

УДК 534.222.2

ВИХРЕОБРАЗОВАНИЕ В ПРИФРОНТОВОЙ ЗОНЕ ЗА УДАРНОЙ ВОЛНОЙ СИЛЬНОГО ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА В НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

© 2022 г. В. А. Андрущенко^{1, *}, В. А. Головешкин^{2, 3, **}, И. В. Мурашкин^{1, ***}, Н. Н. Холин^{2, ****}

¹Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия

²Российский технологический университет МИРЭА, Москва, Россия

³Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

*E-mail: andrusvictor@ya.ru

**E-mail: vag-1953@ya.ru

***E-mail: murashkin@inbox.ru

****E-mail: mostu@bk.ru

Поступило в редакцию 09.04.2022 г.

После доработки 27.05.2022 г.

Принято к публикации 07.06.2022 г.

При аналитическом исследовании задачи о сильном точечном взрыве в неоднородной атмосфере доказано, что уже на ранней стадии развития этого процесса в достаточно узком сферическом слое газа, прилегающем изнутри к фронту ударной волны, формируются сложные тороидальные вихревые образования, обнаруженные ранее в ходе численного эксперимента. Причем, как было выявлено, источником этого вихрегенеза стали не схемная вязкость и псевдовязкость, а малые возмущения фронта ударной волны, инициированные слабым (по масштабам размера области взрыва) на начальном этапе проявлением неоднородности атмосферы.

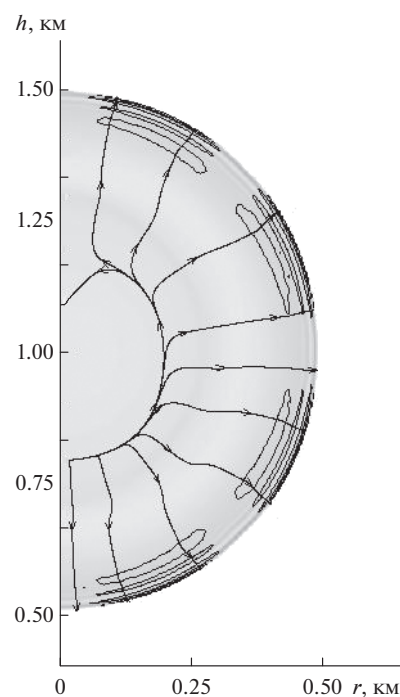
DOI: 10.31857/S0040364422040123

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется эволюция объема газа, охваченного фронтом ударной волны (УВ), при сильном точечном взрыве в рамках модели экспоненциальной атмосферы для ранних моментов времени (после инициирования УВ). Задачи теории взрыва в настоящее время в связи с реальностью проблемы астероидно-кометной опасности, подтвержденной недавними падениями и взрывами фрагментов Челябинского метеороида (см., например, [1]), вновь выдвинулись в ряд задач первоочередной значимости. В ходе численного эксперимента [2] выявлено, что вихревые тороидальные структуры в сферическом слое, прилегающем к фронту УВ, в задаче о сильном точечном взрыве образуются уже на начальной стадии при учете неоднородности атмосферы. Это означает, что для момента времени, близкого к началу взрыва, малые возмущения (незначительное проявление стратификации атмосферы по высоте), возникающие только на фронте УВ, оказывают заметное влияние на решение исходной системы уравнений в некоторой части газа внутри области взрыва.

Отмеченный факт установлен в ходе решения задачи о сильном взрыве мощностью 15 кт в тротиловом эквиваленте на высоте 1 км в рамках модели экспоненциальной атмосферы в отсутствие гравитации и противодавления при показателе адиабаты ($\gamma = 1.4$) на основе численной методики, разработанной в [3].

На рисунке представлены линии равной завихренности $\pm |\text{rot } \mathbf{u}|$ в вертикальной половине плоско-



Линии равной завихренности.

сти сечения области взрыва для момента времени $t = 0.6$ с (группы замкнутых контуров) и линии тока (кривые со стрелками). Видно, что уже на начальном этапе эволюции взрыва в круговом слое, прилегающем к фронту УВ, возникли восемь областей завихренности эллиптической формы, в которых направления движения чередуются. В верхнем правом сечении движение происходит по направлению движения часовой стрелки, в левом – против него; в следующих сечениях – все наоборот и т.д.

Для исследования влияния схемной вязкости и псевдовязкости на картину формирования вихрей менялся шаг расчетной сетки по пространству, что не повлияло на вихревую картину. Однако в зоне, прилегающей к фронту УВ, псевдовязкость и схемная вязкость могут не только качественно влиять на картину формирования вихрей, но и служить причиной их возникновения. Поэтому необходимо аналитически доказать, что в данной зоне вихри образуются именно за счет неоднородности атмосферы уже на ранней стадии взрыва.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Поскольку для малых времен, отсчитываемых с образования УВ, решение задачи еще незначительно отличается от точного решения Л.И. Седова в однородной атмосфере [4], можно провести аналитический анализ течения во внутренней области взрыва методом возмущений с целью подтверждения факта возникновения вихревых образований вблизи фронта УВ. Рассматривается та же задача в предположении осевой симметрии:

$$\rho = \rho_0 \exp(-z/H),$$

где ρ_0 – плотность на высоте взрыва, H – параметр неоднородности атмосферы.

Исходная система уравнений в сферических координатах (R, φ, θ) для функций ρ, P, u_R, u_θ – плотности, давления, радиальной и азимутальной компонент скорости в предположении, что искомые функции не зависят от φ , приведена в [2]. После ввода безразмерной координаты λ по формуле

$$R = \lambda s_0(t) \tag{1}$$

и неизвестных функций $\bar{\rho}, \bar{P}, \bar{u}_R, \bar{u}_\theta, \bar{c}$:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0 \bar{\rho}, & P &= \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 \left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 \bar{P}, \\ u_R &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{ds_0}{dt} \bar{u}_R, & u_\theta &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{ds_0}{dt} \bar{u}_\theta, \end{aligned} \tag{2}$$

$$S(\theta, t) = s_0(t)F(\theta, t),$$

$$c = \frac{ds_0}{dt} \bar{c}, \quad s_0 = (E/\rho_0)^{1/5} t^{2/5},$$

где c – скорость УВ, E – константа, имеющая размерность энергии, выбирается из условия, чтобы при

$t \rightarrow 0$ уравнение фронта имело вид $F(\theta, t) = 1$. Система уравнений движения с начальными и граничными условиями имеет вид (далее черта опущена)

$$\begin{aligned} &\frac{5(\gamma+1)}{4} t \frac{\partial}{\partial t} (\ln \rho) + \left(u_R - \frac{\gamma+1}{2} \lambda\right) \frac{\partial}{\partial \lambda} (\ln \rho) + \\ &+ \frac{u_\theta}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln \rho) + \frac{\partial u_R}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{2u_R}{\lambda} - \frac{u_\theta}{\lambda} \operatorname{tg} \theta = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{5(\gamma+1)}{4} t \frac{\partial u_R}{\partial t} + \left(u_R - \frac{\gamma+1}{2} \lambda\right) \frac{\partial u_R}{\partial \lambda} + \\ &+ \frac{u_\theta}{\lambda} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - \frac{u^2 \theta}{\lambda} - \frac{3}{4} (\gamma+1) u_R = \\ &= -\frac{(\gamma-1)}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \lambda} - \alpha \frac{g}{A16} \frac{25}{16} (\gamma+1)^2 t^{8/5} \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{5(\gamma+1)}{4} t \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \left(u_R - \frac{\gamma+1}{2} \lambda\right) \frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda} + \\ &+ \frac{u_\theta}{\lambda} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_R u_\theta}{\lambda} - \frac{3}{4} (\gamma+1) u_\theta = \\ &= -\frac{(\gamma-1)}{2} \frac{1}{\lambda \rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \alpha \frac{g}{A16} \frac{25}{16} (\gamma+1)^2 t^{8/5} \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{5(\gamma+1)}{4} t \ln \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) + \left(u_R - \frac{\gamma+1}{2} \lambda\right) \frac{\partial}{\partial \lambda} \times \\ &\times \ln \left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) + \frac{u_\theta}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) - \frac{3}{2} (\gamma+1) = 0. \end{aligned}$$

Уравнение фронта волны представляется в виде

$$\lambda = F(\theta, t).$$

Уравнение движения фронта:

$$\frac{5}{2} t \frac{\partial F}{\partial t} + F = c \sqrt{1 + \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2}.$$

Условия на фронте следующие:

$$\begin{aligned} u_R \sqrt{1 + \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2} &= c \left[1 - \beta \gamma \frac{25}{4A^2} t^{6/5} \frac{P_0}{\rho_0 c^2}\right], \\ u_\theta \sqrt{1 + \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2} &= \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial \theta} c \left[1 - \beta \gamma \frac{25}{4A^2} t^{6/5} \frac{P_0}{\rho_0 c^2}\right], \\ P &= c^2 \left[1 - \beta \gamma \frac{25}{4A^2} t^{6/5} \frac{P_0}{\rho_0 c^2}\right] \exp\left(-\mu \frac{At^{2/5} F \sin \theta}{H}\right), \\ \rho &= \left[1 - \beta \gamma \frac{25}{4A^2} t^{6/5} \frac{P_0}{\rho_0 c^2}\right]^{-1} \exp\left(-\mu \frac{At^{2/5} F \sin \theta}{H}\right), \end{aligned}$$

где $A = (E/\rho_0)^{1/5}$; ρ_0, P_0 – плотность и давление в невозмущенной атмосфере на высоте взрыва; $\alpha = 0, \beta = 0, \mu = 1$ – параметры, отвечающие за влияние трех различных факторов: ускорения

свободного падения, противодействия и неоднородности атмосферы соответственно.

Неизвестные функции представляются в виде

$$u_R = \lambda u, \quad u_\theta = \lambda v, \quad \rho = G/\lambda^2$$

с последующей заменой переменной

$$\lambda = \exp(-\varepsilon s), \quad \varepsilon = \gamma - 1,$$

где u, v, G – новые неизвестные функции.

Следует отметить, что параметр α входит в уравнения системы с множителем $t^{8/5}$, β – с множителем $t^{6/5}$, μ – с множителем $t^{2/5}$. Поэтому при малых значениях времени влиянием первых двух параметров можно пренебречь. При малых значениях времени величина $\mu' = \mu t^{2/5}$ будет малой, следовательно, можно разложить решение по этому параметру, считая $\mu = 1$.

Искомые функции представляются в виде $G = N + \mu' \Delta G$, $P = K + \mu' \Delta P$ и т.д., где $G = N(s)$, $P = K(s)$, $u = T(s)$ – решение соответствующей системы при $t \rightarrow 0$. Далее разложим решение по параметру μ' с учетом приращения искомых функций в виде

$$\begin{aligned} \Delta P &= \Delta P(s) K(s) t^{2/5} \sin \theta, \\ \Delta G &= \Delta G(s) N(s) t^{2/5} \sin \theta, \\ \Delta u &= \varepsilon \Delta u(s) L(s) t^{2/5} \sin \theta, \\ \Delta v &= \varepsilon \Delta v(s) L(s) t^{2/5} \cos \theta, \\ \Delta F &= \varepsilon \Delta \tilde{F} t^{2/5} \sin \theta, \quad \Delta c = \varepsilon \Delta \tilde{c} t^{2/5} \sin \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Delta \tilde{F}$ и $\Delta \tilde{c}$ – константы, а $L(s)$ определяется соотношением $T = 1 - \frac{\varepsilon}{2}(L - 1)$.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ функции L, N, K стремятся к следующим значениям [2]:

$$\begin{aligned} L &= 2 - \omega, \quad K = \frac{1}{2 - \omega}, \\ N &= \frac{\omega}{(2 - \omega)^2}, \quad \omega = \exp(-3s). \end{aligned} \quad (4)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$, используя явные выражения для функций (4), систему можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{(2 - \omega)}{2} \frac{d\Delta G}{ds} + \Delta G - (2 - \omega) \frac{d\Delta u}{ds} + 6\Delta u &= 0, \\ \frac{-3\omega}{(2 - \omega)} \Delta G + \frac{-3\omega}{(2 - \omega)} \Delta P - \frac{d\Delta P}{ds} &= 0, \\ (2 - \omega) \frac{d\Delta v}{ds} + (1 + 3\omega) \Delta \delta v + \Delta P/\omega &= 0, \\ \frac{(2 - \omega)}{2} \left(\frac{d\Delta P}{ds} - \frac{d\Delta G}{ds} \right) + \Delta P - \Delta G - 6\Delta u &= 0. \end{aligned}$$

Условия (3) для этой системы при $s = 0$ принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\frac{1}{2} \Delta F, \quad \Delta v = \Delta F, \\ \Delta P &= -3\Delta F - \frac{A}{H}, \quad \Delta G = -9\Delta F - \frac{A}{H}. \end{aligned}$$

Решение системы выпишем только для приращений компонент скорости:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{3 - \omega^{-1}}{6(2\omega^{-1} - 1)} \left[-\frac{5}{2} \frac{A}{H} \omega^{-1} + \frac{15}{4} \frac{A}{H} s - \right. \\ &\quad \left. - \frac{9}{4} \frac{A}{H} \int_0^s \frac{dt}{(2\sigma - 1)^{1/3}} + \frac{3}{2} \frac{A}{H} - 3\Delta F \right] + \\ &\quad + \frac{5}{8} \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1) + \frac{5}{8} \frac{A}{H} \frac{1}{(2\omega^{-1} - 1)^{1/3}} - \\ &\quad - \frac{5}{6} \frac{A}{H} (2\omega^{-1} - 1), \quad \Delta v = \frac{1}{(2\omega^{-1} - 1)^{1/6} (2 - \omega)} \times \\ &\quad \times \left[\Delta F - \int_0^s \frac{(2\sigma - 1)}{(2\sigma - 1)^{5/6}} \sigma^2 \Delta P(t) dt \right], \end{aligned}$$

где $\sigma = \exp(3t)$.

При наличии осевой симметрии в сферической системе координат ротор поля скоростей вычисляется так

$$\text{rot } \mathbf{u} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta}{R}.$$

С учетом замен (1), (3) и $s_0 = At^{2/5}$ имеем

$$\text{rot } \mathbf{u} = \frac{4}{5} \frac{1}{\gamma + 1} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} - \lambda \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \lambda} - 2\bar{u}_\theta \right).$$

Так как $\lambda = \exp(-\varepsilon s)$, то

$$\text{rot } \mathbf{u} = \frac{4}{5} \frac{1}{\gamma + 1} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial s} - 2\bar{u}_\theta \right).$$

Для сферически симметричной составляющей скорости ротор равен нулю, поэтому

$$\text{rot } \mathbf{u} = \frac{4}{5} \frac{1}{\gamma + 1} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial \theta} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Delta v}{\partial s} - 2\Delta v \right).$$

В силу представления (3) ротор поля скоростей $\text{rot } \mathbf{u}$ может быть представлен в виде

$$\text{rot } \mathbf{u} = \frac{4}{5} \frac{1}{\gamma + 1} \frac{1}{t^{3/5}} \cos \theta M,$$

где $M = \varepsilon L (\Delta u - 2\Delta v) + \frac{d(L\Delta v)}{ds}$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $M = \frac{d(L\Delta v)}{ds}$. Следовательно, значение ротора вектора скорости за фронтом УВ отлично от нуля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численным моделированием установлен факт формирования вихревых структур во внутреннем сферическом слое газа, прилегающем к фронту УВ, для малых времен [2]. Аналитически доказано, что уже на начальной стадии сильного точечного взрыва неоднородность атмосферы приводит к возникновению вихревых структур в сферическом слое газа у фронта УВ, и тем самым подтверждены результаты проведенного численного эксперимента.

Работа В.А. Андрущенко, И.В. Мурашкина выполнена в рамках госзадания Института автоматизации проектирования РАН, работа В.А. Головешкина выполнена в рамках госзадания Института прикладной механики РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сызранова Н.Г., Андрущенко В.А.* Моделирование движения и разрушения болидов в атмосфере Земли // ТВТ. 2016. Т. 54. № 3. С. 328.
2. *Андрущенко В.А., Ступицкий Е.Л., Моисеева Д.С., Моторин А.А., Мурашкин И.В.* Исследования и математическое моделирование явлений, связанных с развитием и воздействием взрывов. М.: Изд-во РАН, 2020. 192 с.
3. *Шевелев Ю.Д., Андрущенко В.А., Мурашкин И.В.* Численное решение задач теории точечного взрыва в переменных Лагранжа. Некоторые новые результаты // Матем. моделир. 2011. Т. 23. № 9. С. 135.
4. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.