2 \frac{\partial T_g}{\partial r} \right) + \frac{dp_g}{dt}, \quad (11)$$

$$0 < r < R_1,$$

$$\rho_e c_{pe} \frac{dT_e}{dt} = \lambda_e \frac{\partial^2 T_e}{\partial r^2}, \quad R_1 < r < R_2, \quad (12)$$

$$\rho_s c_{ps} \frac{dT_s}{dt} = \lambda_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2}, \quad R_2 < r < R_3. \quad (13)$$

Здесь c_p – удельная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности. При отсутствии внешнего подвода тепла среднemasовая температура жидкости принимается постоянной $T_l = T_0 = \text{const}$, а давление p_g в (11) является функцией только времени $p_g(t)$, т.е. выполняется условие гомобаричности [21]. Данное предположение позволит избежать решения уравнения движения газа внутри пузырька и тем самым упростить систему уравнений. При постановке задачи необходимо задать граничные условия, которые для температур имеют вид

$$r = 0 : \frac{\partial T_g}{\partial r} = 0; \quad r = R_1 : T_g = T_e, \quad (14)$$

$$\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial r} = \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r};$$

$$r = R_2 : T_e = T_s, \quad \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial r}; \quad (15)$$

$$r = R_3 : T_s = T_0 = \text{const}.$$

Здесь первое условие (14) означает отсутствие потока тепла в центр сферического пузырька, остальные условия (14), (15) характеризуют равенство температур и потоков на границах. Отметим, что похожие уравнения были выписаны в работе [30] для учета процессов теплообмена трехслойной ячейки пористой среды. Решение поставленной задачи (11)–(15) для случая малых колебаний пузыря с малой амплитудой находится в виде действительных частей комплексных функций

$$T_j = T_0 + T_j' \exp[-i\omega t], \quad j = g, e, s; \quad (16)$$

$$p_g = p_0 + p_g' \exp[-i\omega t],$$

где ω – частота возмущений. Подставив решение вида (16) в уравнение (11), получим

$$\frac{\partial^2 T_g'}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_g'}{\partial r} + \frac{i\omega}{\kappa_g} T_g' = \frac{i\omega}{\lambda_g} p_g', \quad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{\rho_g c_{pg}}. \quad (17)$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка (17) можно получить в виде суммы частного решения $T'_g = \kappa_g p'_g / \lambda_g$ и линейной комбинации двух независимых решений однородного уравнения

$$T'_g = \frac{\kappa_g}{\lambda_g} \left(1 + G_1 \frac{\sinh(rY_g)}{r} + G_2 \frac{\cosh(rY_g)}{r} \right) p'_g,$$

$$Y_g = \sqrt{-\frac{i\omega}{\kappa_g}}.$$

Здесь G_1, G_2 – неизвестные переменные. Аналогично выписываются решения уравнений (12), (13):

$$T'_e = E_1 \sinh[(r - R_{10})Y_e] + E_2 \cosh[(r - R_{10})Y_e],$$

$$Y_e = \sqrt{-\frac{i\omega}{\kappa_e}},$$

$$T'_s = S_1 \sinh[(r - R_{20})Y_s] + S_2 \cosh[(r - R_{20})Y_s],$$

$$Y_s = \sqrt{-\frac{i\omega}{\kappa_s}}.$$

Неизвестные переменные $G_1, G_2, E_1, E_2, S_1, S_2$ определяются из граничных условий (14), (15).

Получим интеграл энергии для пузырька газа. Предполагается, что область внутри пузырька заполнена совершенным газом, поэтому уравнение состояния берется в виде

$$p_g = \rho_g R T_g = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_{pg} \rho_g T_g. \quad (18)$$

Здесь R – газовая постоянная, γ – показатель адиабаты.

Уравнение неразрывности в сферических координатах имеет вид

$$\frac{d\rho_g}{dt} + 2 \frac{\rho_g u(R_1, t)}{r} = 0. \quad (19)$$

Продифференцировав уравнение (18) по времени t с учетом (19), имеем

$$\frac{dp_g}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_g c_{pg} \frac{dT_g}{dt} - 2 \frac{p_g u(R_1, t)}{r}. \quad (20)$$

После интегрирования уравнения притока тепла для газовой фазы (11) от 0 до R_{10} с учетом (20) линеаризованный интеграл энергии примет вид

$$\frac{dp'_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_{g0}}{R_{10}} u'(R_1, t) + 3 \frac{\gamma - 1}{R_{10}} \lambda_g \left(\frac{\partial T'_g}{\partial r} \right)_{r=R_{10}},$$

и, подставив выражение для $\left(\frac{\partial T'_g}{\partial r} \right)_{r=R_{10}}$, окончательно получим

$$\frac{dp'_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_{g0}}{R_{10}} \frac{dR'_1}{dt} + 3i\omega p'_g (\gamma - 1) \frac{y_g \coth y_g - 1}{y_g^2} \Psi,$$

$$\Psi = \left(1 + \frac{\lambda_g r_e \theta_2}{y_e \lambda_e R_{10}} \frac{y_g \coth y_g - 1}{\theta_1} \right)^{-1},$$

$$\theta_1 = 1 + \frac{\lambda_s y_s r_e}{\lambda_e y_e r_s} \coth y_s \coth y_e,$$

$$\theta_2 = \coth y_e + \frac{\lambda_s y_s r_e}{\lambda_e y_e r_s} \coth y_s, \quad (21)$$

$$y_g = \sqrt{-\frac{i\omega R_{10}^2}{\kappa_g}},$$

$$y_e = \sqrt{-\frac{i\omega r_e^2}{\kappa_e}}, \quad y_s = \sqrt{-\frac{i\omega r_s^2}{\kappa_s}},$$

$$r_e = R_{20} - R_{10}, \quad r_s = R_{30} - R_{20}.$$

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Представим решения уравнений (10), (21) в виде бегущих волн $R'_1 = \Delta R \exp(-i\omega t)$, $p' = \Delta p \exp(-i\omega t)$, где $\Delta R, \Delta p$ – амплитуды волн, тогда

$$\left(-\omega^2 - i\omega(\delta_l + \delta_e + \delta_s) + \frac{X}{\eta R_{10}} \right) \Delta R = \frac{\Delta p_g - \Delta p_\infty}{\eta R_{10} \rho_s}, \quad (22)$$

$$\Delta p_g = -\frac{p_{g0}}{R_{10}} \Phi \Delta R, \quad (23)$$

$$\delta_l = \frac{4\mu_l}{\rho_s \eta R_{10}^2} \frac{R_{10}^3}{R_{30}^3}, \quad \delta_e = \frac{4\mu_e}{\rho_s \eta R_{10}^2} \left(1 - \frac{R_{10}^3}{R_{20}^3} \right),$$

$$\delta_s = \frac{4\mu_s V_s}{\rho_s \eta R_{10}^2} \frac{R_{10}^3}{R_{20}^3 R_{30}^3}, \quad (24)$$

$$\Phi = \frac{3\gamma}{1 + 3(\gamma - 1)\Psi (y_g \coth y_g - 1)/y_g^2}.$$

Подставим выражение (23) в уравнение (22) с учетом того, что $\Phi = \text{Re } \Phi + i \text{Im } \Phi$, и получим

$$\Delta R = -\frac{1}{\omega_0^2 - i\omega\delta - \omega^2 \rho_s \eta R_{10}} \frac{\Delta p_\infty}{\rho_s \eta R_{10}}, \quad (25)$$

$$\delta = \delta_l + \delta_e + \delta_s + \delta_t + \delta_a,$$

$$\delta_l = -\frac{1}{\rho_s \eta R_{10}^2} \frac{p_{g0}}{\omega} \text{Im } \Phi, \quad \delta_a = \frac{\omega^2 R_{30}}{C_1}, \quad (26)$$

$$\omega_0^2 = \frac{X}{\eta R_{10}} + \frac{p_{g0}}{\rho_s \eta R_{10}^2} \frac{\text{Re } \Phi}{\rho_s \eta R_{10}^2} = \frac{X}{\eta R_{10}} + \frac{3\gamma p_{g0}}{\rho_s \eta R_{10}^2}. \quad (27)$$

Здесь C_1 – скорость звука в жидкости; ω_0 – резонансная частота включения; δ – диссипативные параметры, связанные с вязкостью жидкости δ_l и δ_e , вязкоупругостью оболочки δ_s , тепловыми потерями δ_t и акустическими потерями δ_a . Отме-

тим, что если отсутствует вязкоупругая оболочка и прослойка жидкости, а также не учитываются эффекты поверхностного натяжения $X = 0$, $\rho_l = \rho_s$, то резонансная частота приобретает известное выражение частоты Миннаэрта

$$\omega_0^2 = \frac{3\gamma p_{g0}}{\rho_l R_{l0}^2}.$$

Запишем волновое уравнение для пузырьковой жидкости [10]

$$\frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 p_\infty}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_\infty}{\partial x^2} = 4\pi\rho_l \int_0^\infty R_{l0}^2 \ddot{R}_1 f dR_{l0}, \quad (28)$$

где f – функция распределения пузырьков по размерам. С учетом $\ddot{R}_1 = -\omega^2 \Delta R$, $\frac{\partial^2 p_\infty}{\partial t^2} = -\omega^2 \Delta p_\infty$ и выражения (25) уравнение (28) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \Delta p_\infty}{\partial x^2} + K_*^2 \Delta p_\infty = 0, \quad (29)$$

$$K_*^2 = \frac{\omega^2}{C_1^2} + \frac{4\pi\rho_l \omega^2}{\rho_s \eta} \int_0^\infty \frac{R_{l0} f dR_{l0}}{\omega_0^2 - i\omega\delta - \omega^2}.$$

Здесь K_* – комплексное волновое число, а уравнение (29) является дисперсионным уравнением, характеризующим распространение акустической волны в рассматриваемой полидисперсной пузырьковой среде. Если выбрать $f = n\delta(R - R_{l0})$, где δ – функция Дирака, $n = 3\alpha/(4\pi R_{l0}^3)$ – количество включений в единице объема, α – объемное содержание, то интеграл в (29) можно опустить и включения будут монодисперсными. Следует заметить, что если рассматриваются бегущие волны в другом направлении $\exp(i\omega t)$, то в дисперсионном уравнении (29) перед членом $i\omega\delta$ знак “минус” необходимо заменить на “плюс” и в выражении для тепловых потерь δ , следует опустить знак “минус”.

При предельном переходе $\omega \rightarrow 0$ из дисперсионного соотношения (29) получено выражение равновесной (низкочастотной) скорости звука

$$\frac{1}{C_e^2} = \frac{1}{C_1^2} + \frac{3\alpha(1-\alpha)\rho_l}{3\gamma p_0 + \rho_s R_{l0} X}. \quad (30)$$

Для случая газовых пузырьков без оболочек $X = 0$ равновесная скорость звука принимает известное выражение [21]

$$\frac{1}{C_e^2} = \frac{1}{C_1^2} + \frac{\alpha(1-\alpha)\rho_l}{\gamma p_0}. \quad (31)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим распространение акустической волны в воде, содержащей пузырьки воздуха, по-

крытые резиновой оболочкой, на внутренней поверхности которой распределен тонкий слой воды. Давление смеси $p_0 = 0.1$ МПа, температура $T_0 = 293$ К. Параметры оболочки [31]: $\rho_s = 1476$ кг/м³, $\mu_s = 0.99$ Па с, $G_s = 52 \times 10^6$ Па. Примем, что параметры внутреннего и внешнего слоев жидкости равны, в этом случае $\rho_e = \rho_l$, $\mu_e = \mu_l$.

На рис. 2 представлены результаты сравнения диссипативных параметров как функций частоты возмущений при различных размерах включений по формулам (24) и (26). В зависимости от характерных размеров и частоты волны преобладают различные механизмы затухания. Для очень маленьких пузырьков $\sim 10^{-5}$ м в широком диапазоне частот преобладает затухание, связанное с вязкоупругостью оболочки $\delta \approx \delta_s$ (рис. 2а). С увеличением частоты возмущений $f > 7 \times 10^7$ Гц начинают преобладать эффекты затухания, связанные с переизлучением волны $\delta \approx \delta_a$. По мере увеличения размера включений влияние вязкостных эффектов оболочки ослабевает и начинают доминировать термические потери $\delta \approx \delta_t$ (рис. 2б–2г). Однако при высоких частотах независимо от размеров включений все также преобладают акустические потери $\delta \approx \delta_a$, связанные с переизлучением волны. Наглядно влияние теплообмена на зависимость коэффициента затухания от частоты возмущений проиллюстрировано на рис. 3 для параметров включения, представленных на рис. 2в, и при объемном содержании пузырьков $\alpha = 0.01$. Учет теплообмена приводит к заметному увеличению коэффициента затухания на частотах до 5000 Гц. Выше этой частоты влияние теплообмена незначительно. Такая же тенденция независимо от объемного содержания пузырьков наблюдается и на рис. 2в, где $\delta \approx \delta_t$ при частотах до 5000 Гц.

На рис. 4а представлены зависимости фазовой скорости и ее низкочастотные асимптотики, полученные по формуле (30), а на рис. 4б – зависимости коэффициента затухания от частоты возмущений при различных размерах внутреннего водного слоя на поверхности вязкоупругой оболочки.

Во-первых, с увеличением водного слоя на каждые 100 мкм происходит уменьшение фазовой скорости при низких и умеренных частотах примерно на 100 м/с. Коэффициент затухания при этом увеличивается. Во-вторых, происходит уменьшение собственной частоты колебаний пузырьков, так как локальный минимум фазовой скорости и максимум коэффициента затухания смещаются влево с ростом размера водного слоя. Следует обратить внимание также на то, что если для обычных пузырьковых жидкостей равновесная скорость (31) не зависит от размера пузырь-

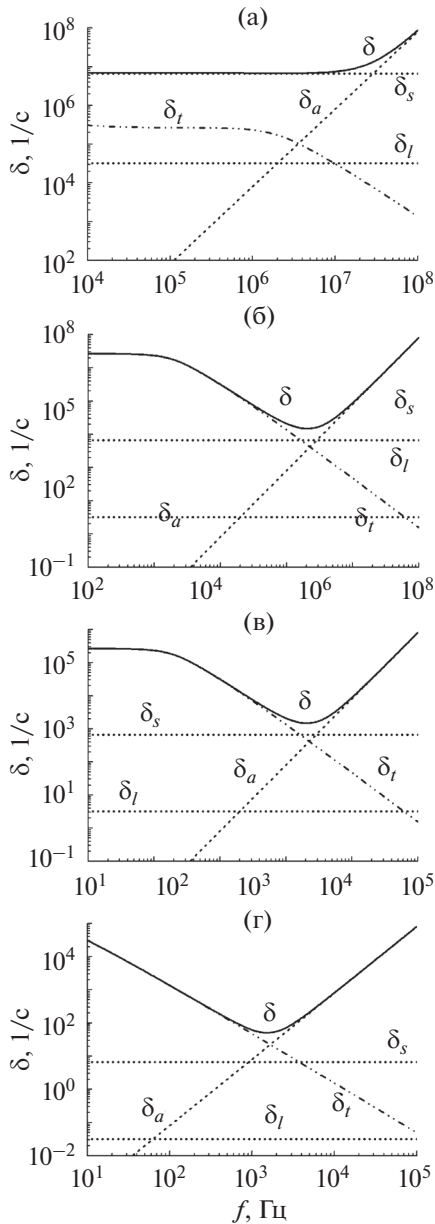


Рис. 2. Зависимости параметров диссипации от частоты возмущений для различных радиусов включений: (а) – $R_0 = 10^{-5}$, $r_e = r_s = 10^{-6}$ м; (б) – 10^{-4} , 10^{-5} ; (в) – 10^{-3} , 10^{-4} ; (г) – 10^{-2} , 10^{-3} .

ков и частоты возмущений, то для рассматриваемых в данной задаче оболочечных пузырьков равновесная скорость (30) существенно зависит от размера внутреннего слоя жидкости и размера вязкоупругой оболочки, а также модуля сдвига G_s .

В справочнике [32] приведены эмпирические формулы, по которым можно рассчитать зависимости модуля сдвига и вязкости бутиловой резины от частоты возмущений при различных температурах, что и представлено на рис. 5.

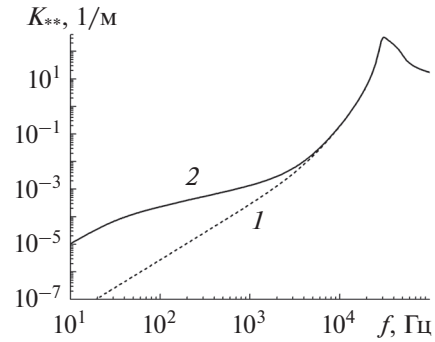


Рис. 3. Зависимости коэффициента затухания от частоты возмущений: 1 – без учета теплообмена $\delta_l = 0$, 2 – с учетом теплообмена $\delta_l \neq 0$.

Видно, что с ростом температуры вязкость и модуль сдвига бутиловой резины уменьшаются. При этом с ростом частоты возмущений модуль сдвига монотонно увеличивается, а вязкость резины имеет немонотонный характер. На малых частотах наблюдается рост вязкости, а затем по мере увеличения частоты возмущений происходит ее снижение. В работе [33] сообщаются экспериментальные данные измерения коэффициента затухания как функции частоты для смеси воды с воздушными шариками, покрытыми бутиловой резиной при температуре $T_0 = 303$ К и давлении $p_0 = 1.21 \times 10^5$ Па. Радиус шара составлял $r_g = 6.08 \times 10^{-2}$ м, толщина резиновой оболочки $r_s = 1.6 \times 10^{-3}$ м, объемное содержание $\alpha = 0.0053$. Длина волны в эксперименте изменяется от 3 до 22 м, что позволяет не учитывать процессы взаимодействия непосредственно между пузырьками и применить полученную теоретическую модель к результатам эксперимента. Ознакомьтесь с работами, где приведены различные механизмы взаимодействия между включениями в двухфазных средах, можно в обзоре [34]. На рис. 6 представлены зависимости фазовой скорости (рис. 6а) и коэффициента затухания (рис. 6б) от частоты возмущений для смеси воды с воздушными шариками, покрытыми резиновой оболочкой. Для коэффициента затухания приведено сравнение с экспериментальными данными [33]. Видно, что учет упругой оболочки пузырьков приводит к увеличению резонансной частоты включения, что также хорошо подтверждается экспериментальными данными. С увеличением температуры от 10 до 30 градусов происходит увеличение коэффициента затухания и уменьшение собственной частоты колебаний пузырьков. Физически это объясняется следующим образом. При более высокой температуре резина становится мягче (уменьшается вязкость, рис. 5), поэтому радиальные колебания пузырьков проходят более интенсивно и происходит большее рассеяние акустической волны, нежели при более жест-

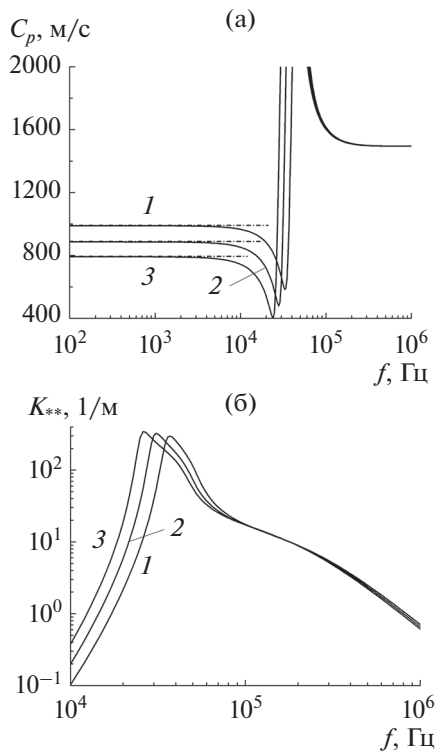


Рис. 4. Зависимости фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) от частоты возмущений при $r_s = 10^{-4}$ м, $R_{10} = 10^{-3}$ м, $\alpha = 0.01$ и различных размерах водного слоя: 1 – $r_e = 0$, 2 – 10^{-4} , 3 – 2×10^{-4} м.

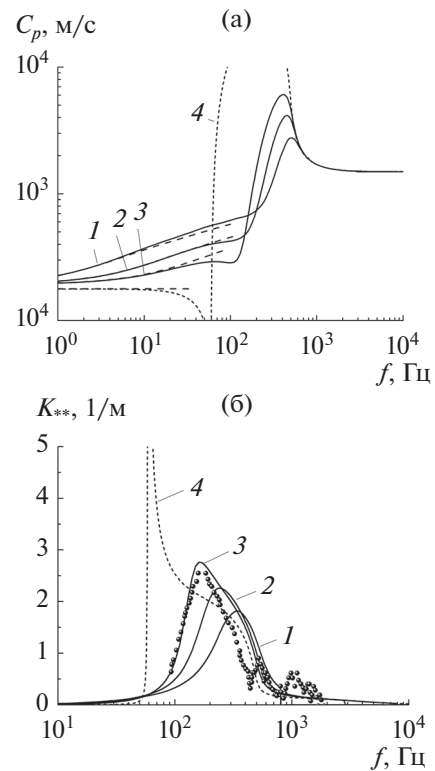


Рис. 6. Частотные зависимости фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) для различных функций модуля сдвига и вязкости резины: 1–3 – то же, что на рис. 5; 4 – без учета упругой оболочки; пунктиром показаны асимптотики фазовой скорости по формуле (30).

кой резиновой оболочке, которая сдерживает пульсации включений. Что касается уменьшения собственной частоты колебаний пузырьков, то из формулы (27) очевидно, что с уменьшением модуля сдвига упругой оболочки резонансная частота ω_0 уменьшается. Если на рис. 4а продемонстрирована зависимость равновесной (низкочастотной) скорости звука от размеров оболочки и жидкого слоя, то

на данном примере (рис. 6а) показано, что равновесная скорость звука может зависеть, хотя и неявно, также и от частоты возмущений, поскольку модуль сдвига G_s является функцией частоты (рис. 5). Таким образом, показано существенное отличие акустики пузырьков с оболочкой от акустики обычных пузырьков жидкостей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дан анализ влияния размеров включений и частоты возмущений на различные механизмы затухания акустической волны. На основании проведенных расчетов показано, что наличие водной пленки на внутренней поверхности вязкоупругой оболочки пузырька газа приводит к уменьшению скорости звука и увеличению коэффициента затухания при низких частотах. Продемонстрирована зависимость равновесной скорости звука от размера жидкой пленки, вязкоупругой оболочки и также частоты возмущений, что существенно отличается от акустических свойств обычной пузырьковой жидкости. Для смеси воды с пузырьками газа, покрытыми бутиловой резиной, найдено удовлетворительное соответствие теоретической зависимости коэффициента затухания от

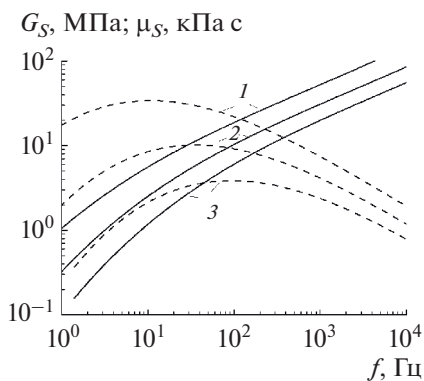


Рис. 5. Зависимости модуля сдвига G_s (сплошные) и вязкости μ_s (штриховые линии) для бутиловой резины при различных температурах: 1 – 283 К, 2 – 293, 3 – 303.

частоты возмущений известным экспериментальным данным.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20070).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности устойчивости и акустических свойств перегретой жидкости с газовыми зародышами при повышении давления // ТВТ. 2019. Т. 57. № 5. С. 748.
- Гималтдинов И.К., Лепихин С.А. Особенности влияния скольжения фаз и начального давления на динамику детонационных волн в пузырьковой жидкости // ТВТ. 2019. Т. 57. № 3. С. 459.
- Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения прохождения акустических волн на границе “чистой” и пузырьковой жидкостей при прямом их падении // ТВТ. 2019. Т. 57. № 2. С. 284.
- Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе “чистой” и пузырьковой жидкостей при “косом” их падении // ТВТ. 2019. Т. 57. № 3. С. 464.
- Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Влияние фазовых переходов на отражение акустических волн от границы парагазожидкостной смеси // ТВТ. 2018. Т. 56. № 2. С. 317.
- Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Особенности отражения акустических волн от границы или слоя двухфазной среды // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 162.
- Wilson P.S., Roy R.A., Carey W.M. Phase Speed and Attenuation in Bubbly Liquids Inferred from Impedance Measurements near the Individual Bubble Resonance Frequency // J. Acoust. Soc. Amer. 2005. V. 117. № 4. P. 1895.
- Duro V., Rajaona D.R., Decultot D., Maze G. Experimental Study of Sound Propagation Through Bubbly Water: Comparison with Optical Measurements // IEEE J. Oceanic Eng. 2011. V. 36. № 1. P. 114.
- Leroy V., Strybulevych A., Page J.H., Scanlon M.G. Sound Velocity and Attenuation in Bubbly Gels Measured by Transmission Experiments // J. Acoust. Soc. Amer. 2008. V. 123. № 4. P. 1931.
- Commander K.W., Prosperetti A. Linear Pressure Waves in Bubbly Liquids: Comparison between Theory and Experiments // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. V. 85. № 2. P. 732.
- Chung N.M., Lin W.K. Sound Velocity and Its Relationship with Interfacial Area Density in a Steam/Water, Two-phase Bubbly Flow // Flow Measurements and Instrumentation. 1992. V. 3. № 2. P. 65.
- Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых средах // ПММ. 2013. Т. 77. № 5. С. 743.
- Вараксин А.Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения // ТВТ. 2013. Т. 51. № 3. С. 421.
- Prosperetti A. Vapor Bubbles // Annu. Rev. Fluid Mech. 2017. V. 49. P. 221.
- Ultrasound Contrast Agents: Basic Principles and Clinical Applications / Eds. Goldberg B.B., Raichlen J.S., Forsberg F. London, UK: Martin Dunitz, 2001.
- Sboros V. Response of Contrast Agents to Ultrasound // Adv. Drug Delivery Rev. 2008. V. 60. P. 1117.
- Ma X., Wang X., Hahn K., Sanchez S. Motion Control of Urea-powered Biocompatible Hollow Microcapsules // ACS Nano. 2016. V. 10. P. 3597.
- Church C.C. The Effects of an Elastic Solid Surface Layer on the Radial Pulsations of Gas Bubbles // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 97. № 3. P. 1510.
- Hoff L., Sontum P.C., Hovem J.M. Oscillations of Polymeric Microbubbles: Effects of the Encapsulating Shell // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107. № 4. P. 2272.
- Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустические волны в жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 2. С. 126.
- Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
- Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Акустические волны в вязкоупругих пузырьковых средах // ТВТ. 2019. Т. 57. № 1. С. 150.
- Bull J.L. The Application of Microbubbles for Targeted Drug Delivery // Expert. Opin. Drug Deliv. 2007. V. 4. № 5. P. 475.
- Bull J.L. Cardiovascular Bubble Dynamics // Crit. Rev. Bioeng. 2005. V. 33. № 4. P. 299.
- Qamar A., Wong Z.Z., Fowlkes J.B., Bull J.L. Dynamics of Acoustic Droplet Vaporization in Gas Embolotherapy // Appl. Phys. Lett. 2010. V. 96. P. 143702.
- Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2010. 520 с.
- Синкевич О.А., Глазков В.В., Киреева А.Н. Обобщенное уравнение Рейля–Ламба // ТВТ. 2012. Т. 50. № 4. С. 555.
- Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1988. 247 с.
- Гималтдинов И.К., Дмитриев В.Л., Ситдикова Л.Ф. Динамика звуковых волн в насыщенных парагазовой смесью пористых средах // ТВТ. 2014. Т. 52. № 4. С. 572.
- Sarkar K., Shi W.T., Chatterjee D., Forsberg F. Characterization of Ultrasound Contrast Microbubbles Using In Vitro Experiments and Viscous and Viscoelastic Interface Models for Encapsulation // J. Acoust. Soc. Amer. 2005. V. 118. № 1. P. 539.
- Capps R.N. Elastomeric Materials for Acoustical Applications. Tech. Rep. AD-A216872. Naval Research Laboratory, 1989. P. 336.
- Lee K.M., Wilson P.S., Wochner M.S. Attenuation of Low-frequency Underwater Sound Using an Array of Air-filled Balloons and Comparison to Effective Medium Theory // J. Acoust. Soc. Amer. 2017. V. 142. № 6. P. 3443.
- Вараксин А.Ю. Столкновения частиц и капель в турбулентных двухфазных потоках // ТВТ. 2019. Т. 57. № 4. С. 588.