

УДК 532.54

## КРУТИЛЬНО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ВИСКОЗИМЕТР ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В РЕЖИМЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

© 2022 г. И. В. Елюхина\*

*Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия*

*\*E-mail: Inna.Elyukhina@susu.ac.ru*

Поступила в редакцию 01.04.2021 г.

После доработки 19.10.2021 г.

Принята к публикации 23.11.2021 г.

Выполняется анализ крутильно-колебательного вискозиметра для работы в режиме вынужденных колебаний. Изучаются амплитудно-частотные характеристики вискозиметра, заполненного линейными и нелинейными жидкостями, в зависимости от экспериментальных условий. Предложены методы идентификации их реологических свойств. Для этих нелинейных задач разрабатывается аналитический подход, который строится на основе точных решений для линейных жидкостей. Подход обеспечивает высокую степень согласованности и является достаточно простым для использования на практике. Результаты расширяют теорию как вискозиметрии расплавов, так и нелинейной колебательной реометрии.

DOI: 10.31857/S0040364422030061

### ВВЕДЕНИЕ

С середины 20-го века до настоящего времени крутильно-колебательный вискозиметр является предпочтительной техникой для исследования высокотемпературных расплавов: расплавленных металлов и сплавов, солей, полупроводников, жидких кристаллов и пр. (например, [1–12] и ссылки в них). Обычно вискозиметр используется в режиме затухающих колебаний (за исключением [13]). Это наиболее подходящий метод для жидких металлов в связи с особенностями, относящимися к высокой температуре, химической активности и диапазону вязкости с достаточной чувствительностью. Их исследование часто ограничивается этим устройством как в физике конденсированного состояния, так и в металлургической промышленности. Вискозиметр характеризуется высокой точностью, простотой техники, образцами малых объемов (т.е. также изотермичностью и пр.), отсутствием погружаемых зондов, условиями для использования инертных материалов и атмосферы.

В последнее десятилетие активно обсуждается проблема неньютоновского поведения металлических расплавов, что может играть решающую роль при проектировании технологических процессов. Такие исследования начали выполняться, прежде всего, в связи с широким использованием серийно производимых ротационных вискозиметров для высоких температур (например, [14–17]). Несоответствие в данных различных авторов может достигать трех порядков величины, в том числе для одних и тех же расплавов и скоростей сдвига (например, [18, 19]). Такие приборы представляют собой черный ящик и часто не ясно, что может привести к некорректным результатам; в них не в полной мере учтена специфика подобных экспериментов.

Крутильно-колебательный метод (в режиме затухающих колебаний) недавно был также расширен на неньютоновские жидкости (например, [20, 21]). Этот вискозиметр обычно используется при высоких температурах, а по мере того, как температура падает и, в частности, в переохлажденном состоянии, исследование выполняется, например, реометром с параллельными пластинами [22]. Анализ неньютоновского поведения может представлять интерес для зоны частичного затвердевания, но вискозиметр в режиме затухающих колебаний не обеспечивает идентифицируемость этих свойств: тогда экспериментально наблюдаемые параметры (период и декремент) близки к таковым для вискозиметра, заполненного твердым телом. Образец, являющийся неньютоновской жидкостью при высоких температурах, может начать проявлять нелинейные реологические свойства по мере снижения температуры.

Такой подход для вынужденных крутильных колебаний позволяет выполнять измерения одним и тем же методом и исключить некоторые расхождения в экспериментальных данных, связанные с переходом к другой технике измерения в ином температурном интервале. Кроме того, по сравнению с методом затухающих крутильных колебаний режим вынужденных колебаний позволяет охватить более широкий диапазон свойств жидкостей, исключить ошибки, вносимые переходными процессами, и является предпочтительным в части автоматизации измерений и устойчивости к шуму. Эта техника расширяет линейку прецизионных приборов для изучения неньютоновских свойств, включая случай расплавленных сред (например, как в [23]).

Имеются следующие результаты, касающиеся исследования неньютоновских жидкостей кру-

тильно-колебательным вискозиметром (цилиндром) в режиме вынужденных колебаний. Для линейных жидкостей в случае затухающих колебаний точное решение для ньютоновской (линейно вязкой) жидкости впервые получено в [1] и его различные формы найдены в [24], что может быть также использовано для линейных вязкоупругих жидкостей в терминах комплексной вязкости. Это решение расширено на вынужденные колебания и использовано для двух линейных вязкоупругих жидкостей: моделей Максвелла и Фойгта [13]. Для нелинейных жидкостей развита теория для случая затухающих колебаний крутильного вискозиметра, заполненного неньютоновскими жидкостями [5, 6], включая жидкости Оствальда–де Вейля (нелинейно вязкая, со степенным законом), Бингама (линейная вязкопластичная) и Гершеля–Балкли (нелинейная вязкопластичная) [25], жидкость Джонсона–Сигельмана (с неаффинными деформациями) [26], упругую вязкопластичную жидкость [27], с некоторыми оценками для металлических расплавов [28]. Построена математическая модель для вынужденных колебаний вискозиметра, заполненного нелинейными жидкостями [29], и даны некоторые особенности, прежде всего, в рамках фурье-реологии [20].

В данной работе дается теория крутильного вискозиметра в режиме вынужденных колебаний: особенности нелинейных колебаний детализированы и систематизированы для более простого и полного их понимания, развит алгоритм для оценки реологических свойств, включая метод для нелинейных жидкостей с использованием точных решений. Показано, как применять уже имеющиеся результаты для линейных жидкостей и режима затухающих колебаний с целью интерпретации нелинейного поведения, идентификации нелинейных свойств и моделирования этих экспериментов.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В крутильной вискозиметрии вертикальный полый цилиндр с образцом внутри совершает крутильные колебания вокруг своей оси симметрии. Математическую модель представим следующим образом:

$$\ddot{\alpha} + \alpha = \alpha_0 \sin \lambda T - 4A \xi_0^{-2} \sigma_{\xi\phi} \Big|_{\xi=\xi_0}; \quad (1)$$

$$\dot{U} = \sigma_{\xi\phi}' + 2\sigma_{\xi\phi}/\xi; \quad (2)$$

$$T = 0: \alpha = 0, \dot{\alpha} = 0, U = 0; \quad (3)$$

$$\xi = 0: U = 0; \xi = \xi_0: U = \dot{\alpha} \xi_0,$$

где

$$\begin{aligned} A &= 0.5MR^2/K; \quad \xi_0 = R/d, \quad \xi = r/d, \\ d &= \sqrt{V/\omega_0}; \quad \lambda = \omega/\omega_0, \quad \alpha_0 = F/(K\omega_0^2); \\ U &= V/(d\omega_0), \quad T = \omega_0 t, \quad D_{\xi\phi} = U' - U/\xi, \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $D_{\xi\phi}$  – скорость сдвига;  $K$  – момент инерции вискозиметра;  $M$  – масса образца;  $R$  – внутренний радиус цилиндра;  $r$  и  $\phi$  – радиальная и угловая координаты ( $r = 0$  на оси цилиндра);  $t$  – время;  $V$  – азимутальная компонента скорости;  $\alpha$  – угловое смещение из положения равновесия;  $F$  и  $\omega$  – амплитуда и частота вынуждающей силы;  $\sigma_{\xi\phi}$  – компонента тензора напряжений;  $\nu$  – кинематическая вязкость образца;  $\omega_0$  – собственная частота системы; точка обозначает производную по времени, штрих – производную по  $\xi$ ; реологическая модель, например, для ньютоновской жидкости имеет вид  $\sigma_{\xi\phi} = D_{\xi\phi}$ .

Частота  $\omega_0$  выражается из прецизионных измерений частоты и декремента  $\delta_0$  или добротности для пустого тигля. В (1)–(4) использована модель для длинного цилиндра и  $\delta_0 \sim 0$  для того, чтобы более ясно показать особенности, специфические для случая вынужденных колебаний, без каких-либо иных деталей. Модель отвечает условию отсутствия проскальзывания, несжимаемой жидкости и малым колебаниям, что позволяет предположить осесимметричность течения и принять в расчет только компоненту  $V$  вектора скорости.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

### Линейные жидкости

Для установившихся колебаний в виде  $\alpha = a \sin(\lambda T + \varphi)$  решение системы (1)–(4) для ньютоновской жидкости следующее:

$$\bar{a} = (L_r^2 + L_i^2)^{-0.5}, \quad \text{tg} \varphi = -L_i/L_r, \quad (5)$$

$$L = s^2 + 1 + D(s), \quad D(s) = \frac{4}{\xi_0} s A \sqrt{s} \frac{I_2(\sqrt{s} \xi_0)}{I_1(\sqrt{s} \xi_0)}, \quad (6)$$

где  $\bar{a} = a/\alpha_0$ ,  $L = L_r + iL_i$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $s = \lambda i$ ,  $\lambda = \omega/\omega_0$ ;  $I_1$ ,  $I_2$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго порядка;  $D(s)$  дано в виде [24];  $\varphi$  – сдвиг фаз между колебаниями тигля и вынуждающей силой.

Для сравнения в режиме затухающих колебаний:  $L = s^2 + 1 + D(s) = 0$  и  $s = \lambda(-\Delta + i)$  (например, [1, 24]). При линейных колебаниях (например, для следующих условий: ньютоновская жидкость, отсутствие существенных вторичных течений и пр.) амплитуда  $\bar{a}$  не зависит от  $\alpha_0$ .

Для описания поведения линейной вязкоупругой жидкости в этом колебательном сдвиговом течении используется комплексная вязкость и параметр  $\xi_0$  умножается на коэффициент, равный, например,  $\sqrt{1 + sWe}$  для модели Максвелла, где  $We = \theta \omega_0$  – число Вейссенберга;  $\theta$  – время релаксации жидкости.

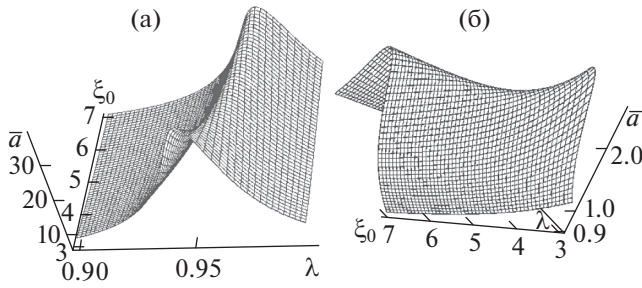


Рис. 1. Амплитуда  $\bar{a} = \bar{a}(\lambda, \xi_0)$  для ньютоновской жидкости: (а) –  $A = 0.1$ ; (б) –  $0.15$ .

Функция  $D(s)$  (6) включает два параметра эксперимента:  $A$  – отношение момента инерции образца как твердого тела к  $K$  и  $\xi_0$  – отношение  $R$  к толщине пограничного слоя  $d$ .

Рассмотрим, как изменяются в зависимости от них параметры колебаний. Сначала представим особенности для режима затухающих колебаний. Для вискозиметра, заполненного жидкостью, частота ниже ( $\lambda < 1$ ) и декремент выше, чем для пустого тигля, ввиду дополнительного увеличения момента инерции (коэффициент в скобках с  $\ddot{\alpha}$ ) и дополнительной диссипации механической энергии из-за вязкого трения (коэффициент в скобках с  $\dot{\alpha}$ ) соответственно.

В случаях  $\xi_0 \rightarrow 0$  и  $\xi_0 \rightarrow \infty$  имеем твердое тело и идеальную жидкость с декрементом  $\rightarrow \delta_0$ , с  $\lambda \rightarrow (1 + A)^{-0.5}$  и  $\lambda \rightarrow 1$  соответственно. Декремент как функция  $\xi_0$  имеет максимум: вязкость уменьшается и скорость сдвига увеличивается при увеличении  $\xi_0$  и при некотором  $\xi_0 = \xi_0^\delta$  возникает экстремум. Для длинного цилиндра это значение  $\xi_0^\delta \sim 4.3$ . При увеличении  $A$  растут декремент и период. Для вязкоупругих жидкостей число экстремумов на этих зависимостях от  $\xi_0$  увеличивается ввиду усиления влияния упругой компоненты и определяется соотношением  $d$  и длины упругой волны. Перечисленные особенности показаны на рис. 2 в [20, 21]. При понижении температуры расплава параметр  $\xi_0$  уменьшается, т.е. период увеличивается и декремент уменьшается при  $\xi_0 < \xi_0^\delta$  или проходит через максимум, если начальное значение  $\xi_0 > \xi_0^\delta$ . Такое поведение, в том числе между солидусом и ликвидусом, показано, например, на рис. 44 в [1].

Параметры колебаний в вынужденном режиме ведут себя подобным образом. Для ньютоновской жидкости (рис. 1–3; на рис. 1а и 1б масштаб оси  $\lambda$  одинаков) с ростом  $\xi_0$ : 1) резонансная амплитуда  $\bar{a}_{\text{res}}$  сначала уменьшается и затем растет, 2) резонансная частота  $\lambda_{\text{res}} < 1$  сдвигается к единице и ширина резонансной кривой имеет некоторый максимум, амплитуда уменьшается с ростом  $A$ . Для вяз-

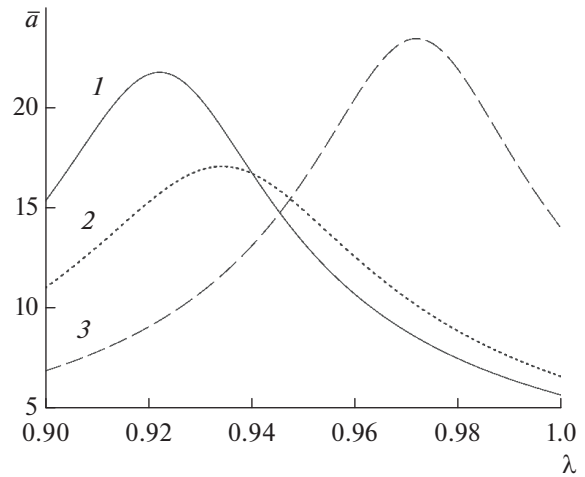


Рис. 2. Амплитуда  $\bar{a} = \bar{a}(\lambda)$  для ньютоновской жидкости ( $A = 0.2$ ): 1 –  $\xi_0 = 3$ ; 2 – 4; 3 – 10.

коупругих жидкостей изменение амплитуды  $\bar{a}$  носит колебательный характер вдоль  $\xi_0$ . Кроме того, амплитуда  $\bar{a}$  в резонансе может быть настолько высокой, что вторичные течения начнут оказывать выраженное влияние и потребуются анализ с использованием полной осесимметричной модели течения жидкости (например, [30]).

*Нелинейные жидкости*

По сравнению со случаем линейных жидкостей установившиеся колебания вискозиметра, заполненного нелинейными жидкостями, являются нелинейными и, например,  $\bar{a}$  не остается постоянной при изменении  $\alpha_0$ . Это позволяет предположить такое поведение жидкости. Рассмотрим два подхода для оценки свойств жидкости в зависимости от того, какая модель – численная или аналитическая – используется. В качестве примера в модели (1)–(4) возьмем нелинейная вязкая жидкость со следующим реологическим уравнением состояния:

$$\sigma_{\xi\varphi} = b D_{\xi\varphi} D^{m-1}, \tag{7}$$

где второй инвариант  $D = |D_{\xi\varphi}|$ ;  $b = \omega_0^{m-1} k / \eta$ ;  $k$  и  $m$  – параметры модели;  $\eta$  – некоторое фиксированное значение динамической вязкости;  $\rho$  – плотность; (7) отвечает жидкостям Оствальда–де Вейля.

**Численный подход.** Реологические свойства жидкости оцениваются с использованием процедуры подгонки. Функция невязки учитывает относительное отклонение между измеряемыми и рассчитанными значениями и строится по методу наименьших квадратов:  $f = \sqrt{\sum (\Delta x_j / \bar{x}_j)^2}$ , где  $\Delta x_j$  и  $\bar{x}_j$  – абсолютное отклонение и среднее значение  $x$  между ними в  $j$ -й точке соответственно; также могут вводиться весовые коэффициенты. Эта функция минимизируется на множестве неизвестных параметров и для жидкости (7) функция

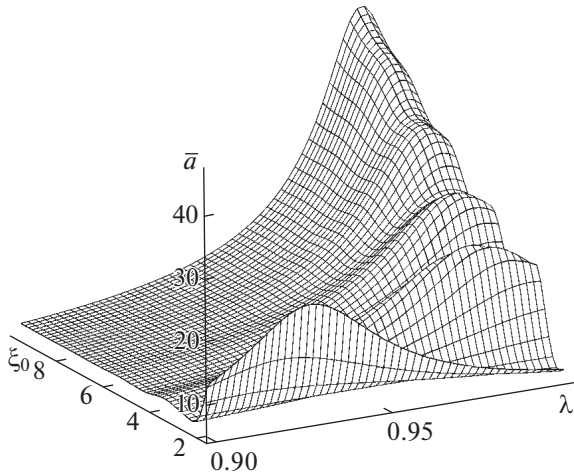


Рис. 3. Амплитуда  $\bar{a} = \bar{a}(\lambda, \xi_0)$  для жидкости Максвелла ( $A = 0.1$ ;  $We = 3$ ).

$f(b, m) \rightarrow 0$ . Далее при моделировании диапазон параметров выбирается на основе нелинейных данных по металлическим расплавам, полученным, в частности, в [28], и результатов анализа, обсуждаемых в [20] для режима затухающих колебаний.

Значения  $x$  отвечают некоторой кривой, например такой как амплитудная кривая, включая случаи для различных  $\xi_0$  (рис. 4) или  $\alpha_0$  (рис. 5). На рис. 4 показано изменение амплитуды для реологических констант, близких к базовому случаю, для демонстрации наблюдаемости. В качестве примера моделируются эксперименты с  $A = 0.2$ ,  $\xi_0 = 4$  и  $\xi_0 = 8$  для жидкости с  $b = 1$ ,  $m = 1.4$ , а в закон колебаний внесена ошибка измерений до 0.5%. Так, для  $\xi_0 = 8$  резонанс более выраженный (в частности, диссипация слабее), но значения амплитуды для случаев 1 и 2 (с различными реологическими параметрами) близки друг к другу, функция невязки  $f = f(b, m)$  более пологая вблизи минимума и последний сдвигается дальше от истинных значений параметров при наличии ошибок измерения. Для нескольких экспериментальных точек функция  $f$  равна, например, 0.166 для жидкости с  $b = 1.1$ ,  $m = 1.3$  и 0.28 для  $b = 0.9$ ,  $m = 1.7$  (при  $\xi_0 = 4$ ); случай с  $\xi_0 = 8$  дает  $f = 0.081$  для  $b = 1.1$ ,  $m = 1.3$ .

На рис. 5 показаны данные для амплитудных кривых  $a/\alpha_0$ , которые для нелинейных жидкостей являются различными при разных  $\alpha_0$ . Это указывает на нелинейную реологическую модель в отличие от линейных жидкостей, для которых они являются одной и той же кривой. Колебания вискозиметра как твердого тела при скоростях сдвига ниже некоторого значения показывают наличие предела текучести. Функция невязки может иметь овражистый вид, и могут возникать локальные минимумы при слабой наблюдаемости нелинейных эффектов. Так, для улучшения наблюдаемости экспериментальные точки выбираются в зависимости от точности пря-

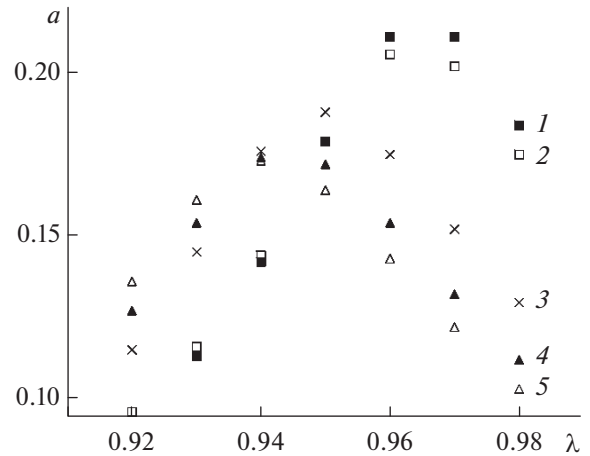


Рис. 4. Зависимость  $a$  от  $\lambda$  для жидкости Оствальда–Вейля ( $A = 0.2$ ,  $\alpha_0 = 0.01$ ): 1 –  $b = 1$ ,  $m = 1.4$ ,  $\xi_0 = 8$ ; 2 – 1.1, 1.3, 8; 3 – 0.9, 1.7, 4; 4 – 1, 1.4, 4 (базовый случай); 5 – 1.1, 1.3, 4.

мым измерений и чувствительности к их ошибкам. В некоторых случаях эффективно сначала находить реологический тип и затем рассчитывать свойства для уже известной модели, что определяется из оптимального эксперимента.

Для оценки свойств жидкости и при планировании оптимального эксперимента используются методы параметрической идентификации (например, [20, 21]), где учитываются данные для различных экспериментальных условий:  $A$  и  $\xi_0$ . Это можно применять в комбинации с кривыми для различных  $\alpha_0$  (как на рис. 5), используя  $a$ ,  $\varphi$  или обе характеристики, например, в их относительных величинах, учитывая точность измерения каждой из них и т.п. Минимум  $f$  более выражен для  $f$  с большим числом экспериментальных точек, но тогда накаплива-

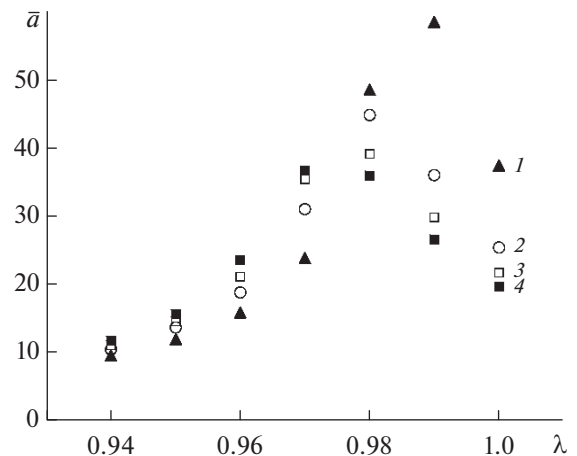
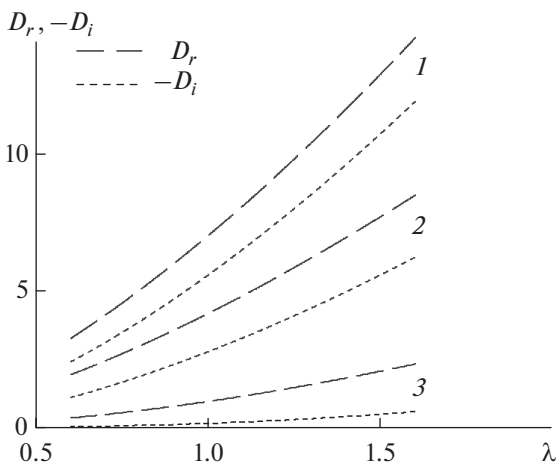


Рис. 5. Зависимость  $\bar{a}$  от  $\lambda$  для жидкости Оствальда–Вейля ( $A = 0.1$ ,  $\xi_0 = 7$ ;  $b = 1$ ,  $m = 2.2$ ): 1 –  $\alpha_0 = 0.001$ ; 2 – 0.005; 3 – 0.01 (базовый случай); 4 – 0.015.

ются ошибки прямых измерений. Резонансная амплитуда  $a_{\text{res}}$ , в частности зависимость  $a_{\text{res}}$  от  $\xi_0$  (или, например,  $\bar{a}_{\text{res}} = \bar{a}_{\text{res}}(\alpha_0)$ ), может быть использована как  $x$  при выраженном резонансном пике. В общем случае выбираются данные по резонансной частоте  $\lambda_{\text{res}}$  или некоторая зависимость для фазы на основе планирования эксперимента. При увеличении  $\xi_0$  частота  $\lambda_{\text{res}}$  изменяется слабо и предпочтительно использовать данные по  $a_{\text{res}}$ . Подобный метод заключается в определении значений амплитуды  $\alpha_0$  вынуждающей силы, соответствующей одной и той же амплитуде колебаний при различных частотах.

**Аналитический подход.** Функция  $z(y) = y^{m-1}$  ( $y > 0, m > 0$ ) имеет следующие особенности: 1)  $z(y)$  растет при  $m > 1$  и убывает при  $m < 1$ , 2)  $m > 1$ :  $z(y) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow 0$ ;  $m < 1$ :  $z(y) \rightarrow \infty$  при  $y \rightarrow 0$ , 3)  $m < 1$ :  $y^{m-1} > y$  при  $y < 1$ ,  $y^{m-1} < y$  при  $y > 1$ ,  $z(y)$  выпукла вниз;  $m > 2$ :  $y^{m-1} < y$  при  $y < 1$ ,  $y^{m-1} > y$  при  $y > 1$ ,  $z(y)$  выпукла вниз;  $1 < m < 2$ :  $y^{m-1} > y$  при  $y < 1$ ,  $y^{m-1} < y$  при  $y > 1$ ,  $z(y)$  выпукла вверх.

Это объясняет особенности в терминах кажущейся вязкости  $\eta_{\text{app}}$  степенной жидкости для случаев, когда  $\eta_{\text{app}}$  выше или ниже ньютоновской вязкости в зависимости от скорости сдвига. Для реологической модели (7) безразмерная кажущаяся вязкость  $\bar{\eta}_{\text{app}} = bD^{m-1}$ . Эти особенности отражаются в характере течения жидкости: глубина проникновения течения пропорциональна  $\bar{\eta}_{\text{app}}$  и, в частности, развитое течение с  $U \neq 0$  расширяется на область за пределами  $\xi = \xi_0$  в зависимости от  $D$ . Так, для  $D > 1$  и жидкостей с  $m < 1$  вязкость  $\bar{\eta}_{\text{app}}$  ниже, чем ньютоновская, и область, начиная от  $\xi = 0$ , с  $U \sim 0$  шире и ее граница ближе к  $\xi_0$ .



**Рис. 6.** Зависимость действительной и мнимой частей  $D$  (9) от  $\lambda$  для ньютоновской жидкости: 1 –  $\xi_0 = 10$ ; 2 – 6; 3 – 2.

В практических приложениях важно иметь по возможности наиболее простую модель и предпочтение отдается точным решениям. Построим некоторую модификацию метода на основе подхода, разработанного в [31], где для идентификации свойств нелинейных жидкостей используются аналитические выражения для линейных жидкостей.

Скорость сдвига на стенке находится по формуле

$$D_0 = aDe^{\tilde{s}T}, \tag{8}$$

$$D = -s\sqrt{s}\xi_0 I_2(\sqrt{s}\xi_0)/I_1(\sqrt{s}\xi_0), \tag{9}$$

где  $D = D_r + iD_i$ ,  $D_r, D_i$  – действительная и мнимая части  $D$ ;  $a$  – амплитуда в  $\alpha = \alpha(T)$ , которая рассчитывается по (5), (6); в  $\tilde{s}$  имеется некоторый сдвиг фаз. Изменение  $D$  в зависимости от экспериментальных условий  $\xi_0$  и  $\lambda$  показано на рис. 6.

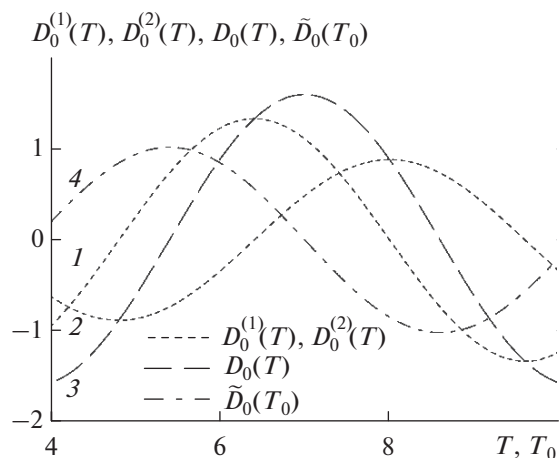
Действительная часть от  $D_0$  (8), которая и дает значения скорости сдвига на стенке, может быть представлена как

$$D_0/a = D_r \cos(\lambda T + \varphi + \pi/2) - D_i \sin(\lambda T + \varphi + \pi/2). \tag{10}$$

Найдем величину  $\tilde{D}_0$ , являющуюся осредненным по времени значением  $D_0$ . Осреднение выполняется по полупериоду, начиная с некоторой точки  $T_0$  по времени, когда 1)  $D_0|_{T=T_0} = 0$ , 2) функция  $D_0 = D_0(T)$  возрастает на  $T = T_0$  и затем для  $D_0 \geq 0$ :

$$\tilde{D}_0 = \frac{\lambda}{\pi} \int_{T_0}^{T_0 + \pi/\lambda} D_0(T) dT, \tag{11}$$

где значения  $T_0$  находятся как корни функции  $D_0 = D_0(T)$  (10). Вместо нахождения  $T_0$  и расчета по (11), значение  $\tilde{D}_0$  может быть найдено как амплитудное значение функции  $\tilde{D}_0 = \tilde{D}_0(T_0)$ .



**Рис. 7.** Составляющие зависимостей для скорости сдвига (10), (11) для ньютоновской жидкости ( $A = 0.1$ ,  $\xi_0 = 6$ ,  $\lambda = 0.98$ ,  $\alpha_0 = 0.01$ ).



В качестве примера рассмотрим случай:  $A = 0.1$ ,  $\lambda = 0.98$ ,  $\xi_0 = 6$ ,  $\alpha_0 = 0.01$ . Амплитуда  $a = 0.32898$  из (5), (6). Отношение  $D_r/D_i = -1.50952$  и  $T_0 = \arctg(D_r/D_i)/\lambda = 5.40559$  ( $T_0$  может быть найдено иным образом). Расчет по (11) дает  $\tilde{D}_0 = 1.020199$  без учета сдвига фаз, последний может не приниматься во внимание при расчете осредненного по времени значения  $D_0$ . Рис. 7 демонстрирует следующие кривые: первое  $D_0^{(1)}(T) = aD_r \cos(\lambda T)$  (кривая 1) и второе  $D_0^{(2)}(T) = -aD_i \sin(\lambda T)$  (кривая 2) слагаемые в (10), что дает их сумму (кривая 3);  $\tilde{D}_0$  как функция  $T_0$ :  $\tilde{D}_0 = \tilde{D}_0(T_0)$  (кривая 4).

Введем параметр

$$\xi_{\text{app}} = \xi_0 / \sqrt{b \tilde{D}_0^{m-1}} \quad (12)$$

для интерпретации нелинейно вязкого поведения в терминах линейно вязкой модели. Параметры колебаний для нелинейных жидкостей изменяются соответственно в терминах от параметра  $\xi_{\text{app}}$ . Функция невязки включает разницу между  $\xi_{\text{app}}$  и  $\tilde{\xi}_{\text{app}}$  в  $j$ -й точке, где с использованием экспериментальных данных значение  $\xi_{\text{app}}$  находится из (5), (6): 1)  $\tilde{D}_0$  рассчитывается по (11); 2)  $\xi_{\text{app}}$  определяется по (12).

Рис. 8 демонстрирует оценку для экспериментальных данных из некоторого интервала амплитудных кривых (рис. 8а). Эксперимент моделируется численно для жидкости с  $b = 1.8$ ,  $m = 1.5$  с использованием (1)–(4), (7); ошибка измерения – до 0.5%; экспериментальные условия следующие:  $A = 0.1$ ,  $\xi_0 = 5$ ,  $\alpha_0 = 0.01$  (случай 1) и  $\alpha_0 = 0.1$  (случай 2). Затем оцениваются реологические свойства этой жидкости с использованием точек на рис. 8а. Найденные значения  $\tilde{\xi}_{\text{app}}$  и  $\xi_{\text{app}}$  показаны на рис. 8б. Они применяются для подгонки кривых и минимизации функции невязки.

Слева от резонансного пика значение  $\xi_0$  уменьшается и  $\tilde{D}_0$  увеличивается при росте  $\lambda$ . При приближении  $\lambda$  к резонансной частоте  $\lambda_{\text{res}}$  нелинейные эффекты усиливаются и может возникать нелинейный резонанс, функция невязки для нахождения  $\xi_{\text{app}}$  как разницы между значениями  $a$ , измеренными и рассчитанными по (5), (6), может не иметь корня. Экспериментальные данные, полученные для различных скоростей сдвига, укладываются на одну кривую (рис. 8б), но может возникать некоторое отклонение от нее вблизи  $\lambda_{\text{res}}$ . Тогда эксперименты выполняются для различных условий, соответствующих различным  $\tilde{D}_0$  при  $\lambda_{\text{res}}$ , и эти данные в окрестности  $\lambda_{\text{res}}$  исключаются из рассмотрения.

С ростом  $\lambda < \lambda_{\text{res}}$  параметр  $\tilde{D}_0$  уменьшается и  $\xi_0$  увеличивается. Частота становится выше  $\lambda_{\text{res}}$ , и затем тот же самый интервал кривой  $\xi_{\text{app}} = \xi_{\text{app}}(\tilde{D}_0)$  проходит снова, но в обратном направлении. Подход позволяет достаточно корректно оценивать степень нелинейности и показатель степенного закона  $m$ . Ошибка в амплитуде  $a$  может иметь существенное влияние на оценку  $b$  ввиду высокой чувствительности. Тогда используется комбинация методов: например,  $m$  определяется из кривых  $a_{\text{res}} = a_{\text{res}}(\lambda_{\text{res}})$ ,  $a_{\text{res}} = a_{\text{res}}(\xi_0)$ ,  $a_{\text{res}} = a_{\text{res}}(A)$  или иных, слабо зависящих от  $b$  при определенных экспериментальных условиях, а постоянная степенного закона  $k$  – из анализа амплитудно-фазовых характеристик, включая кривые  $a_{\text{res}} = a_{\text{res}}(b)$  и т.п., для заданного  $\xi_0$ . При подозрении на нелинейное

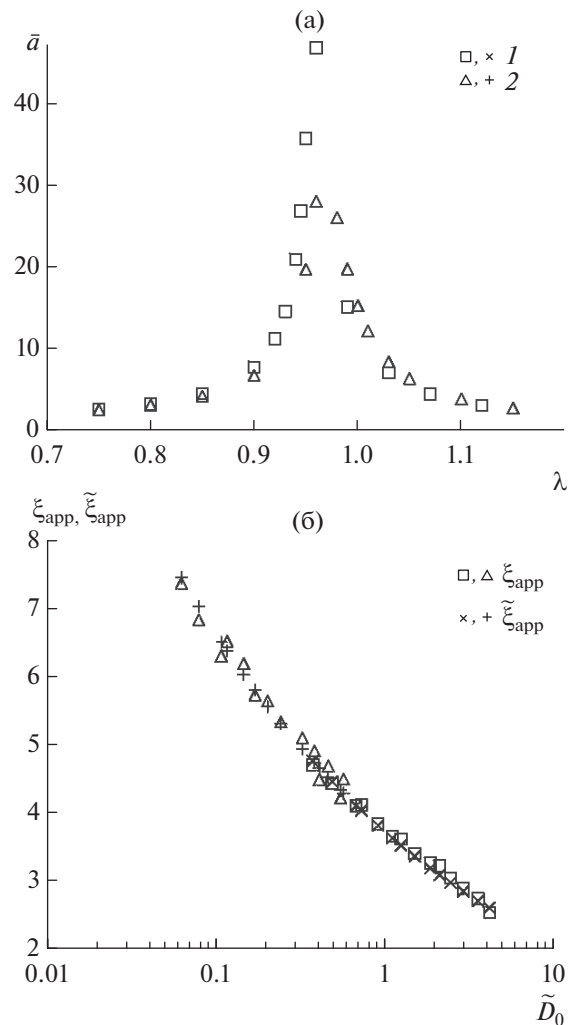


Рис. 8. Зависимости, используемые для оценки свойств жидкости ( $A = 0.1$ ,  $\xi_0 = 5$ ;  $b = 1.8$ ,  $m = 1.5$ ; 1 –  $\alpha_0 = 0.1$ , 2 – 0.01): (а) –  $\bar{a} = \bar{a}(\lambda)$ ; (б) –  $\xi_{\text{app}} = \xi_{\text{app}}(\tilde{D}_0)$  и  $\tilde{\xi}_{\text{app}} = \tilde{\xi}_{\text{app}}(\tilde{D}_0)$ .

поведение жидкости проводится серия экспериментов и воспроизводимость нелинейных эффектов в них изучается с помощью анализа чувствительности.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ крутильно-колебательного вискозиметра демонстрирует наблюдаемость нелинейных свойств в режиме вынужденных колебаний. Нелинейные эффекты изучаются в терминах амплитудно-частотных характеристик. Предложено несколько методов для измерения реологических свойств жидкостей на основе полученных особенностей. В разработанном аналитическом подходе для их идентификации используются точные решения для линейных жидкостей (5), (6), (8)–(11). Подход показывает высокую степень согласия (рис. 8б) и может быть рекомендован для использования на практике. Данный метод расширяет теорию как вискозиметрии расплавленных металлов на нелинейные случаи в режиме вынужденных колебаний, так и колебательной реометрии на метод нахождения реологической модели из прецизионных измерений параметров колебаний и на точные алгоритмы нелинейных нестационарных проблем.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. М.: ГИТТЛ, 1955. 206 с.
2. Brooks R.F., Dinsdale A.T., Queded P.N. The Measurement of Viscosity of Alloys – A Review of Methods, Data, and Models // Meas. Sci. Technol. 2005. V. 16. P. 354.
3. Cheng J.J., Grobner J., Hor N., Kainer K.U., Schmid-Fetzer R. Measurement and Calculation of the Viscosity of Metals – A Review of the Current Status and Developing Trends // Meas. Sci. Technol. 2014. V. 25. 062001.
4. Шпильрайн Э.Э., Фомин В.А., Сквородько С.Н., Сокол Г.Ф. Исследование вязкости жидких металлов. М.: Наука, 1983. 243 с.
5. Nunes V.M.B., Lourenço M.J.V., Santos F.J.V., Nieto de Castro C.A. Measurements of the Viscosity of Molten Lithium Nitrate by the Oscillating-cup Method // Int. J. Thermophys. 2017. V. 38. 13.
6. Magnusson J., Memmott M., Munro T. Review of Thermophysical Property Methods Applied to Fueled and un-fueled Molten Salts // Ann. Nucl. Energy. 2020. V. 146. 107608.
7. Mazuruk K., Su C.-H., Lehoczy S.L. Novel Oscillating Cup Viscometer – Application to Molten HgTe and  $Hg_{0.8}Cd_{0.2}Te$  // J. Appl. Phys. 1995. V. 77. 5098.
8. Zheng H., Hu L., Zhao X., Wang C., Sun O., Wang T., Hui X., Yue Y., Bian X. Poor glass-forming ability of Fe-based alloys: Its origin in high-temperature melt dynamics // J. Non-Cryst. Solid. 2017. V. 471. P. 120.
9. Zhang F., Du Y., Liu S., Jie W. Modeling of the Viscosity in the Al–Cu–Mg–Si System: Database Construction // Calphad. 2015. V. 49. P. 79.
10. Jin Y., Cheng J., An X., Su T., Zhang P., Li Z. Accurate Viscosity Measurement of Nitrates/Nitrites Salts for Concentrated Solar Power // Solar Energy. 2016. V. 137. P. 385.
11. Mao Z., Zhang T. Numerical Analysis of an Improved Heating Device for the Electromagnetically Driven Oscillating Cup Viscometer // Adv. Mech. Eng. 2017. V. 9.
12. Song Z., Zhang L., Ban H. Theoretical Foundation of Electromagnetically-driven Oscillating Cup Viscometer // Meas. Sci. Technol. 2019. V. 30. 115903.
13. Kleiman R.N. Analysis of the Oscillating-cup Viscometer for the Measurement of Viscoelastic Properties // Phys. Rev. 1987. V. 35. P. 261.
14. Jeyakumar M., Hamed M., Shankar S. Rheology of Liquid Metals and Alloys // J. Non-Newt. Fluid Mech. 2011. V. 166. P. 831.
15. Malik M.M., Jeyakumar M., Hamed M.S., Walker M.J., Shankar S. Rotational Rheometry of Liquid Metal Systems: Measurement Geometry Selection and Flow Curve Analysis // J. Non-Newt. Fluid Mech. 2010. V. 165. P. 733.
16. Sun C., Geng H., Ji L., Wang Y., Wang G. Rheological Properties of Pb, Sb, Bi, and Sn Melts // J. Appl. Phys. 2007. V. 102. 034901.
17. Varsani V., Fan Z. Non-Newtonian Behaviour of Liquid Metals // TMS Annual Meeting & Exhibition. 2007. P. 67.
18. Ritwik R. Measuring the Viscous Flow Behaviour of Molten Metals under Shear. PhD Thesis, 2012. CAST, UK.
19. Elton E.S., Reeve T.C., Thornley L.E., Joshipura I.D., Paul P.H., Pascall A.J., Jeffries J.R. Dramatic Effect of Oxide on Measured Liquid Metal Rheology // J. Rheol. 2020 V. 64. 119.
20. Elyukhina I. Nonlinear Oscillating-cup Viscometry // Rheol. Acta. 2011. V. 50. P. 327.
21. Elyukhina I. Oscillating-cup Technique for Yield Stress and Density Measurement // J. Mater. Sci. 2013. V. 48. P. 4387.
22. Parthiban R., Stoica M., Kaban I., Kumar R., Eckert J. Viscosity and Fragility of the Supercooled Liquids and Melts from the Fe–Co–B–Si–Nb and Fe–Mo–P–C–B–Si Glass-forming Alloy Systems // Intermetallics. 2015. V. 66. P. 48.
23. DeFilippo A.C., Zurita-Gotor M., Durth M., Fereres S. Rheological Analysis of Nitrate Molten Salts with Suspended Particles for Solar Thermal Plants // J. Molec. Liquids. 2020. V. 306. 112903.
24. Kestin J., Newell G.F. Theory of Oscillation Type Viscometers: The Oscillating Cup. Part I // Z. Angew. Math. Phys. 1957. V. 8. P. 433.
25. Елюхина И.В. Наблюдение и измерение неньютоновских свойств высокотемпературных жидкостей крутильно-колебательным методом // ТВТ. 2006. Т. 44. № 3. С. 411.
26. Елюхина И.В. Течение жидкости Джонсона–Сигельмана в крутильно-колебательной системе // ЖФХ. 2006. Т. 80. № 5. С. 940.
27. Вяткин Г.П., Елюхина И.В. Возможности крутильно-колебательного метода для изучения упругих вязкопластичных свойств // ДАН. 2006. Т. 406. № 6. С. 753.
28. Elyukhina I., Vyatkin G. Software for Oscillating-cup Viscometry: Verification of Data Reasonableness and Parametric Identification of Rheological Model // J. Phys.: Conf. Ser. 2008. V. 98. 022011.
29. Елюхина И.В. Возможности метода вынужденных крутильных колебаний для исследования неньютоновских свойств жидкостей // Заводская лаборатория. 2006. № 5. С. 26.
30. Елюхина И.В., Вяткин Г.П. К оценке влияния вторичных течений на колебания крутильного вискозиметра // ДАН. 2006. Т. 410. № 1. С. 36.
31. Елюхина И.В. Основы теории крутильной вискозиметрии для вязкопластичных жидкостей // ТВТ. 2009. Т. 47. № 4. С. 562.