

УДК 533.9

КУЛОНОВСКИЙ ЛОГАРИФМ ПРИ РАСЧЕТЕ ПРОВОДИМОСТИ ПЛАЗМЫ: АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

© 2022 г. **А. Л. Хомкин***, А. С. Шумихин**

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

*E-mail: alhomkin@mail.ru

**E-mail: shum_ac@mail.ru

Поступила в редакцию 11.03.2022 г.

После доработки 06.06.2022 г.

Принята к публикации 07.06.2022 г.

Рассмотрены подходы и соотношения для расчета кулоновского логарифма, используемого при определении проводимости и других коэффициентов переноса плазмы. Проанализированы причины появления многочисленных выражений для кулоновского логарифма. Выполнено сравнение этих выражений с результатами аналитических и численных расчетов. Предложены рекомендации для вычисления кулоновского логарифма в достаточно широком диапазоне значений параметра неидеальности.

DOI: 10.31857/S004036442204010X

ВВЕДЕНИЕ

Кулоновский логарифм (КЛ) возникает при расчете проводимости и других переносных коэффициентов плазмы и обусловлен расходимостью транспортных сечений рассеяния зарядов друг на друге при больших прицельных параметрах и необходимостью вводить те или иные способы их обрезания. Высокая активность в расчетах и потребность в кинетических свойствах плазмы в 50-х годах прошлого века была обусловлена исследованиями в области управляемого термоядерного синтеза. Теоретические результаты работы отражены во многих фундаментальных монографиях, например в [1], где приведена исчерпывающая библиография. Во всех расчетах появлялась величина, получившая название “кулоновский логарифм”, — Λ . Качественно он определяется как логарифм отношения максимального к минимальному прицельному параметру. У Ландау [2] и Спитцера [3] это соответственно дебаевский радиус R_D и длина Ландау $l = q^2/T$, где q и T — заряд электрона и температура плазмы. Отношение этих величин определяет один из параметров неидеальности:

$$\Gamma_D = \frac{l}{R_D}.$$

В [2, 3] находим

$$\Lambda_{SL} = \ln \frac{R_D}{l} = \ln \frac{1}{\Gamma_D}. \quad (1)$$

Расчет проводимости плазмы — задача непростая, и, естественно, при нахождении оконча-

тельного ответа делались различные упрощающие предположения. Авторы [2, 3] подчеркивали, что Λ — величина приближенная, верная при условии $\Lambda \gg 1$. И, действительно, в термоядерных установках величина Λ менялась в интервале 5–10. Уточнение величины минимального и максимального прицельных параметров, приводящее к появлению константы a под знаком логарифма, считалось в условиях $\Lambda \gg 1$ превышением точности:

$$\Lambda = \ln \frac{a}{\Gamma_D} = \Lambda_{SL} + \ln a \sim \Lambda_{SL}.$$

В 1960-е годы дискуссия вокруг “кулоновского логарифма” вновь оживилась. Уже начиная с работ по оптическим свойствам горячего воздуха [4], которые велись под руководством Л.М. Бибермана, исследователи столкнулись с эффектами, обусловленными взаимодействием между излучающим атомом и частицами плазмы, так называемыми эффектами неидеальности. Эти эффекты приводили к уширению спектральных линий и влияли на процессы переноса излучения. Начало развиваться направление “Физика неидеальной плазмы”, т.е. плазмы с параметром $\Gamma_D \geq 1$. Мотивацией этих исследований были (см. [1]): общефизический интерес к экзотическим состояниям вещества, в частности, предсказанному плазменному фазовому переходу (ПФП); реализация ряда перспективных энергетических проектов [5], в которых неидеальная плазма служила рабочим телом, и т.д. более, что формальное использование выражения (1) в этих условиях вело к расходимости КЛ и бесконечным значениям проводимости.

В настоящем сообщении рассматриваются причины появления многочисленных выражений для кулоновского логарифма, проводится сравнение этих выражений с результатами аналитических и численных расчетов и предлагаются авторские рекомендации для расчета КЛ (“для пользователей”).

МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ГАЗА И ФОРМУЛА СПИТЦЕРА

С формальной точки зрения для расчета переносных коэффициентов при известном составе необходимо найти отклик функции распределения электронов по скоростям на внешнее возмущение, вызванное приложенным электрическим полем (проводимость), градиентом плотности (диффузия), градиентом температуры (теплопроводность) и т.д. Для этого нужно либо решить кинетическое уравнение Больцмана, либо воспользоваться соотношениями, следующими из теории линейного отклика. Оба этих пути трудоемки и требуют достаточно высокой квалификации, а также больших затрат времени. Получить прямое решение интегродифференциального уравнения Больцмана непросто, и таких работ немного (см., например, [6, 7]). Существуют, однако, модели, допускающие аналитические решения, на которых основаны практически все приближенные соотношения. К таковым в первую очередь относится модель лоренцевского газа (ЛГ): смеси небольшого количества легких частиц с тяжелыми [8]. Малым параметром, допускающим точное решение, является отношение масс.

Применительно к атомарной плазме это реальный случай слабой ионизации, когда в атомарном газе присутствует небольшая примесь легких частиц – электронов, и, следовательно, межэлектронными столкновениями можно пренебречь. Рассчитывается отклонение функции распределения электронов f в газе атомов от равновесной f_0 [8], вызванное внешним возмущением. В этом случае интеграл столкновений Df/Dt линеаризуется и для электронов с энергией E имеет вид

$$\frac{Df}{Dt} = -v_{ea}(E)(f - f_0). \quad (2)$$

В (2) $v_{ea}(E) = \sqrt{2E/mn_a}Q'_{ea}(E)$ – частота столкновений электрона с атомами, n_a – концентрация атомов, $Q'_{ea}(E)$ – транспортное сечение рассеяния электрона на атоме, m – масса электрона.

Проводимость плазмы рассчитывается по формуле

$$\sigma_L = \frac{4}{3\sqrt{\pi}mT^{5/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{E}{T}\right) E^{3/2} \frac{dE}{v_{ea}(E)}. \quad (3)$$

Заметим, что в лоренцевском приближении частота столкновений $v_{ea}(E)$ возникает при решении уравнения Больцмана.

Методически примыкает к лоренцевскому газу и полностью ионизованная плазма с одним важным отличием: легких частиц в ней n_e столько же, сколько тяжелых n_i . Межэлектронными столкновениями пренебречь нельзя, а роль их специфическая – они симметризируют функцию распределения электронов по скоростям, нарушенную внешним полем, тем самым уменьшают проводимость. Без учета межэлектронных столкновений проводимость полностью ионизованной плазмы определяется формулой Лоренца (3) с частотой столкновений электрона с ионами. Учет межэлектронных столкновений возможен путем решения уравнения Больцмана. Впервые для плазмы оно было решено Спитцером и Хэрмом [9], которые, упростив уравнение Больцмана, свели его к дифференциальному уравнению Фоккера–Планка. Иные решения, без упрощения уравнения Больцмана, можно найти, например, в [7, 10]. В результате в [9, 10] получена константа Спитцера–Хэрма $\gamma_S = 0.582$. Она показала, во сколько раз электрон–электронные удары уменьшают проводимость плазмы в лоренцевском приближении для ионов.

Транспортное сечение рассеяния электрона $Q_t^{ei}(v, b_{\max})$, налетающего со скоростью v на ион с зарядом q , расходуется при интегрировании дифференциального сечения по прицельному параметру. Для исключения расходимости вводится максимальный прицельный параметр b_{\max} :

$$Q_t^{ei}(v, b_{\max}) = 4\pi b_0^2 \ln \left[1 + \left(\frac{b_{\max}}{b_0} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4)$$

В (4) $b_0 = q^2/(mv^2)$. В ранних работах для исключения логарифмической зависимости сечения от скорости электрона (4) дополнительно вводилась величина минимального прицельного параметра b_{\min} [2, 3]. В результате этих упрощений возникают логарифмические члены

$$\begin{aligned} \ln \left[1 + \left(\frac{b_{\max}}{b_0} \right)^2 \right]^{1/2} &\rightarrow \ln \left[1 + \left(\frac{R_D}{\beta e^2} \right)^2 \right]^{1/2} \rightarrow \\ &\rightarrow \ln \left[1 + \left(\frac{1}{\Gamma} \right)^2 \right]^{1/2} \rightarrow \ln \left(\frac{1}{\Gamma} \right). \end{aligned}$$

Пример решения уравнения Больцмана для полностью ионизованной плазмы без упрощения b_0 можно найти в [6, 7]. В [7] уравнение Больцмана решено для muffin-tin потенциала, который соответствует приближению ближайшего соседа:

$$V_{MT}(R) = \begin{cases} \frac{q^2}{R}, & R < R_i, \\ \frac{q^2}{R_i}, & R > R_i, \end{cases}$$

где R_i – радиус ионной ячейки Вигнера–Зейтца

$$R_i = \left(\frac{3}{4\pi n_i} \right)^{1/3}. \quad (5)$$

Из упомянутых выше работ следует, что “вывести” выражение для кулоновского логарифма невозможно. Он является расчетной величиной, тем более с учетом электрон-электронных соударений. Единственным результатом решения уравнения Больцмана для полностью ионизованной плазмы является величина проводимости. Для анализа решения удобно выделить, хотя и необязательно, множитель Спитцера и “кулоновский логарифм”. Такая процедура проделана в [6, 7].

В (4) под знаком логарифма стоит величина b_0 . Спитцер и Ландау вместо b_0 , зависящей от скорости, использовали величину $b_{\min} = e^2/T = \beta e^2$, полученную из соотношения

$$q^2/R = T, \quad b_{\min} = \beta q^2.$$

Возможна и иная, также весьма популярная, процедура выбора величины b_{\min} :

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}T, \quad b_{\min} = \beta q^2/3.$$

В качестве максимального прицельного параметра, как правило, используется дебаевский радиус

$$R_D = 1/\sqrt{4\pi\beta q^2(n_e + n_i)},$$

но возможен и выбор радиуса ионной ячейки Вигнера–Зейтца R_i (5). Возникают параметры неидеальности

$$\Gamma = \beta q^2/R_D, \quad \Gamma_i = \beta q^2/R_i.$$

В результате приходим к целому набору кулоновских логарифмов, встречающихся в литературе:

$$\Lambda = \ln\left(\frac{1}{\Gamma}\right), \ln\left(\frac{3}{\Gamma}\right), \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{\Gamma}\right). \quad (6)$$

Последнее выражение для кулоновского логарифма возникает, если при расчете b_{\max} учесть вклад в экранировку только электронной компоненты [2] $R_{De} = R_D\sqrt{2}$. Надо также иметь в виду, что в дополнение к набору (6) предложено столько же вариантов с Γ_i , а также целый набор КЛ, исключающих нефизическую расходимость кулоновского логарифма при $\Gamma = 1, 3, 3\sqrt{2}$:

$$\Lambda = \ln\left(1 + \frac{1}{\Gamma}\right), \ln\left(1 + \frac{3}{\Gamma}\right), \ln\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{\Gamma}\right).$$

Впервые эта процедура предложена в [11]. Упомянем рекомендованный в обзоре Воробьева и Ликальтера [12] вариант кулоновского логарифма

$$\Lambda = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{\Gamma}\right)^2\right).$$

В итоге в литературе можно насчитать десятки выражений Λ . Расчет проводимости для muffin-tin потенциала [7] может служить для оценок проводимости в плазме, где $R_D < R_i$. Далее сравним

некоторые характерные выражения для Λ с результатами аналитических расчетов и численного моделирования. Вводя частоту столкновений

$$v_{ei}(E, \Gamma) = \sqrt{\frac{2E}{m}} n_i 4\pi \left(\frac{q^2}{2E}\right)^2 \Lambda \quad (7)$$

и учитывая полученный в [9, 10] множитель γ_S , можно представить спитцеровское выражение для проводимости в виде

$$\sigma_S = \gamma_S \frac{4}{3\sqrt{\pi} m T^{5/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{E}{T}\right) E^{3/2} \frac{dE}{v_{ei}(E, \Gamma)}. \quad (8)$$

Конечно, это не “вывод” формулы, а иллюстрация, поскольку множитель γ_S получался в [9, 10] в виде отношения полного решения к лоренцевскому. Необходимо акцентировать на этом моменте внимание, поскольку в некоторых работах уточнение формулы Спитцера начинается с выражения (8), что не совсем верно.

Подчеркнем, что в (7) допускается использование любых из вышеупомянутых выражений для кулоновского логарифма. Главное, чтобы они соответствовали аналитическим решениям [2, 7, 9, 10] и эксперименту.

Приведем удобные для расчета и обработки экспериментальных данных и результатов численного моделирования формулы для проводимости полностью ионизованной плазмы, преобразовав выражение (8):

$$\begin{aligned} \sigma_S &= \gamma_S \frac{n_e}{n_i} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{6}{\sqrt{2\pi}} \frac{T^{3/2}}{\sqrt{mq^2\Lambda}} = \\ &= 1.016 \gamma_S \frac{n_e}{n_i} \frac{T^{3/2}}{\sqrt{mq^2\Lambda}} = 0.591 \frac{T^{3/2}}{\sqrt{mq^2\Lambda}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Особенно удобна и часто используется формула (9) без кулоновского логарифма:

$$\sigma_0 = 0.591 \frac{T^{3/2}}{\sqrt{mq^2}}.$$

Разделив найденную экспериментально или рассчитанную численно проводимость σ_{exp} на σ_0 , получим обратный кулоновский логарифм $\Lambda_{\text{exp}}(\Gamma)$:

$$\frac{\sigma_{\text{exp}}}{\sigma_0} = \frac{1}{\Lambda_{\text{exp}}(\Gamma)}.$$

КУЛОНОВСКИЙ ЛОГАРИФМ, ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

Ранние эксперименты, посвященные измерению проводимости неидеальной плазмы [13, 14], были нацелены на исследование влияния эффектов неидеальности на проводимость полностью ионизованной плазмы, для расчета которой необходим кулоновский логарифм. Да и традиционно на первом месте были эффекты неидеальности, связанные с взаимодействием между зарядами [1]. Однако получить полностью иони-

зованную плазму с развитой кулоновской неидеальностью непросто. Как правило, измерялась проводимость плазмы частично ионизованной.

В ранних работах для извлечения проводимости “полностью ионизованной” плазмы использовалась эмпирическая, слабо обоснованная “аддитивная” формула (см. в [15]). Предполагалось, что сопротивление плазмы ρ_{ad} складывается из сопротивлений атомарной и ионной компонент:

$$\rho_{ad} = \rho_a + \rho_i. \quad (10)$$

С помощью (10) из измеренной проводимости частично ионизованной плазмы σ_{exp} “извлекалась” проводимость “заряженной” компоненты:

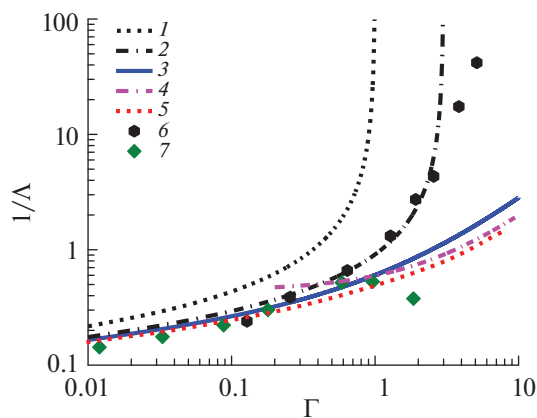
$$\sigma_i = 1 / \left(\frac{1}{\sigma_{exp}} - \frac{1}{\sigma_a} \right).$$

Для расчета σ_a использовалась формула Лоренца (3) или иные соотношения [15]. Точность аддитивной формулы исследована в [15]. Она оказалась весьма небольшой, погрешность достигала 50%. Возможно, этим обстоятельством обусловлен довольно большой разброс значений проводимости “заряженной” плазменной компоненты и кулоновского логарифма (см., например, [13]), полученных экспериментально, да и методика расчета σ_a была различной. В настоящей работе результаты обработки ранних экспериментов использовать не будем, а рассмотрим их совместно с данными, опубликованными относительно недавно [16, 17], более обстоятельно в отдельной публикации.

Обратимся к недавним работам, где выполнено численное моделирование свойств неидеальной плазмы методом молекулярной динамики и проведен прямой расчет проводимости с использованием соотношений теории линейного отклика (формулы Кубо–Гринвуда) для ряда моделей полностью ионизованной плазмы с развитой кулоновской неидеальностью. В работе Морозова и Нормана [18] выполнен комплекс исследований динамических свойств модели неидеальной полностью ионизованной плазмы и получены значения проводимости как в статике, так и в переменном поле. Использовался классический метод молекулярной динамики, что требовало исключения конфигураций тесного сближения зарядов одного знака. Использовалась предложенная ранее [19] “модель с полочкой”, в которой кулоновский потенциал на малых расстояниях ($R < a$) заменялся константой. Очевидно, что, когда радиус ионной ячейки Вигнера–Зейтца R_i уменьшался до величины a , результаты расчета становились модельными. Условие $R_i > a$ ограничивает область применимости результатов [18] со стороны больших плотностей. В работах Боброва, Зеленева с соавторами [20, 21] моделировалась ультрахолодная плазма на этапе релаксации. Благодаря законам подобия удалось получить результа-

ты и для проводимости полностью ионизованной неидеальной плазмы. Данные этих работ подробно обсуждаются в [22]. Следует отметить, что и результаты [20, 21] также имеют границы применимости. В [20, 21], как и в [18], использовался классический метод молекулярной динамики, причем с чисто кулоновским потенциалом в отличие от [18], хотя, как известно [1], классическая система кулоновских частиц не имеет равновесного состояния. В реальной плазме при релаксации зарядов (иногда достаточно длительной) возникают атомы и молекулы, которые затем могут перейти в жидкое и твердое состояние, тем более, при ультрахолодных температурах. Фактическим ограничением модели [21] следует считать время счета, а каково его предельное значение, неизвестно, и авторы [21] его не оценивают. Тем не менее результаты численного моделирования [18, 21] позволяют при определенных ограничениях получить кинетические коэффициенты плазмы. Также учитываются результаты работ [7, 10], где было решено уравнение Больцмана для muffin-tin потенциала и для экранированного кулоновского потенциала без использования традиционного набора упрощающих предположений. Полученная величина проводимости полностью ионизованной плазмы весьма полезна в условиях, когда $R_D \leq R_i$. На основе выполненных сравнений некоторых популярных выражений для кулоновского логарифма, результатов теоретических и численных расчетов, предложим простой и достаточно апробированный способ расчета кулоновского логарифма.

На рисунке приводится сравнение кулоновских логарифмов, извлеченных из данных чис-



Обратный “кулоновский логарифм” в зависимости от параметра неидеальности; теория: 1 – $\ln\left(\frac{1}{\Gamma}\right)$, 2 – $\ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{\Gamma}\right)$, 3 – $\ln\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{\Gamma}\right)$, 4 – решение уравнения Больцмана для muffin-tin потенциала [7], 5 – [10], для экранированного потенциала; результаты численного моделирования: 6 – [18], 7 – [21].

ленных экспериментов [18, 21], результаты решения уравнения Больцмана [7, 10] и некоторые аналитические выражения. Вариант расчета по формуле $\ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{\Gamma}\right)$ явно предпочтительнее варианта $\ln\left(\frac{1}{\Gamma}\right)$, хотя в термоядерной области ($\Gamma \ll 1$) все они с логарифмической точностью совпадают. Возвращение единицы под знак логарифма сразу улучшает экстраполяционные свойства кулоновского логарифма.

Рекомендуемый вариант (кривая 3) для расчета кулоновского логарифма при $\Gamma \leq 1$ совпадает с большинством результатов, а при $\Gamma > 1$ проходит между результатами численного моделирования и вблизи результатов решения уравнения Больцмана [7, 10]. Учитывая, что результаты численного моделирования [18, 21] при $\Gamma > 1$ имеют противоположные тенденции изменения, предлагаемый вариант расчета кулоновского логарифма (кривая 3) можно считать достаточно обоснованным, во всяком случае при $\Gamma \leq 3$, что вполне достаточно в варианте “для пользователей”:

$$\Lambda = \ln\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{\Gamma}\right).$$

Следует признать, что, хотя работы [18, 20, 21] не выявили существенных эффектов неидеальности, они позволили сделать выбор между многочисленными рекомендациями, предложенными в литературе для расчета кулоновского логарифма (см. [1]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены подходы и соотношения для расчета кулоновского логарифма при вычислениях проводимости и других коэффициентов переноса. Установлено, что процедура “возврата единицы” ликвидирует нефизическую расходимость кулоновского логарифма и заметно улучшает его экстраполяционные свойства. На основе сравнения с результатами численного моделирования и решения уравнения Больцмана рекомендован “широкодиапазонный” ($\Gamma \leq 3$) вариант расчета кулоновского логарифма.

Данная работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 075-01056-22-00).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фортон В.Е., Храпак А.Г., Якубов И.Т. Физика неидеальной плазмы. М.: Физматлит, 2010.
2. Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 203.
3. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа / Под ред. Левина М.Л. М.: Мир, 1965.

4. Авилова И.В., Биберман Л.М., Воробьев В.С. и др. Оптические свойства горячего воздуха / Под ред. Бибермана Л.М. М.: Наука, 1970. 320 с.
5. Грязнов В.К., Иосилевский И.Л., Красников Ю.Г., Кузнецова Н.И., Кучеренко В.И., Лаппо Г.Б., Ломакин Б.Н., Павлов Г.А., Сон Э.Е., Фортон В.Е. Теплофизические свойства рабочих сред газозафазного ядерного реактора. М.: Атомиздат, 1980.
6. Кинетические процессы в газах и плазме / Под ред. Хошштима А.М.: Атомиздат, 1971.
7. Муленко И.А., Хомкин А.Л. Решение уравнения Больцмана для полностью ионизованной плазмы с короткодействующим потенциалом взаимодействия между зарядами // ТВТ. 1991. Т. 29. № 6. С. 1234.
8. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
9. Spitzer L., Harm R. Transport Phenomena in a Completely Ionized Gas // Phys. Rev. 1953. V. 89. P. 977.
10. Заика Е.В., Муленко И.А., Хомкин А.Л. Электропроводность полностью ионизованной неидеальной плазмы с экранированным взаимодействием между зарядами // ТВТ. 2000. Т. 38. № 1. С. 5.
11. Темко С.В. О выводе уравнения Фоккера–Планка для плазмы // ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 1021.
12. Воробьев В.С., Ликальтер А.А. Физические свойства сильно взаимодействующей плазмы // Химия плазмы. 1989. Т. 15. С. 163.
13. Иванов Ю.В., Минцев В.Б., Фортон В.Е., Дремин А.Н. Электропроводность неидеальной плазмы // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 216.
14. Минцев В.Б., Фортон В.Е., Грязнов В.К. Электропроводность высокотемпературной неидеальной плазмы // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. С. 116.
15. Асиновский Э.И., Батенин В.М. К расчету электропроводности частично ионизованной плазмы // ТВТ. 1968. Т. 6. № 6. С. 966.
16. Шилкин Н.С., Дудин С.В., Грязнов В.К., Минцев В.Б., Фортон В.Е. Измерение электронной концентрации и проводимости частично ионизованной плазмы инертных газов // ЖЭТФ. 2003. Т. 124. С. 1030.
17. Adams J.R., Shilkin N.S., Forton V.E., Gryaznov V.K., Mintsev V.B., Redmer R., Reinholz H., Röpke G. Coulomb Contribution to the Direct Current Electrical Conductivity of Dense Partially Ionized Plasmas // Phys. Plasmas. 2007. V. 14. P. 062303.
18. Норман Г.Э., Морозов И.В. Столкновения и плазменные волны в неидеальной плазме // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. С. 412.
19. Зеленер Б.В., Норман Г.Э., Филинов В.С. К статистической теории неидеальной плазмы // ТВТ. 1972. Т. 10. № 6. С. 1160.
20. Zelener B.V., Zelener B.V., Manykin E.A., Bronin S.Y., Bobrov A.A. Self-diffusion and Conductivity in an Ultracold Strongly Coupled Plasma. Calculation by the Method of Molecular Dynamics // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 946. P. 012126.
21. Bobrov A.A., Bunkov A.M., Bronin S.Y., Klyarfeld A.B., Zelener B.V., Zelener B.V. Conductivity and Diffusion Coefficients in Fully Ionized Strongly Coupled Plasma: Method of Molecular Dynamics // Phys. Plasmas. 2019. V. 26. P. 082102.
22. Хомкин А.Л., Шумихин А.С. Проводимость неидеальной полностью ионизованной плазмы: сравнение результатов расчета методом молекулярной динамики и модельного подхода // ТВТ. 2019. Т. 57. № 4. С. 501.