

АСИМПТОТИКА НУЛЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ РАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

© 2021 г. С. А. Маслов¹, С. А. Тригер¹, *

¹Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

*E-mail: satron@mail.ru

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.

После доработки 12.10.2021 г.

Принята к публикации 23.11.2021 г.

Рассмотрена высокочастотная асимптотика спектральной плотности распределения равновесного излучения в невырожденном электронном газе. Показано, что при высоких частотах в выражении для равновесного излучения в бесстолкновительном электронном газе происходит перенормировка нулевых колебаний.

DOI: 10.31857/S0040364421060144

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, спектральное распределение энергии равновесного излучения, установленное М. Планком [1], привело к становлению квантовой теории. Распределение Планка соответствует идеализированной модели абсолютно черного тела, представляющей собой полость, заполненную излучением и ограниченную абсолютно поглощающим веществом. При этом предполагается, что излучение находится в термодинамическом равновесии с веществом, хотя эффекты взаимодействия фотонов с ограничивающим веществом не рассматриваются [2–5]. Однако этот подход является заведомо ограниченным [6], так как для установления термодинамического равновесия излучения в веществе необходимо учитывать эффекты поглощения излучения. Следует отметить, что, несмотря на бурное развитие в последние десятилетия физики экстремальных состояний, в частности неидеальной плазмы (см. [7–9] и цитируемую в них литературу), влиянию неидеальности плазмы на излучение, в том числе равновесное, уделялось мало внимания.

Последовательному рассмотрению вопроса о влиянии поглощающей плазменной среды на спектральное распределение энергии равновесного излучения в веществе посвящены недавние статьи [10–17]. В этих работах рассмотрение проводилось для полностью равновесной системы нерелятивистских заряженных частиц и фотонов. В [16] исследовалось низкочастотное поведение спектральной плотности излучения в плазме и было показано, что при низких частотах ($\omega \rightarrow 0$) в приближенном рассмотрении имеется интегрируемая логарифмическая особенность, а при учете

взаимодействия собственного тока с полем она сменяется на интегрируемую особенность $1/\omega^{2/3}$ [18].

В настоящей работе исследована высокочастотная асимптотика (при $\omega \rightarrow \infty$) спектральной плотности излучения при наличии электронного газа. Показано, что из-за особенностей поведения поперечной диэлектрической проницаемости при высоких частотах в плазменной среде возникает перенормировка нулевых колебаний, которые начинают зависеть от плазменных параметров.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

Полная спектральная плотность распределения энергии равновесного излучения при наличии электронного газа в предположении $\alpha \ll 1$, $\Gamma \ll 1$, $\eta \ll 1$ записывается как [17]

$$e(W) = e_1(W) + e_2(W), \quad (1)$$

где слагаемые $e_1(W)$ и $e_2(W)$ определяются формулами

$$e_1(W) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}} \coth\left(\frac{W}{2}\right) \int_0^{+\infty} Y^4 f(Y, W) dY,$$

$$e_2(W) = \frac{4\Gamma\eta^{2/3}\sqrt{2\alpha}}{\pi} \coth\left(\frac{W}{2}\right) \int_0^{+\infty} Y^2 f(Y, W) dY, \quad (2)$$

$$f(Y, W) = \frac{\Psi(Y, W)}{(\alpha\Phi(Y, W) - 2Y^2)^2 + (\alpha\Psi(Y, W))^2}.$$

Здесь введены безразмерные переменные $Y = k\Lambda/\sqrt{4\pi}$, $W = \hbar\omega/T$ (k , ω – соответственно волновое число и частота); $\Gamma = e^2 n^{1/3}/T$ – параметр кулоновского взаимодействия электронов; e , n ,

T – заряд, концентрация и температура электронов; $\eta = n\Lambda^3$, где $\Lambda = \hbar\sqrt{2\pi/mT}$ – длина волны де Бройля. Параметр α определяется выражением $\alpha = (Ry \eta^{2/3}) / (\pi mc^2 \Gamma^2)$, где m – масса электрона, c – скорость света, Ry – постоянная Ридберга. В отсутствие плазменной среды член $e_1(W)$ в (1) отвечает спектральной плотности планковского излучения и описывает нулевые вакуумные флуктуации, а $e_2(W)$ обращается в нуль. Интегральные члены, содержащие поперечную диэлектрическую проницаемость $\epsilon^{tr}(Y, W)$, описывают влияние заряженных частиц на спектральную плотность излучения при наличии плазмы произвольной степени неидеальности и произвольного вырождения.

В случае слабонеидеального невырожденного электронного газа функции $\Phi(Y, W) = W^2 \operatorname{Re} \epsilon^{tr}(Y, W)$ и $\Psi(Y, W) = W^2 \operatorname{Im} \epsilon^{tr}(Y, W)$ в безразмерных переменных Y, W (при $W \rightarrow \infty$) определяются формулами

$$\begin{aligned} \Phi(Y, W) &= W^2 - 2\Gamma\eta^{2/3} - \frac{2\Gamma\eta^{2/3}}{Y} \left(1 + \frac{Y^2}{2}\right) \times \\ &\times \left\{ \left(\frac{W}{2Y} - \frac{Y}{2}\right) {}_1G_1\left[1, \frac{3}{2}, -\left(\frac{W}{2Y} - \frac{Y}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{W}{2Y} + \frac{Y}{2}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times {}_1G_1\left[1, \frac{3}{2}, -\left(\frac{W}{2Y} + \frac{Y}{2}\right)^2\right] \right\}, \\ \Psi(Y, W) &= \sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3} \left(\frac{1}{Y} + \frac{Y}{2\pi}\right) \exp\left(-\frac{W^2}{4Y^2} - \frac{Y^2}{4}\right) \times \\ &\times \left[\exp\left(\frac{W}{2}\right) - \exp\left(-\frac{W}{2}\right) \right] \cong \sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3} \left(\frac{1}{Y} + \frac{Y}{2\pi}\right) \times \\ &\quad \times \exp\left[-\left(\frac{W}{2Y} - \frac{Y}{2}\right)^2\right], \end{aligned} \quad (3)$$

где ${}_1G_1(1, 3/2, -x^2)$ – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [19]. Для исследования спектральной функции распределения энергии при высоких частотах ($W \rightarrow \infty$) в предположении $\alpha\Gamma\eta^{2/3} \ll 1$ запишем функции $e_1(W)$ и $e_2(W)$ в виде следующих сумм:

$$\begin{aligned} e_1(W) &\cong \frac{4\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}} \left(\int_0^{W^{1/4}} Y^4 f(Y, W) dY + \right. \\ &\quad \left. + \int_{W^{3/4}}^{W^{3/2}} Y^4 f(Y, W) dY + \right. \\ &\quad \left. + \int_{W^{3/4}}^{W^{3/2}} Y^4 f(Y, W) dY + \int_{W^{3/2}}^{+\infty} Y^4 f(Y, W) dY \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} e_2(W) &\cong \frac{4\Gamma\eta^{2/3}\sqrt{2\alpha}}{\pi} \left(\int_0^{W^{1/4}} Y^2 f(Y, W) dY + \right. \\ &\quad \left. + \int_{W^{3/4}}^{W^{3/2}} Y^2 f(Y, W) dY + \int_{W^{3/4}}^{W^{3/2}} Y^2 f(Y, W) dY + \right. \\ &\quad \left. + \int_{W^{3/2}}^{+\infty} Y^2 f(Y, W) dY \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Необходимость разбиения интегралов на отдельные области связана с тем, что для любого сколь угодно большого W имеются такие большие значения переменной интегрирования Y , которые не позволяют рассмотреть асимптотику по W универсальным образом. Рассмотрим асимптотическое поведение подынтегральных выражений в формулах (5), (6) и, соответственно, функций $\Phi(Y, W)$ и $\Psi(Y, W)$ при различных Y .

1. Области $0 \leq Y \leq W^{1/4}$ и $Y \geq W^{3/2}$. В этих случаях $W/2Y \pm Y/2 \rightarrow \infty$ и асимптотика вырожденной гипергеометрической функции Куммера [19] удовлетворяет выражению ${}_1G_1(1, 3/2, -(W/2Y \pm Y/2)^2) \cong 1/2(W/2Y \pm Y/2)^{-2}$, откуда следует асимптотическое равенство $\alpha\Phi(Y, W) - 2Y^2 \cong \alpha W^2$. Подставляя это приближенное равенство и формулу (4) для функции $\Psi(Y, W)$ в первый и четвертый интегралы в (5), получаем верхнюю оценку

$$\begin{aligned} \frac{4\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}} \left(\int_0^{W^{1/4}} Y^4 f(Y, W) dY + \int_{W^{3/2}}^{+\infty} Y^4 f(Y, W) dY \right) &\ll \\ &\ll \exp\left(-\frac{W^2}{4}\right), \quad W \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Область $W^{1/4} \leq Y \leq W^{3/4}$. Поскольку гипергеометрическая функция Куммера всегда принимает значения от 0 до 1, последнее слагаемое в правой части (3) можно оценить как

$$\begin{aligned} &\left| \frac{2\Gamma\eta^{2/3}}{Y} \left(1 + \frac{Y^2}{2}\right) \left(\frac{W}{2Y} - \frac{Y}{2}\right) {}_1F_1\left[1, 3/2, -\left(\frac{W}{2Y} - \frac{Y}{2}\right)^2\right] - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{W}{2Y} + \frac{Y}{2}\right) {}_1F_1\left[1, 3/2, -\left(\frac{W}{2Y} + \frac{Y}{2}\right)^2\right] \right| \leq \\ &\leq \frac{2\Gamma\eta^{2/3}}{Y} \left(1 + \frac{Y^2}{2}\right) \left\{ \left|\frac{W}{2Y} - \frac{Y}{2}\right| + \left|\frac{W}{2Y} + \frac{Y}{2}\right| \right\} \ll \\ &\ll 2\Gamma\eta^{2/3} Y W \ll W^2, \end{aligned}$$

откуда $\alpha\Phi(Y, W) - 2Y^2 \cong \alpha W^2 \gg \Psi(Y, W)$. В свою очередь, асимптотика функции $\Psi(Y, W)$ при $W^{1/4} \leq Y \leq W^{3/4}$ имеет вид

$$\Psi(Y, W) \cong \sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3} \frac{Y}{2\pi} \exp\left(-\frac{W^2}{4Y^2} - \frac{Y^2}{4} + \frac{W}{2}\right). \quad (8)$$

Подставляя эту формулу во второй интеграл правой части (5), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{4\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}} \int_{W^{1/4}}^{W^{3/4}} Y^4 f(Y, W) dY = \frac{4\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}} \times \\ & \times \int_{W^{1/4}}^{W^{3/4}} \frac{\Psi(Y, W) Y^4 dY}{(\alpha\Phi(Y, W) - 2Y^2)^2 + (\alpha\Psi(Y, W))^2} \cong \\ & \cong \frac{4\Gamma\eta^{2/3}\sqrt{2\pi}}{\pi\alpha^{5/2}W^4} \int_{W^{1/4}}^{W^{3/4}} \frac{Y^5}{2\pi} \exp\left(\frac{W}{2} - \frac{W^2}{4Y^2} - \frac{Y^2}{4}\right) dY \cong \\ & \cong \frac{2\Gamma\eta^{2/3}\sqrt{2}}{\pi\alpha^{5/2}W^{3/2}}. \end{aligned} \tag{9}$$

3. Область $W^{3/4} \leq Y \leq W^{3/2}$. В этом случае оценки показывают, что асимптотика функции $\Psi(Y, W)$ удовлетворяет уравнению (8), а выражение $\alpha\Phi(Y, W) - 2Y^2$ в знаменателе $f(Y, W)$ в последней формуле (2) приближенно равно

$$\begin{aligned} & \alpha\Phi(Y, W) - 2Y^2 \cong \alpha W^2 + \\ & + \frac{8\alpha\Gamma\eta^{2/3}}{Y^2} + \frac{2\alpha\Gamma\eta^{2/3}W^2}{Y^4} - 2Y^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Приравнявая (10) к нулю, находим приближенный корень

$$Y_0 \cong W \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left[1 + \frac{4\Gamma\eta^{2/3}(1 + 2\alpha)}{\alpha^2 W^4} \right]. \tag{11}$$

С целью дальнейшего исследования третий интеграл в правой части (5) для $e_1(W)$ удобно записать в виде суммы

$$\begin{aligned} & \frac{4\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}} \int_{W^{3/4}}^{W^{3/2}} Y^4 f(Y, W) dY = \\ & = \frac{4\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}} \left(\int_{W^{3/4}}^{Y_0-1/W^4} Y^4 f(Y, W) dY + \right. \\ & \left. + \int_{Y_0-1/W^4}^{Y_0+1/W^4} Y^4 f(Y, W) dY + \int_{Y_0+1/W^4}^{W^{3/2}} Y^4 f(Y, W) dY \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Из формулы (4) следует, что при $Y_0 - 1/W^4 \leq Y \leq Y_0 + 1/W^4$ функция

$$\alpha\Psi(Y, W) \cong \alpha\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3} \frac{Y_0}{2\pi} \exp\left[-\left(\frac{W}{2Y_0} - \frac{Y_0}{2}\right)^2\right] = A(W),$$

обозначенная $A(W)$ (в дальнейшем для краткости функция $A(W)$ обозначена A , поскольку она не зависит от переменной интегрирования Y), имеет порядок $A \cong \alpha\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}Y_0 \exp\left[-(W\sqrt{\alpha/8} - \sqrt{1/2\alpha})^2\right]/2\pi$, что гораздо меньше любого из слагаемых в правой части (10) при $W \rightarrow \infty$. Поэтому второй интеграл в правой части (12) приближенно равен следующему выражению:

$$\begin{aligned} & \frac{4\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}} \int_{Y_0-1/W^4}^{Y_0+1/W^4} Y^4 f(Y, W) dY = \frac{4\sqrt{2}}{\pi\alpha^{3/2}} \int_{Y_0-1/W^4}^{Y_0+1/W^4} \frac{AY^4 dY}{(\alpha\Phi(Y, W) - 2Y^2)^2 + A^2} \cong \\ & \cong \frac{4\sqrt{2}Y_0^4}{\pi\alpha^{3/2}} \int_{Y_0-1/W^4}^{Y_0+1/W^4} \frac{AdY}{(\alpha W^2 + 8\alpha\Gamma\eta^{2/3}Y^{-2} + 2\alpha\Gamma\eta^{2/3}W^2Y^{-4} - 2Y^2)^2 + A^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

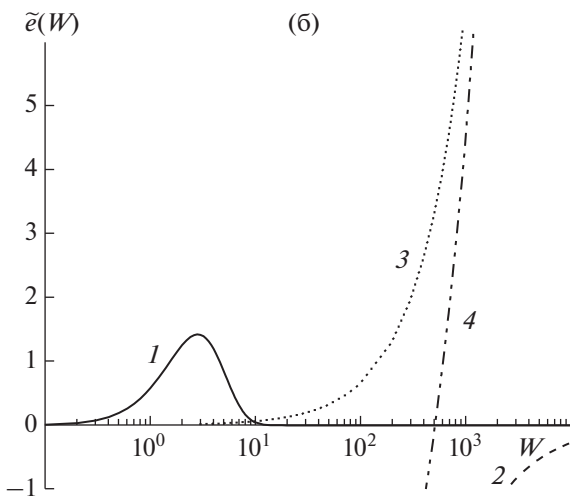
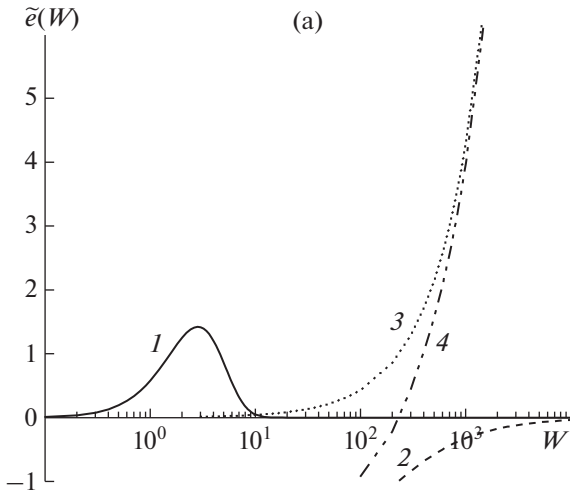
Введем переменную $Z = A^{-1}(2Y^2 - \alpha W^2 - 8\alpha\Gamma\eta^{2/3}Y^{-2} - 2\alpha\Gamma\eta^{2/3}W^2Y^{-4})$ и, подставляя в по-

следнее выражение формулу (11) для Y_0 , приходим к асимптотическому виду интеграла

$$\begin{aligned} & \frac{4\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}} \int_{Y_0-1/W^4}^{Y_0+1/W^4} Y^4 f(Y, W) dY \cong \frac{4Y_0^4\sqrt{2}}{\pi\alpha^{3/2}} \times \left(4Y_0 + \frac{16\alpha\Gamma\eta^{2/3}}{Y_0^3} + \frac{8\alpha\Gamma\eta^{2/3}W^2}{Y_0^5} \right)^{-1} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dZ}{Z^2 + A^2} \cong \frac{Y_0^3\sqrt{2}}{\alpha^{3/2}} \left(1 + \frac{4\alpha\Gamma\eta^{2/3}}{Y_0^4} + \frac{2\alpha\Gamma\eta^{2/3}W^2}{Y_0^6} \right)^{-1} \cong \\ & \cong \frac{W^3}{2} \left(1 + \frac{4\Gamma\eta^{2/3}(1 + 2\alpha)}{\alpha^2 W^4} \right)^3 \times \left(1 + \frac{16\Gamma\eta^{2/3}}{\alpha W^4} + \frac{16\Gamma\eta^{2/3}}{\alpha^2 W^4} \right)^{-1} \cong \frac{W^3}{2} - \frac{2\Gamma\eta^{2/3}(1 - 2\alpha)}{\alpha^2 W}. \end{aligned} \tag{14}$$

Используя формулы (3), (4) и асимптотику гипергеометрической функции, можно показать, что два других интеграла в правой части (12) по порядку

величины не превосходят $1/W^2$, т.е. не дают существенного вклада в $e_1(W)$. Следовательно, при больших W для функции $e_1(W)$ находим асимптотику



Распределение Планка: 1 – $W^3 [\exp(W) - 1]^{-1}$, 2 – $\tilde{e}_1(W) - W^3/2$, 3 – $\tilde{e}_2(W)$, 4 – $\tilde{e}_1(W) + \tilde{e}_2(W) - W^3/2$ при $\eta = 0.1$ и $\Gamma = 0.02$ (а), $\Gamma = 0.03$ (б); по горизонтальной оси масштаб логарифмический, по вертикальной – линейный.

$$e_1(W \gg 1) \cong \tilde{e}_1(W) = \frac{W^3}{2} - \frac{2\Gamma\eta^{2/3}(1-2\alpha)}{\alpha^2 W} + \frac{2\Gamma\eta^{2/3}\sqrt{2}}{\pi\alpha^{5/2}W^{3/2}} \quad (15)$$

Аналогично формулам (7)–(15) можно получить приближенную оценку для $e_2(W)$ в (6) и, соответственно, асимптотику полной спектральной плотности $e(W)$ в (1):

$$e_2(W \gg 1) \cong \tilde{e}_2(W) = \Gamma\eta^{2/3}W, \quad (16)$$

$$e(W \gg 1) \cong \tilde{e}_1(W) + \tilde{e}_2(W) = \frac{W^3}{2} + \Gamma\eta^{2/3}W - \frac{2\Gamma\eta^{2/3}(1-2\alpha)}{\alpha^2 W} + \frac{2\Gamma\eta^{2/3}\sqrt{2}}{\pi\alpha^{5/2}W^{3/2}} \quad (17)$$

Первые три члена в правой части (17) представляют собой перенормированные за счет наличия неидеального электронного газа нулевые колебания, являясь неким аналогом эффекта Казимира для плазменной среды. Однако среда в данном случае фигурирует не в виде стенок, ограничивающих электромагнитное излучение, а в виде слабонеидеального электронного газа. Вопрос о перенормировке нулевых колебаний в рамках приближения Бриллюэна рассмотрен впервые в [2], а аналогия с эффектом Казимира обсуждалась в [20].

Последний член в (17) описывает длинный “хвост”, возникающий в высокочастотной асимптотике планковской части спектральной плотности равновесного излучения, существование которого было впервые показано в [15].

На рисунке для примера представлены сравнительные графики распределения Планка и высокочастотной асимптотики спектральной плотности распределения энергии излучения по формулам (15)–(17) при значениях параметров $\eta = 0.1$ и двух значениях параметра $\Gamma = 0.02$ и 0.03 при $\alpha \ll 1$. Выход на асимптотический режим в зависящем от параметров электронного газа вкладе в нулевые колебания $e(W) - W^3/2$ с ростом Γ происходит при больших W .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено высокочастотное разложение для полной спектральной плотности равновесного излучения в слабонеидеальном невырожденном электронном газе. Влияние плазменной подсистемы учитывается через поперечную диэлектрическую проницаемость, зависящую от частоты и волнового вектора. Выявлена определяющая роль в асимптотическом поведении части спектральной плотности $e_2(W)$, связанной с взаимодействием собственного тока и собственного векторного потенциала в гамильтониане взаимодействующих электронов и фотонов. Члены спектральной плотности излучения, приводящие к расходимости полной энергии электромагнитного поля, отнесены к перенормировке нулевых колебаний поля. Перенормированные нулевые колебания зависят от плотности и температуры электронов, что дает основания надеяться на возможность их экспериментального обнаружения, например по изменению лэмбовского сдвига. Как известно, учет вакуумных колебаний приводит к улучшению согласия с экспериментом по тонкому расщеплению уровней, впервые надежно измеренному для атома водорода Лэмбом и Резерфордом [21]. Расходящиеся вклады от спектральной плотности в полную энергию излучения приводят к конечному результату для величины расщепления уровней, близкому к измеренным данным (см., например, [22]). Полученные в статье результаты показывают, что экспериментальные данные по рас-

щеплению уровней могут иметь дополнительную зависимость от параметров плазменной среды.

Асимптотическое выражение для спектральной плотности включает также часть, приводящую к интегрируемому вкладу в полную энергию равновесного излучения. Данная часть должна интерпретироваться как длинный “хвост” планковского излучения, возникающий на высоких частотах при наличии плазменной среды. Возможность экспериментального обнаружения такого поведения требует дополнительного исследования. Результаты работы представляют, в частности, интерес в приложении к эволюции плазмы ранней Вселенной [23], а также к плазменным объектам при экстремальных плотностях и температурах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение с ОИВТ РАН № 075-15-2020-785 от 23 сентября 2020 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Planck M.* Entropie und Temperatur strahlender Wärme // *Annalen der Physik.* 1990. Bd. 306. № 4. S. 719.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Мир, 1984. 592 с.
3. *Левин М.Л., Рытов С.М.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М.: Наука, 1967. 307 с.
4. *Волокитин А.И., Перссон Б.Н.Дж.* Радиационная передача тепла и бесконтактное трение между наноструктурами // *УФН.* 2007. Т. 177. № 9. С. 921.
5. *Виноградов Е.А., Дорофеев И.А.* Термостимулированные электромагнитные поля твердых тел // *УФН.* 2009. Т. 179. № 5. С. 449.
6. *Trigger S.A.* Non-Planck Equilibrium Radiation in Plasma Model of Early Universe // *Phys. Lett. A.* 2007. V. 370. P. 365.
7. *Фортв В.Е., Храпак А.Г., Якубов И.Т.* Физика неидеальной плазмы. М.: Физматлит, 2010. 526 с.
8. *Фортв В.Е., Филинов В.С., Ларкин А.С., Эбелинг В.* Статистическая физика плотных газов и неидеальной плазмы. М.: Физматлит, 2020. 671 с.
9. *Dornheim T., Groth S., Bonitz M.* The Uniform Electron Gas at Warm Dense Matter Conditions // *Phys. Rep.* 2018. V. 744. P. 1.
10. *Medvedev M.V.* Thermodynamics of Photons in Relativistic $e^+ e^- \gamma$ Plasmas // *Phys. Rev. E.* 1999. V. 59. R4766.
11. *Bannur V.M.* Self-Consistent Quasiparticle Model Results for Ultrarelativistic Electron-Positron Thermodynamic Plasma // *Phys. Rev. E.* 2006. V. 73. 067401.
12. *Trigger S.A., Khomkin A.L.* Non-Planckian Equilibrium Radiation in Plasma-like Medium // *Plasma Phys. Rep.* 2010. V. 36. P. 1095.
13. *Munirov V.R., Fisch N.J.* Radiation in Equilibrium with Plasma and Plasma Effects on Cosmic Microwave Background // *Phys. Rev. E.* 2019. V. 100. 023202.
14. *Бобров В.Б., Соколов И.М., Тригер С.А.* О спектральном распределении энергии равновесного излучения в веществе // *Письма в ЖЭТФ.* 2015. Т. 101. № 5. С. 326.
15. *Бобров В.Б., Тригер С.А.* Высокочастотное спектральное распределение энергии равновесного излучения в плазме // *ТМФ.* 2016. Т. 187. № 1. С. 104.
16. *Маслов С.А., Тригер С.А., Гусейн-заде Н.Г.* Асимптотическое поведение спектральной функции распределения энергии излучения в максвелловской плазме при низких частотах // *Краткие сообщения по физике ФИАН.* 2018. № 8. С. 14.
17. *Trigger S.A.* Equilibrium Radiation in a Plasma Medium with Spatial and Frequency Dispersion // *Phys. Scr.* 2020. V. 95. № 7. 075504.
18. *Trigger S.A., Maslov S.A.* Primordial Plasma: Influence of Non-ideality on Equilibrium Radiation // *Phys. Scr.* 2021. V. 96. № 1. 015605.
19. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
20. *Игнатов А.М., Тригер С.А.* О спектральном распределении равновесного излучения и нулевых флуктуациях в кулоновской системе // *Краткие сообщения по физике ФИАН.* 2020. № 1. С. 11.
21. *Lamb W.E., Jr., Retherford R.C.* Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method // *Phys. Rev.* 1947. V. 72. P. 241.
22. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. 4-е изд. М.: Физматлит, 2002. 720 с.
23. *Зельдович Я.Б.* Теория вакуума, быть может, решает загадку космологии // *УФН.* 1981. Т. 133. № 3. С. 479.