

УДК 536.2.001.24

## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

© 2022 г. Э. М. Карташов\*

*МИРЭА – Российский технологический университет  
(Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова), Москва, Россия**\*E-mail: kartashov@mitht.ru*

Поступила в редакцию 09.08.2021 г.

После доработки 05.09.2021 г.

Принята к публикации 28.09.2021 г.

Развита математическая теория построения интегральных соотношений нового вида в аналитических решениях краевых задач для уравнений параболического типа в областях с границами, перемещающимися во времени (нецилиндрические области). Для равномерного закона перемещения границы предложена модификация метода обобщенных тепловых потенциалов простого и двойного слоя, что приводит к функциональным соотношениям нового (простейшего) вида по сравнению с результатами, известными ранее, основанными на переходе и дальнейшем решении интегральных уравнений Вольтерра при нахождении неизвестной плотности потенциалов. Развитый метод основан на предварительном нахождении операционной (по Лапласу) форме плотности потенциала, что значительно сокращает громоздкости и вычислительные трудности, имеющие место при традиционном применении тепловых потенциалов для решений уравнений параболического типа в нецилиндрических областях. Рассмотрены многочисленные случаи для ограниченной и частично ограниченной областей, представляющие практический интерес для многих приложений. Развита теория метода функций Грина для нецилиндрических областей. Предложены интегральные соотношения для записи аналитических решений краевых задач для уравнений параболического типа через краевые функции в исходной постановке задачи и соответствующих функций Грина. Изучен случай корневой зависимости движущейся границы. Выявлен ряд специфических особенностей модельных представлений нестационарного теплопереноса в областях с движущимися границами.

DOI: 10.31857/S004036442204007X

### ВВЕДЕНИЕ

Изучение тепловой реакции областей, границы которых перемещаются во времени, относятся к числу труднейших разделов аналитической теории теплопроводности твердых тел [1]. Для уравнения параболического типа такого рода краевые задачи являются предметом практически необозримого числа исследований. С годами их поток не уменьшается, охватывая все новые содержательные математические объекты и все большее число самых разнообразных приложений. Подобные задачи возникают в проблемах атомной энергетики и безопасности атомных реакторов; при изучении процесса горения в твердотопливных ракетных двигателях; при использовании электрических разрядов, в явлениях электрического взрыва проводников и других процессах, характеризующихся высокой температурой (плавящиеся электрические контакты, воздействие электрической дуги в контактах, эрозия электрических контактов); в ряде проблем экологии и медицины; при лазерном воздействии на твердые тела; при фазовых превращениях (задача Стефана и задача Веригина (в гидромеханике) с более сложными

граничными условиями, а также более общая краевая задача для уравнения параболического типа со свободной границей), в том числе при замораживании грунта и твердении бетона, при промерзании растворов и пористых тел; в процессах сублимации при замораживании, плавлении; в кинетической теории роста кристаллов; в ряде проблем термомеханики (при тепловом ударе, термическом разложении, тепловой защите космических аппаратов); в теории оптимизации и вычислительном эксперименте; в плазмодинамике и при плазменном покрытии; в ряде вопросов гидромеханики, фильтрации, абляции, прочности твердых тел, электродинамики, упругости и т.д. (ссылки в [1]).

С точки зрения математической физики краевые задачи для уравнения параболического типа в области с движущейся границей принципиально отличны от классических (для областей цилиндрического вида). Вследствие зависимости границы области от времени к этому классу задач в общем случае неприменимы методы разделения переменных и интегральных преобразований Фурье–Ханкеля–Лапласа [2], поскольку, оставаясь

в рамках классических методов математической физики, не удается согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы области теплопереноса. Развитие этой проблемы шло, по-видимому, следующим образом. С одной стороны, точные решения задач подобного типа удалось получить при помощи удачных догадок, искусственных приемов, причем для весьма ограниченного числа случаев движения границы (в начале линейного движения в области  $x > l + vt$ ,  $t > 0$ , затем параболического –  $x > \beta\sqrt{t}$ ,  $t > 0$  [2]) и для частного вида граничных условий: постоянных и первого рода. С другой стороны, на этих задачах при весьма общей их постановке отрабатывались классические методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений математической физики: методы тепловых потенциалов; контурного интегрирования; продолжений; функций Грина; вариационные; разложения искомой функции в ряд по обобщенным степеням; обобщения конечных интегральных преобразований на нецилиндрические области; функциональных преобразований Гринберга, а также методы, основанные на использовании интегральных, интегродифференциальных или обыкновенных дифференциальных уравнений: разностные, асимптотические и численные. Объясним был и тот факт, что для решения одного и того же класса задач применялись различные подходы. Так, решение одной и той же тепловой задачи можно искать в различных классах функций, определяемых аналитическим подходом при решении задачи. Эти функции должны быть таковыми, чтобы они, во-первых, достаточно легко находились и, во-вторых, обеспечивали сходимость процесса настолько хорошо, чтобы можно было сделать требуемые в задаче заключения о свойствах полученного решения. Представление аналитического решения задачи в эквивалентных функциональных формах (тождественных в смысле числа) имеет большую практическую ценность, так как позволяет варьировать решение в зависимости от постановки задачи: например, решение в форме ряда типа Фурье, удобной для больших времен (находится интегральным преобразованием Фурье), или в виде формулы суммирования Пуассона, более подходящей для малых времен (находится операционным методом). Для областей с движущимися границами это обстоятельство имеет особенно важное значение с учетом широкого применения задач такого класса, отмеченного выше. В то же время следует подчеркнуть, что, несмотря на хорошо развитую аналитическую теорию нестационарного теплопереноса и близких направлений (ссылки в [1]), достигнутые за последние два десятилетия успехи в нахождении точных аналитических решений задач для различных законов движения границы весьма незначительны. По-видимому, одной из

причин такого положения являются технические трудности вычислительного характера при нахождении точного аналитического решения задачи и ослабленное внимание к этой области аналитической теории переноса. В известном обзоре [3] академик Лыков А.В. коснулся проблемы распространения классических методов математической физики на области с границами, движущимися во времени, в частности, на применение наиболее употребительных методов функций Грина и тепловых потенциалов в нецилиндрических областях. В [3] отмечалась “сложность и громоздкость этих методов, хотя для областей с подвижными границами они, возможно, незаменимы”. Излагаемая ниже модифицированная теория тепловых потенциалов не связана с необходимостью решения интегральных уравнений в рамках общепринятого классического подхода при применении тепловых потенциалов обобщенного типа простого и двойного слоя в нецилиндрических областях [4]. При использовании развитой теории для нахождения соответствующих функций Грина получаются функциональные конструкции нового вида, весьма удобные для проведения числовых экспериментов.

#### ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Пусть  $\Omega_t$  – нецилиндрическая область в фазовом пространстве  $(n + 1)$  измерений, сечение которой плоскостью-характеристикой  $t = \text{const} \geq t_0 > 0$  есть выпуклая область  $D_t (D_t \in R^n)$  изменения  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;  $S_t$  – кусочно-гладкая поверхность, зависящая от времени ( $t \geq 0$ ) и ограничивающая область  $D_t$ ;  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $S_t$ , вектор, непрерывный в точках  $S_t$ , так что  $\Omega_t = \{M \in \bar{D}_t = D_t + S_t, t \geq 0\}$ . Пусть  $T(M, t)$  – температурная функция, удовлетворяющая условиям задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T(M, t) + f(M, t), \quad M \in D_t, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$T(M, t)|_{t=0} = \Phi_0(M), \quad M \in \bar{D}_{t=0}; \quad (2)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \varphi(M, t), \quad (3)$$

$$M \in S_t, \quad t \geq 0.$$

Краевые функции в (1)–(3) принадлежат классу решений

$$f(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}_t); \quad \Phi_0(M) \in C^1(\bar{\Omega}_t);$$

$$\varphi(M, t) \in C^0(S_t, t \geq 0); \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0.$$

Искомое решение:

$$T(M, t) \in C^2(\Omega_t) \cap C^0(\bar{\Omega}_t),$$

$$\text{grad}_M T(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}_t).$$

В областях с движущимися границами, как и в случае цилиндрических областей, также можно говорить о первой ( $\beta_1 = 0$ ), второй ( $\beta_2 = 0$ ) или третьей ( $\beta_i > 0, i = 1, 2$ ) краевых задачах. Однако указанная эквивалентность в записи граничных условий сохраняется не всегда. В частности, условие теплоизоляции движущейся границы  $y(t)$  при  $t > 0$ , где  $y(t)$  — непрерывно дифференцируемая функция с конечными производными любого порядка, имеет вид [2]

$$\left[ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \frac{v(t)}{a} T(x, t) \right]_{x=y(t)} = 0, \quad t > 0, \quad (4)$$

и для скорости движения  $v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 0$  ( $y(t) = \text{const}$ ) выражение (4) совпадает с классической записью тепловой изоляции неподвижной границы, вытекающей из закона Фурье в скалярной форме [2]. Специфические особенности области с движущейся границей проявляются и в постановке краевых задач для соответствующих функций Грина. Здесь следует проявить особое внимание при нахождении функций Грина для второй и третьей краевых задач (см. ниже).

В отношении каждой из краевых функций (1)–(3) возникают вопросы корректности их постановки: существование решения, единственность решения, устойчивость решения. Эти вопросы рассматриваются в качественной теории уравнений параболического типа в областях с криволинейными границами [5]. Задачи, не удовлетворяющие перечисленным требованиям, называются некорректно поставленными. В 1962 г. А.Н. Тихонов разработал новые подходы к решению некорректно поставленных задач, в основе которых лежало фундаментальное понятие регуляризирующего оператора (ссылки в [1]). Изучаемые ниже математические модели корректны по постановке. При этом предполагается, что краевые функции в (1)–(3) и законы перемещения границы — гладкие функции, для которых существуют все преобразования, вытекающие по ходу действия. Эти функции задаются практикой многочисленных приложений математических моделей (1)–(3). В 1930-х гг. С.Л. Соболев разработал теорию обобщенных решений для уравнений в частных производных. В дальнейшем получили развитие качественная теория краевых задач для параболических уравнений в обобщенной постановке в пространствах Соболева и других функциональных пространствах и теория этих пространств для решения задач (теоремы вложения; теоремы о следах; компактность вложения и теория усреднения и т.д.) и др. (ссылки в [1]). Эти во-

просы детально рассмотрены в недавно вышедшей книге [6].

### МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Для областей с движущимися границами (нецилиндрические области) метод функций Грина является одним из наиболее эффективных. Метод предполагает предварительное рассмотрение более простой модели при нахождении соответствующей функции влияния (функции Грина) и позволяет получить интегральное представление аналитических решений обширного класса задач нестационарного переноса в зависимости от неоднородностей в исходной постановке задачи. Однако для нецилиндрических областей появляются особенности, свойственные при наличии движущихся границ. Следует кратко остановиться на указанном методе для цилиндрических (классических) областей.

Пусть  $D$  — конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения  $M(x, y, z)$ ;  $S$  — кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область  $D$ ;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $S$ ;  $\Omega = (M \in D, t > 0)$  — цилиндрическая область в фазовом пространстве  $(x, y, z, t)$  с основанием  $D$  при  $t = 0$ ;  $T(M, t)$  — температурная функция, удовлетворяющая условиям задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + f(M, t), \quad M \in D, \quad t > 0; \quad (5)$$

$$T(M, t)|_{t=0} = \Phi_0(M), \quad M \in \bar{D}; \quad (6)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \varphi(M, t), \quad (7)$$

$$M \in S, \quad t \geq 0.$$

Здесь

$$f(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}); \quad \Phi_0(M) \in C^1(\bar{\Omega});$$

$$\varphi(M, t) \in C^0; \quad (St \geq 0);$$

$$\bar{D} = D + S; \quad \bar{\Omega} = (M \in \bar{D}, t \geq 0).$$

Искомое решение:

$$T(M, t) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}),$$

$$\text{grad}_M T(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0.$$

В силу принципа суперпозиции, справедливо для линейных задач переноса, можно записать интегральное представление для  $T(M, t)$  в виде [2]

$$T(M, t) = \iiint_D \Phi_0(P) G(M, P, t, \tau) \Big|_{\tau=0} dV_p + \\ + a \iiint_S \left( G \frac{\partial T}{\partial n_p} - T \frac{\partial G}{\partial n_p} \right) \Big|_{P \in S} d\tau d\sigma_p + \\ + \int_0^t \iiint_D f(P, \tau) G(M, t, P, \tau) d\tau dV_p, \quad (8)$$

если известна соответствующая функция Грина  $G(M, t, P, \tau)$  для данной области как решение более простой задачи для однородного уравнения (5) с однородными граничными условиями того же вида, что и (7):

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a \Delta_M G(M, t, P, \tau), \quad M \in D, \quad t > \tau; \quad (9)$$

$$G(M, t, P, \tau) \Big|_{t=\tau} = \delta(M, P), \quad M \in D, \quad P \in D; \\ \beta_1 \frac{\partial G(M, t, P, \tau)}{\partial n_M} + \beta_2 G(M, t, P, \tau) = 0, \quad (10) \\ M \in S, \quad t > \tau.$$

Здесь  $\delta(M, P)$  – дельта-функция Дирака. Если рассматривать  $G(M, t, P, \tau)$  как функцию точки  $P$  и времени  $\tau$ , то для нахождения  $G$  следует решать эквивалентную задачу для сопряженного с (9) уравнения

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} + a \Delta_p G(M, t, P, \tau) = 0, \quad P \in D, \quad \tau < t; \quad (11)$$

$$G(M, t, P, \tau) \Big|_{\tau=t} = \delta(P, M), \quad P \in D, \quad M \in D; \quad (12)$$

$$\beta_1 \frac{\partial G(M, t, P, \tau)}{\partial n_p} + \beta_2 G(M, t, P, \tau) = 0, \quad (13) \\ P \in S, \quad \tau < t.$$

Если область  $D$  ограничена, то функция Грина  $G$  имеет вид [2]

$$G(M, t, P, \tau) = G(M, t - \tau, P) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(M) \Psi_n(P)}{\|\Psi_n\|^2} \exp\left[-(\sqrt{a}\gamma_n)^2 (t - \tau)\right],$$

где  $\Psi_n(M)$  и  $\gamma_n^2$  – собственные функции и собственные значения соответствующей (5)–(8) однородной задачи

$$\Delta \Psi(M) + \gamma^2 \Psi(M) = 0, \quad M \in D; \\ \beta_1 \frac{\partial \Psi(M)}{\partial n} + \beta_2 \Psi(M) = 0, \quad M \in S.$$

Здесь  $\|\Psi_n\|^2$  – квадрат нормы собственных функций

$$\|\Psi_n\|^2 = \iiint_D \Psi_n^2(M) dV_M.$$

Пусть теперь  $\Omega_t$  – нецилиндрическая область, т.е. сечение  $\Omega_t$  плоскостью-характеристикой  $t = \text{const} \geq t_0 \geq 0$  есть область  $D_t$  с границей  $S_t$ , зависящей от времени  $t$ . Следует выяснить, что меняется в постановках краевых задач (9), (10) и (11)–(13) относительно функции Грина  $G(M, t, P, \tau)$  по переменным  $(M, t)$  и  $(P, \tau)$  (для цилиндрических областей формулировка граничных условий остается неизменной, уравнение (9) заменяется на сопряженное (11)).

Рассмотрим область  $\Omega_t = \{y_1(t) < x < y_2(t), t > 0\}$ , где  $y_i(t)$  – непрерывно дифференцируемые функции, в которой  $T(x, t)$  удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t), \quad y_1(t) < x < y_2(t), \quad t > 0; \quad (14)$$

$$T(x, 0) = \Phi_0(x), \quad y_1(0) \leq x \leq y_2(0), \\ y_i(0) \geq 0, \quad i = 1, 2; \quad (15)$$

$$\left[ \beta_{i1} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \beta_{i2} T(x, t) \right]_{x=y_i(t)} = \beta_{i3} \Phi_i(t), \quad (16) \\ t \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Характерным для данной задачи является наличие движущихся во времени границ и, следовательно, то обстоятельство, что функция Грина  $G(x, t, x', \tau)$  в силу ее физического смысла (тепловой импульс мощностью  $Q = c\rho$  [4]) зависит не от разности  $(t - \tau)$ , а от  $t$  и  $\tau$ , так как определяющим будет не только время действия  $(t - \tau)$ , но и момент  $\tau$  возникновения импульса. Представим  $G(x, t, x', \tau)$  в виде [7]

$$G(x, t, x', \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t - \tau)}} \exp\left[-\frac{(x - x')^2}{4a(t - \tau)}\right] + \\ + q(x, t, x', \tau) = G_0 + q, \quad \tau < t, \quad (17)$$

где  $G_0$  – фундаментальное решение уравнения (14) (при  $f = 0$ ). Функция  $G_0$  удовлетворяет однородному уравнению (14) по переменным  $(x, t)$  и сопряженному с (14) (при  $f = 0$ ) по переменным  $(x', \tau)$ . Функция  $q$  – регулярная составляющая функции Грина (17), выбирается так, чтобы удовлетворялись уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = -a \frac{\partial^2 q}{\partial x'^2}$$

и начальное условие  $q(x, t, x', \tau = t) = 0$ . Отсюда имеем для функции  $G(x, t, x', \tau)$  в соответствии с (11), (12)

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = -a \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2}, \quad y_1(\tau) < x' < y_2(\tau), \quad \tau < t; \quad (18)$$

$$G(x, t, x', \tau)|_{\tau=t} = \delta(x' - x), \quad y_1(t) < x' < y_2(t). \quad (19)$$

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} [T(x', \tau) G(x, t, x', \tau)] &= G \frac{\partial T}{\partial \tau} + T \frac{\partial G}{\partial \tau} = \\ &= a \left( G \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} - T \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} \right) + G f(x', \tau). \end{aligned}$$

Проинтегрируем данное равенство по  $x' \in [y_1(\tau), y_2(\tau)]$ :

$$\begin{aligned} \int_{y_1(\tau)}^{y_2(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} [TG] dx' &= a \left( G \frac{\partial T}{\partial x'} - T \frac{\partial G}{\partial x'} \right)_{x'=y_1(\tau)}^{x'=y_2(\tau)} + \\ &+ \int_{y_1(\tau)}^{y_2(\tau)} G(x, t, x', \tau) f(x', \tau) dx'. \end{aligned} \quad (20)$$

Соотношение (20) справедливо при всех  $\tau < t$  и, следовательно, его можно проинтегрировать по  $\tau$  для  $0 < \tau < t - \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  – сколь угодно малое число (при  $0 < \tau < t - \varepsilon$  подынтегральные функции в (20) достаточно регулярны, так как исключена особенность у функции  $G$  в точке  $x = x'$  при  $\tau = t$ ). Получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_{y_1(\tau)}^{y_2(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} (TG) dx' &= a \int_0^{t-\varepsilon} \left( G \frac{\partial T}{\partial x'} - T \frac{\partial G}{\partial x'} \right)_{x'=y_2(\tau)} d\tau - \\ &- a \int_0^{t-\varepsilon} \left( G \frac{\partial T}{\partial x'} - T \frac{\partial G}{\partial x'} \right)_{x'=y_1(\tau)} d\tau + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_{y_1(\tau)}^{y_2(\tau)} G(x, t, x', \tau) f(x', \tau) dx'. \end{aligned}$$

Вынося слева оператор  $\partial/\partial\tau$  за знак определенного интеграла и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , учитывая (19) и равенство

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{y_1(t-\varepsilon)}^{y_2(t-\varepsilon)} T(x', t-\varepsilon) G(x, t, x', \tau) \Big|_{\tau=t-\varepsilon} dx' &= \\ = \int_{y_1(t)}^{y_2(t)} T(x', t) \delta(x - x') dx' &= T(x, t), \end{aligned}$$

получаем основную интегральную формулу, дающую представление произвольных решений уравнения (14) в области с движущимися границами:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \int_{y_1(0)}^{y_2(0)} T(x', 0) G(x, t, x', 0) dx' + \\ &+ a \int_0^t \left[ G \frac{\partial T}{\partial x'} - T \left( \frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{1}{a} \frac{dy_2}{d\tau} G \right) \right]_{x'=y_2(\tau)} d\tau - \\ &- a \int_0^t \left[ G \frac{\partial T}{\partial x'} - T \left( \frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{1}{a} \frac{dy_1}{d\tau} G \right) \right]_{x'=y_1(\tau)} d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{y_1(\tau)}^{y_2(\tau)} G(x, t, x', \tau) f(x', \tau) dx' d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Предполагается, что в (16) заданы граничные условия: а) либо первого рода ( $\beta_{i1} = 0, \beta_{i2} = \beta_{i3} = 1$ ); б) либо второго рода ( $\beta_{i2} = 0, \beta_{i1} = \beta_{i3} = 1$ ); в) либо третьего рода ( $\beta_{i1} = 1, \beta_{i2} = \beta_{i3} = (-1)^i h_i$ , где  $h_i$  – относительный коэффициент теплообмена). Если функцию  $G(x, t, x', \tau)$  выбрать так, чтобы удовлетворялись граничные условия в случаях

а) первой краевой задачи

$$G(x, t, x', \tau)|_{x'=y_i(\tau)} = 0, \quad \tau < t, \quad i = 1, 2; \quad (22)$$

б) второй краевой задачи

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{1}{a} \frac{\partial y_i}{\partial \tau} G \right) \Big|_{x'=y_i(\tau)} = 0, \quad \tau < t, \quad i = 1, 2; \quad (23)$$

в) третьей краевой задачи

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x'} + (-1)^i \left[ h_i + (-1)^{i-1} \frac{1}{a} \frac{\partial y_i}{\partial \tau} \right] G \right) \Big|_{x'=y_i(\tau)} = 0, \quad \tau < t, \quad i = 1, 2; \quad (24)$$

то из (20) получаем искомые интегральные представления для  $T(x, t)$  в виде:

а) первая краевая задача

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \int_{y_1(0)}^{y_2(0)} [T(x', \tau) G(x, t, x', \tau)]_{\tau=0} dx' + \\ &+ a \int_0^t \left[ T(x', \tau) \frac{\partial G}{\partial x'} \right]_{x'=y_1(\tau)} d\tau - \\ &- a \int_0^t \left[ T(x', \tau) \frac{\partial G}{\partial x'} \right]_{x'=y_2(\tau)} d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{y_1(\tau)}^{y_2(\tau)} f(x', \tau) G(x, t, x', \tau) dx' d\tau; \end{aligned}$$

б) вторая краевая задача

$$T(x, t) = \int_{y_1(0)}^{y_2(0)} [T(x', \tau) G(x, t, x', \tau)]_{\tau=0} dx' - a \int_0^t \left[ \frac{\partial T(x', \tau)}{\partial x'} G(x, t, x', \tau) \right]_{x'=y_1(\tau)} d\tau + a \int_0^t \left[ \frac{\partial T(x', \tau)}{\partial x'} G(x, t, x', \tau) \right]_{x'=y_2(\tau)} d\tau + \int_0^t \int_{y_1(\tau)}^{y_2(\tau)} f(x', \tau) G(x, t, x', \tau) d\tau dx';$$

в) третья краевая задача

$$T(x, t) = \int_{y_1(0)}^{y_2(0)} [T(x', \tau) G(x, t, x', \tau)]_{\tau=0} dx' - a \int_0^t \left[ \left( \frac{\partial T(x', \tau)}{\partial x'} - h_1 T(x', \tau) \right) G(x, t, x', \tau) \right]_{x'=y_1(\tau)} d\tau + a \int_0^t \left[ \left( \frac{\partial T(x', \tau)}{\partial x'} + h_2 T(x', \tau) \right) G(x, t, x', \tau) \right]_{x'=y_2(\tau)} d\tau + \int_0^t \int_{y_1(\tau)}^{y_2(\tau)} f(x', \tau) G(x, t, x', \tau) d\tau dx'.$$

Остановимся подробнее на рассмотрении функции  $G(x, t, x', \tau)$  в виде (17), которая удовлетворяет (18), (19) и одному из граничных условий (22)–(24) в зависимости от типа краевой задачи (14)–(16).

Рассмотрим функцию  $\bar{G}(x, t, x', \tau)$ , определяемую условиями

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2}, \quad y_1(t) < x < y_2(t), \quad t > \tau; \quad (25)$$

$$\bar{G}(x, t, x', \tau)|_{t=\tau} = \delta(x - x'), \quad y_1(\tau) < x' < y_2(\tau); \quad (26)$$

$$\left[ \beta_{i1} \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + \beta_{i2} \bar{G} \right]_{x=y_i(t)} = 0, \quad t > \tau, \quad i = 1, 2, \quad (27)$$

где (как и в (16))  $\beta_{i1} = 0$  в случае первой краевой задачи,  $\beta_{i2} = 0$  – второй и  $\beta_{i1} = 1, \beta_{i2} = \beta_{i3} = (-1)^i h_i$  для третьей краевой задачи. Покажем, что  $G(x, t, x', \tau) = \bar{G}(x, t, x', \tau)$ . Доказательство проводится для второй краевой задачи, остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично.

Проинтегрируем выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} [\bar{G}(x'', \theta, x', \tau) G(x, t, x'', \theta)] &= \\ &= a \left( G \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x''^2} - \bar{G} \frac{\partial^2 G}{\partial x''^2} \right) \end{aligned}$$

по  $x''$  в интервале от  $y_1(\theta)$  до  $y_2(\theta)$ , где  $t > \theta > \tau$ . Получаем, учитывая граничные условия, для  $\bar{G}$  и  $G$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{y_1(\theta)}^{y_2(\theta)} \bar{G} G dx'' = 0. \quad (28)$$

Проинтегрируем далее (28) в промежутке  $[\theta, t - \varepsilon]$ , где  $\varepsilon > 0$  – сколь угодно малое число. Повторяя предыдущие рассуждения (как и при выводе соотношения (21)), находим

$$\begin{aligned} \int_{y_1(t-\varepsilon)}^{y_2(t-\varepsilon)} \bar{G}(x'', t - \varepsilon, x', \tau) [G(x, t, x'', \theta)]_{\theta=t-\varepsilon} dx'' &= \\ &= \int_{y_1(\theta)}^{y_2(\theta)} \bar{G}(x'', \theta, x', \tau) [G(x, t, x'', \theta)]_{\theta=t-\varepsilon} dx''. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{y_1(\theta)}^{y_2(\theta)} \bar{G}(x'', \theta, x', \tau) G(x, t, x'', \theta) dx'' &= \\ &= \int_{y_1(t)}^{y_2(t)} \bar{G}(x'', t, x', \tau) \delta(x'' - x) dx'' = \bar{G}(x, t, x', \tau). \end{aligned} \quad (29)$$

С другой стороны, интегрируя (28) в промежутке  $[t + \varepsilon, \theta]$ , что дает

$$\begin{aligned} \int_{y_1(t+\varepsilon)}^{y_2(t+\varepsilon)} G(x, t, x'', \tau + \varepsilon) [\bar{G}(x'', \theta, x', \tau)]_{\theta=t+\varepsilon} dx'' &= \\ &= \int_{y_1(\theta)}^{y_2(\theta)} G(x, t, x'', \theta) \bar{G}(x'', \theta, x', \tau) dx'', \end{aligned}$$

и устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , приходим к выражению

$$\begin{aligned} \int_{y_1(\theta)}^{y_2(\theta)} G(x, t, x'', \theta) \bar{G}(x'', \theta, x', \tau) dx'' &= \\ &= \int_{y_1(\tau)}^{y_2(\tau)} G(x, t, x'', \tau) \delta(x'' - x') dx'' = G(x, t, x', \tau). \end{aligned} \quad (30)$$

Сравнение (29) и (30) показывает, что  $G(x, t, x', \tau) \equiv \bar{G}(x, t, x', \tau)$ . Используя подходы [5, 6], можно доказать существование и единственность решения задачи (25)–(27), если каждая кривая  $y_i(t), i = 1, 2$ , дифференцируема и производные  $\frac{\partial y_i}{\partial t}$  удовлетворяют условию Гельдера порядка  $\gamma > 1/2$ .

Таким образом, функция  $G(x, t, x', \tau)$  может быть найдена как решение эквивалентных задач (18), (19), (22)–(23) и (25)–(27), и в областях с движущимися границами не сохраняется эквивалентность в записи граничных условий в поста-

новках задач по  $(x, t)$  и  $(x', \tau)$  в отличие от цилиндрических областей (см. (10) и (13)). В этих случаях следует проявлять особое внимание при нахождении функций Грина для второй и третьей краевых задач, а также и при наличии смешанных граничных условий на движущихся границах. Всякий случай нахождения функции Грина соответствующей краевой задаче для той или иной области весьма важен, так как содержит в себе обширную информацию, позволяя выписать большое число аналитических решений в зависимости от неоднородностей в (14)–(16). Здесь, как и в случае цилиндрических областей, также можно говорить о первой, второй или третьей краевых задачах при соответствующих значениях коэффициентов  $\beta_{ij} = \text{const}$  в (16). Однако указанная эквивалентность в записи граничных условий сохраняется не всегда. В частности, как показано выше в (4), условие теплоизоляции движущейся границы области  $x \in [0, y(t)]$ ,  $t \geq 0$ , где  $y(t)$  при  $t > 0$  – непрерывно дифференцируемая функция с конечными производными любого порядка, имеет вид [2]

$$\left[ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \frac{v(t)}{a} T(x, t) \right]_{x=y(t)} = 0, \quad t > 0, \quad (31)$$

и для скорости движения  $v(t) = dy(t)/dt = 0$  ( $y(t) = \text{const}$ ) выражение (31) совпадает с классической записью тепловой изоляции неподвижной границы

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{y=\text{const}} = 0.$$

**МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ТЕПЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ  $[0, l + vt]$ ,  $[l + vt, \infty)$ ,  $t \geq 0$**

В обзоре [3] и книгах [4, 7] описаны обобщенные тепловые потенциалы простого и двойного слоя как один из возможных аналитических методов решения краевых задач (5)–(7).

Модифицированный метод оказался особенно эффективным для областей с равномерно движущейся границей, имеющей многочисленные практические приложения, причем как при решении задач в исходной постановке (14)–(16) (при  $f = 0$  или  $f = f(t)$ ), так и при построении соответствующей функции Грина. Получаемые при этом аналитические решения задачи имеют новую (простейшую) интегральную форму, отличную от известных ранее.

Для сокращения выкладок рассмотрим в (14)–(16) область:  $x \in [0, l + vt]$ ,  $t \geq 0$ , т.е. случай  $y_1(t) = 0$ ,  $y_2(t) = l + vt$  ( $l, v = \text{const}$ ); пусть также  $\beta_{i1} = 0$ ,  $\beta_{i2} = \beta_{i3} = 1$ ;  $f(x, t) = 0$ ,  $\Phi_0(x) = 0$ . Нали-

чие неоднородностей в (14), (15) рассмотрено ниже. Следует заметить, что область  $x \in [l_1 + v_1t, l_2 + v_2t]$ ,  $t \geq 0$  для  $T(x, t)$  (14)–(16) легко сводится к рассматриваемому случаю, т.е. к области  $x \in [0, l + vt]$ ,  $t \geq 0$  с помощью преобразований

$$z = x - (l_1 + v_1t), \quad T(x, t) \equiv W(z, t), \\ W(z, t) = \Theta(z, t) \exp(-v_1z/2a - v_1^2t/4a).$$

Решение  $T(x, t)$  ищем в виде суммы тепловых потенциалов [1]:

$$T(x, t) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau + \\ + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-l-v\tau)^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau, \quad (32)$$

где  $\Psi_1(t)$  и  $\Psi_2(t)$  – искомые неизвестные плотности потенциалов. Выражение (32) запишем в пространстве изображений по Лапласу:

$$\bar{T}(x, p) = \int_0^\infty \exp(-pt) T(x, t) dt, \\ \text{Re } p \geq \beta > 0, \quad |\arg p| < \frac{\pi}{2}; \quad (33)$$

$$\bar{T}(x, p) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \exp\left[-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] \bar{\Psi}_1(p) + \\ + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \exp\left[-\frac{(l-x)}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] \bar{\Psi}_3\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right],$$

где  $\Psi_3(t) = \Psi_2(t) \exp(\gamma^2 t)$ ,  $\gamma^2 = \frac{v^2}{4a}$ .

Таким образом, для нахождения оригинала  $T(x, t)$  из (33) необходимо искать изображения плотностей относительно  $\bar{\Psi}_1(p)$  и  $\bar{\Psi}_3\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right]$ . Удовлетворяя в (32) граничным условиям (16) (при  $\beta_{i1} = 0$ ,  $\beta_{i2} = \beta_{i3} = 1$ ), находим

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \times \\ & \times \int_0^t \frac{\Psi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(l+v\tau)^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau = \Phi_1(t), \\ & \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(l+vt)^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau + \\ & + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{v^2}{4a}(t-\tau)\right] d\tau = \Phi_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

В пространстве изображений система интегральных уравнений (34) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \bar{\Psi}_1(p) + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \exp\left[-\frac{l}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] \times \\ & \quad \times \bar{\Psi}_3\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right] = \bar{\Phi}_1(p), \\ & \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \exp\left[-\frac{l}{\sqrt{a}}(\sqrt{p} + \gamma)\right] \times \\ & \times \bar{\Psi}_1\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right] + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \bar{\Psi}_3(p) = \bar{\Phi}_3(p), \end{aligned} \right\} (35)$$

где  $\Phi_3(t) = \Phi_2(t) \exp(\gamma^2 t)$ . Исключая из системы функциональных уравнений (35) вначале  $\bar{\Psi}_3(p)$ , а затем  $\bar{\Psi}_1(p)$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} & \exp\left[-\frac{l}{\sqrt{a}}(\sqrt{p} + 2\gamma)\right] \bar{\Psi}_1\left[(\sqrt{p} + 2\gamma)^2\right] - \\ & \quad - \exp\left[-\frac{l}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] \bar{\Psi}_1(p) = \\ & = \frac{2(\sqrt{p} + \gamma)}{\sqrt{a}} \bar{\Phi}_3\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right] - \\ & \quad - \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \exp\left[-\frac{l}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] \bar{\Phi}_1(p), \\ & \exp\left[-\frac{l}{\sqrt{a}}(\sqrt{p} + \gamma)\right] \bar{\Psi}_3\left[(\sqrt{p} + 2\gamma)^2\right] - \\ & \quad - \exp\left[-\frac{l}{\sqrt{a}}(\sqrt{p} + \gamma)\right] \bar{\Psi}_3(p) = \\ & = \frac{2(\sqrt{p} + \gamma)}{\sqrt{a}} \bar{\Phi}_1\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right] - \\ & \quad - \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \exp\left[-\frac{l}{\sqrt{a}}(\sqrt{p} + \gamma)\right] \bar{\Phi}_3(p). \end{aligned} \right\} (36)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1(p^2) &= \bar{A}_1(p), \quad \bar{\Psi}_3(p^2) = \bar{A}_3(p), \\ \bar{\Phi}_3(p^2) &= \bar{F}_3(p), \quad \bar{\Phi}_1(p^2) = \bar{F}_1(p) \end{aligned} \quad (38)$$

и перепишем (36), (37) в виде

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}\right) \bar{A}_1(p + 2\gamma) - \exp\left(\frac{2l}{\sqrt{a}}p\right) \bar{A}_1(p) = \\ & = \frac{2}{\sqrt{a}} \left[ (p + \gamma) \exp\left(\frac{l}{\sqrt{a}}p\right) \bar{F}_3(p + \gamma) - \right. \\ & \quad \left. - p \exp\left[\frac{2l}{\sqrt{a}}p\right] \bar{F}_1(p) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}\right) \bar{A}_3(p + 2\gamma) - \exp\left(\frac{2l}{\sqrt{a}}p\right) \bar{A}_3(p) = \\ & = \frac{2}{\sqrt{a}} \left[ (p + \gamma) \exp\left(\frac{l}{\sqrt{a}}(p - \gamma)\right) \bar{F}_1(p + \gamma) - \right. \\ & \quad \left. - p \exp\left(\frac{2l}{\sqrt{a}}p\right) \bar{F}_3(p) \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

С помощью подстановки [2]

$$\bar{A}_i(p) = \exp\left(\frac{l}{2\sqrt{a}\gamma}p^2\right) \bar{B}_i(p), \quad i = 1, 3, \quad (41)$$

уравнения (39) и (40) приводятся к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} & \bar{B}_1(p + 2\gamma) - \bar{B}_1(p) = \frac{2}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{l}{2\sqrt{a}\gamma}p^2\right) \times \\ & \times \left[ (p + \gamma) \exp\left(-\frac{l}{\sqrt{a}}p\right) \bar{F}_3(p + \gamma) - p \bar{F}_1(p) \right], \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \bar{B}_3(p + 2\gamma) - \bar{B}_3(p) = \frac{2}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{l}{2\sqrt{a}\gamma}p^2\right) \times \\ & \times \left[ (p + \gamma) \exp\left(-\frac{l}{\sqrt{a}}(p + \gamma)\right) \bar{F}_1(p + \gamma) - p \bar{F}_3(p) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что искомым частным решением функционального уравнения  $\bar{B}(p + 2\gamma) - \bar{B}(p) = \bar{\Theta}(p)$  является функция  $\bar{B}(p) = -\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Theta}(p + 2n\gamma)$ , если этот ряд сходится. Но ряд типа  $\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{l}{2\sqrt{a}\gamma}\right)(n + \bar{d}(p))^2\right]$ , к которому приводятся решения уравнений (42) и (43), сходится, так как  $\frac{l}{2\sqrt{a}\gamma} > 0$ . Находим  $\bar{B}_i(p)$ ,  $i = 1, 3$ , и далее из (38) и (41) искомые изображения плотностей потенциалов (32) в виде (33):

$$\begin{aligned} & \bar{\Psi}_1\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right] = \\ & = -\frac{2}{\sqrt{a}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}n(n + 1) - \frac{(2n + 1)l}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right) \times \right. \\ & \quad \times (\sqrt{p} + 2(n + 1)\gamma) \bar{\Phi}_3\left[(\sqrt{p} + 2(n + 1)\gamma)^2\right] + \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \left. + \frac{2}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}n^2 - \frac{2nl}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] \times \right. \\ & \quad \times (\sqrt{p} + 2n\gamma) \bar{\Phi}_1\left[(\sqrt{p} + 2n\gamma)^2\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{\Psi}_3\left[(\sqrt{p} + \gamma)^2\right] = \\ & = -\frac{2}{\sqrt{a}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}(n + 1)^2 - \frac{(2n + 1)l}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right) \times \right. \\ & \quad \times (\sqrt{p} + 2(n + 1)\gamma) \bar{\Phi}_1\left[(\sqrt{p} + 2(n + 1)\gamma)^2\right] + \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \left. + \frac{2}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}n(n + 1) - \frac{2nl}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] \times \right. \\ & \quad \times (\sqrt{p} + (2n + 1)\gamma) \bar{\Phi}_3\left[(\sqrt{p} + (2n + 1)\gamma)^2\right]. \end{aligned}$$

Выражения (33), (44), (45) дают операционное решение задачи



$$\begin{aligned} \bar{T}(x, p) = & \bar{\varphi}_1(p) \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \exp\left[-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}n^2\right] (\sqrt{p} + 2n\gamma) \times \\ & \times \left\{ \exp\left[-\frac{(2nl+x)\sqrt{p}}{\sqrt{a}}\right] - \exp\left[-\frac{(2nl-x)\sqrt{p}}{\sqrt{a}}\right] \right\} \times \\ & \times \bar{\varphi}_1\left[(\sqrt{p} + 2n\gamma)^2\right] + \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{2l\gamma}{\sqrt{a}}n(n+1)\right] \times \\ & \times (\sqrt{p} + (2n+1)\gamma) \left\{ \exp\left[-\frac{((2n+1)l-x)\sqrt{p}}{\sqrt{a}}\right] - \right. \\ & \left. - \exp\left[-\frac{((2n+1)l+x)\sqrt{p}}{\sqrt{a}}\right] \right\} \bar{\varphi}_3\left[(\sqrt{p} + (2n+1)\gamma)^2\right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Переходя в пространство оригиналов, получаем искомое интегральное представление аналитического решения  $T(x, t)$ :

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_0^t \frac{[x + 2n(l + vt)]}{(t - \tau)^{3/2}} \varphi_1(\tau) \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{v(l + v\tau)}{a}n^2 - \frac{[x + 2n(l + v\tau)]^2}{4a(t - \tau)}\right\} d\tau - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_0^t \frac{[x + (2n+1)(l + vt)]}{(t - \tau)^{3/2}} \varphi_2(\tau) \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{v(l + v\tau)}{a}n(n+1) - \right. \\ & \left. - \frac{[x + (2n+1)(l + v\tau)]^2}{4a(t - \tau)}\right\} d\tau. \end{aligned}$$

Соотношение (46) позволяет рассмотреть ряд интересных приложений. Одно из них – построение функции Грина  $G(x, t, x', \tau)$  первой краевой задачи для уравнения (14) с начальным условием (15) в рассматриваемой области. Функция  $G$  для этого случая удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l + vt, \quad t > \tau, \quad (47)$$

$$G|_{t=\tau} = \delta(x - x'), \quad 0 < x < l_0, \quad l_0 = l + v\tau, \quad (48)$$

$$G|_{x=0} = G|_{x=l+vt} = 0, \quad t > \tau. \quad (49)$$

Представим  $G(x, t, x', \tau)$  в виде [2]

$$\begin{aligned} G(x, t, x', \tau) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t - \tau)}} \exp\left[-\frac{(x - x')^2}{4a(t - \tau)}\right] + \\ & + q(x, t, x', \tau) = G_0(x, t, x', \tau) + q(x, t, x', \tau), \end{aligned}$$

где  $G_0$  – фундаментальное решение уравнения теплопроводности,  $q$  – регулярная составляющая функции Грина. Переходя в (47)–(49) к функции  $q$  при  $t' = t - \tau$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t'} = a \frac{\partial^2 q}{\partial x'^2}, \quad 0 < x < l + vt', \quad t' > 0; \\ q|_{t'=0} = 0, \quad 0 < x < l_0; \end{aligned} \quad (50)$$

$$q|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t'}} \exp\left[-\frac{x'^2}{4a t'}\right] = \varphi_1(t'), \quad t' > 0;$$

$$\begin{aligned} q|_{x=l_0+vt'} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t'}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{(l_0 - x' + vt')^2}{4a t'}\right] = \varphi_2(t'), \quad t' > 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Изображение  $\bar{q}(x, p, x', \tau)$  может быть выписано непосредственно с помощью соотношения (46), если учесть, что в случае (50), (51) операционное изображение функций, входящих в (46), имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(p) = & -\frac{1}{2\sqrt{a p}} \exp\left(-\frac{x'}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right); \\ \bar{\varphi}_1\left[(\sqrt{p} + 2\gamma n)^2\right] = & -\frac{1}{2\sqrt{a}(\sqrt{p} + 2\gamma n)} \times \\ \times \exp\left(-\frac{x'}{\sqrt{a}}(\sqrt{p} + 2\gamma n)\right); \quad \bar{\varphi}_3\left[(\sqrt{p} + (2n+1)\gamma)^2\right] = \\ = & -\frac{1}{2\sqrt{a}(\sqrt{p} + (2n+1)\gamma)} \times \\ \times \exp\left(-\frac{(l_0 - x')}{\sqrt{a}}(\sqrt{p} + (2n+1)\gamma)\right). \end{aligned}$$

Подставляя эти функции в (46) и переходя к оригиналам, находим искомое выражение для функции Грина  $G(x, t, x', \tau)$ :

$$\begin{aligned} G(x, t, x', \tau) = & \frac{1}{2\sqrt{a\pi(t - \tau)}} \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(-\frac{2l_0\gamma}{\sqrt{a}}n^2 - \frac{2\gamma x'}{\sqrt{a}}n\right) \times \\ \times \left\{ \exp\left[-\frac{(2nl_0 + x' - x)^2}{4a(t - \tau)}\right] - \right. \\ \left. - \exp\left[-\frac{(2nl_0 + x' + x)^2}{4a(t - \tau)}\right] \right\}, \end{aligned} \quad (52)$$

где  $l_0 = l + v\tau$ ,  $\gamma = \frac{v}{2\sqrt{a}}$ . Исследуя полученное выражение, объединим экспоненты, содержащие в показателе  $n^2$ . Тогда под знаком ряда появится множитель  $\exp\left[-l_0 n^2 (l + v\tau)/a(t - \tau)\right]$ . Отсюда следует, что ряд (52) сходится и для отрицательных значений  $v$ , если  $\tau < t < -\frac{l}{v}$ . Но при  $t = -\frac{l}{v}$  ( $v < 0$ ) заданная область исчезает. Следовательно, выражение (52) можно использовать для любых значений  $v$ .

Теперь можно учесть неоднородности в (14), (15) и написать соответствующее интегральное представление аналитического решения первой краевой задачи через функцию Грина (52) [2]:

$$T(x, t) = \int_0^l \Phi_0(x') G(x, t, x', \tau) \Big|_{\tau=0} dx' + a \int_0^t \Phi_1(\tau) \frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{x'=0} d\tau - a \int_0^t \Phi_2(\tau) \frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{x'=l+v\tau} d\tau + \int_0^{l+v\tau} \int_0^t F(x', \tau) G(x, t, x', \tau) d\tau dx'.$$

Выражение (52) позволяет записать  $G(r, t, r', \tau)$  первой краевой задачи для центрально-симметрической области  $r \in [0, R + v\tau]$ ,  $t \geq 0$ , если учесть, что с помощью подстановки  $\Theta = rG$  этот случай сводится к изученному в декартовой системе координат  $(r, t)$ . Находим

$$G(r, t, r', \tau) = \frac{1}{8\pi r r' \sqrt{a\pi(t - \tau)}} \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(-\frac{R_0 v}{a} n^2 - \frac{r' v}{a} n\right) \times \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \exp\left[-\frac{(2nR_0 + r' + (-1)^k r)^2}{4a(t - \tau)}\right],$$

где  $R_0 = R + v\tau$ . Для других граничных условий специфические особенности метода заключаются лишь в решении конечно-разностного уравнения и переходе к оригиналу. Так, для граничных условий смешанного типа в (16)  $\beta_{11} = \beta_{22} = 0$ ,  $\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = \beta_{21} = 1$  при  $y(t) = vt$  ( $v > 0$ ) соответствующая функция Грина имеет вид

$$G(x, t, x', \tau) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi(t - \tau)}} \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{v^2 \tau}{a} n^2 - \frac{v x'}{a} n\right) \times \left\{ \exp\left[-\frac{(2nv\tau - x + x')^2}{4a(t - \tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(2nv\tau + x + x')^2}{4a(t - \tau)}\right] \right\} + \frac{v}{2a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n n \exp\left(-\frac{v^2 \tau}{a} n^2 - \frac{v x'}{a} n\right) \times \left[ \Phi\left(\frac{2nv\tau + x + x'}{2\sqrt{a(t - \tau)}}\right) - \Phi\left(\frac{2nv\tau + x' - x}{2\sqrt{a(t - \tau)}}\right) \right],$$

где  $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-y^2) dy$  – функция Лапласа.

Метод может быть распространен также на некоторые другие области и законы движения границы. Особенно эффективным метод становится для области  $x \geq l + vt$ ,  $t \geq 0$ . Решение задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > l + vt, \quad t > 0; \tag{53}$$

$$T(x, 0) = 0, \quad x \geq l; \tag{54}$$

$$(\beta_1 \partial T / \partial x + \beta_2 T)_{x=l+v\tau} = \beta_3 \varphi(t), \quad t \geq 0; \tag{55}$$

$$|T(x, t)| < +\infty, \quad x \geq l + vt, \quad t \geq 0, \tag{55}$$

записывается в виде обобщенного теплового потенциала простого слоя по кривой  $x = l + vt$

$$T(x, t) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi(\tau)}{\sqrt{(t - \tau)}} \exp\left[-\frac{(x - l - v\tau)^2}{4a(t - \tau)}\right] d\tau. \tag{56}$$

Здесь  $\Psi(t)$  – неизвестная плотность потенциала, подлежащая нахождению из граничного условия (54). В пространстве изображений по Лапласу  $\bar{T}(x, p) = \int_0^\infty T(x, t) \exp(-pt) dt$ ,  $\text{Re } p \geq \beta > 0$ ,

$|\arg p| < \frac{\pi}{2}$  выражение (56) принимает вид

$$\bar{T}(x, p) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} \exp[-(x - l)\sqrt{p/a}] \bar{\Psi}(p - v\sqrt{p/a}).$$

Отсюда следует, что неизвестную плотность следует искать относительно вида  $\bar{\Psi}(p - v\sqrt{p/a})$ . Конечное операционное (базовое) решение задачи (53)–(55) имеет вид

$$\bar{T}(x, p) = \bar{\Theta}(p) \left(1 - \frac{v/(2a)}{\sqrt{p/a}}\right) \times \exp[-(x - l)\sqrt{p/a}] \bar{\varphi}(p - v\sqrt{p/a}), \tag{57}$$

$$\text{где } \bar{\Theta}(p) = \begin{cases} 1 & (\beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1) \text{ для 1-й краевой задачи;} \\ -1/\sqrt{p/a} & (\beta_2 = 0, \beta_1 = \beta_3 = 1) \text{ для 2-й краевой задачи;} \\ h/(h + \sqrt{p/a}) & (\beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = -h) \text{ для 3-й краевой задачи.} \end{cases}$$

Выражение (57) включает в себя многочислен- ные частные случаи граничной функции  $\varphi(t)$  в (54), представляющие практический интерес: од- нородные, импульсные, пульсирующие, перио- дические и т.д. Переход к оригиналам происходит по известным правилам операционного исчисле- ния и приводит к аналитическим решениям весь- ма компактного вида. Так,

для первой краевой задачи  $(T(x,t)|_{x=l+vt} = \varphi(t))$

$$T(x,t) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x - (l + vt)}{(t - \tau)^{3/2}} \varphi(\tau) \times \\ \times \exp\left[-\frac{(x - l - v\tau)^2}{4a(t - \tau)}\right] d\tau;$$

для второй краевой задачи  $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=l+vt} = \varphi(t)\right)$

$$T(x,t) = \frac{v}{a} \int_0^t \varphi(\tau) \Phi^* \left(-\frac{x - l - v\tau}{2\sqrt{a(t - \tau)}}\right) d\tau - \\ - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \exp\left[-\frac{(x - l - v\tau)^2}{4a(t - \tau)}\right] d\tau;$$

для третьей краевой задачи  $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=l+vt} = \right. = \\ \left. = h(T|_{x=l+vt} - \varphi(t))\right)$

$$T(x,t) = \frac{h\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \exp\left[-\frac{(x - l - v\tau)^2}{4a(t - \tau)}\right] d\tau - \\ - ah\left(h + \frac{v}{a}\right) \int_0^t \varphi(\tau) \Phi^* \times \\ \times \left(-\frac{x - l - v\tau}{2\sqrt{a(t - \tau)}} + h\sqrt{a(t - \tau)}\right) \times \\ \times \exp\left[-(x - l - v\tau)h + ah^2(t - \tau)\right] d\tau,$$

где  $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$ .

Все рассуждения сохраняются и при наличии в (53) однородного нестационарного источника  $f(t)$ . В этом случае справа в (56) появляется слагаемое  $\int_0^t f(\tau) d\tau$ , незначительно усложняющее выкладки.

### ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ЧАСТИЧНО ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Наиболее сложный случай – нахождение аналити- ческого решения задачи в  $\bar{\Theta}_t = \{x \in [l + vt, \infty), t \geq 0\}$  при наличии в исходной постановке неоднородных и нестационарных краевых функций:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x > l + vt, \quad t > 0; \quad (58)$$

$$T(x,t)|_{t=0} = \Phi_0(x), \quad x \geq l; \quad (59)$$

$$\left(\beta_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_2 T\right)\Big|_{x=l+vt} = \beta_3 \varphi(t), \quad t > 0; \quad (60)$$

$$|T(x,t)| < +\infty, \quad x \geq l + vt, \quad t \geq 0. \quad (61)$$

Здесь  $f(x,t) \in C^0(\bar{\Omega}_t)$ ,  $\Phi_0(x) \in C^1(\bar{\Omega}_t)$ ,  $\varphi(t) \in C^0[0; +\infty)$  – искомое решение  $T(x,t) \in C^2(\Omega_t) \cap C^0(\bar{\Omega}_t)$ ;  $\text{grad}_x T(x,t) \in C^0(\bar{\Omega}_t)$ . В этом случае целесообразно записать интегральное представление решения задачи через функцию Грина  $G(x,t,x',\tau)$ . Выражение (57) позволяет это сделать с минимальными выкладками. Рассмотрим последнее подробно.

Согласно (47)–(49), функция Грина для крае- вой задачи (58)–(61) находится из условий

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad x > l + vt, \quad t > \tau; \\ G(x,t,x',\tau)\Big|_{t=\tau} = \delta(x - x'), \\ x > l + v\tau, \quad x' > l + v\tau; \quad (62)$$

$$\left(\beta_1 \frac{\partial G}{\partial x} + \beta_2 G\right)\Big|_{x=l+vt} = 0, \quad t > \tau;$$

$$|G(x,t,x',\tau)| < +\infty, \quad x \geq l + vt, \quad t \geq \tau;$$

где  $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$  в случае первой краевой зада- чи;  $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$  – второй краевой задачи;  $\beta_1 = 1, \beta_2 = -h$  – третьей краевой задачи. Найдем  $G$  для третьей краевой задачи, так как остальные случаи вытекают из последнего. Согласно (17), функцию Грина нужно искать в виде суммы фун-

даментального решения уравнения (62) и регулярной составляющей

$$G(x, t, x', \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t-\tau)}} \times \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a(t-\tau)}\right] + q(x, t, x', \tau). \quad (63)$$

В случае третьей краевой задачи, согласно (63), имеем для функции  $q(x, t', x', \tau)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t'} &= a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad x > l_0 + vt', \quad t' > 0; \\ q(x, t', x', \tau)|_{t'=0} &= 0, \quad x > l_0; \\ \frac{\partial q}{\partial x}|_{x=l_0+vt'} &= h \left\{ q|_{x=l_0+vt'} - \frac{(x'-l_0) - (v+2ah)t'}{4h\sqrt{\pi}(at')^{3/2}} \times \right. \\ &\times \exp\left[-\frac{(l_0+vt'-x')^2}{4at'}\right] \left. \right\}, \quad t' > 0; \\ |q(x, t', x', \tau)| &< +\infty, \quad x > l_0 + vt', \quad t' \geq 0, \end{aligned} \quad (64)$$

где  $l_0 = l + v\tau$ ,  $t' = t - \tau$ . Теперь в соответствии с подходом (57) в граничном условии (64) выделяется функция

$$\varphi(t') = \frac{(x'-l_0) - (v+2ah)t'}{4h\sqrt{\pi}(at')^{3/2}} \exp\left[-\frac{(l_0+vt'-x')^2}{4at'}\right],$$

находится ее изображение в виде, указанном в (57):

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}\left(p - \frac{v}{\sqrt{a}}\sqrt{p}\right) &= \frac{\sqrt{p} - \left(\frac{v}{\sqrt{a}} + h\sqrt{a}\right)}{2ah\left(\sqrt{p} - \frac{v}{2\sqrt{a}}\right)} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{x'-l_0}{\sqrt{a}}\sqrt{p} + \frac{v}{a}(x'-l_0)\right], \end{aligned}$$

и выполняется переход с помощью (57) к изображению для  $\bar{q}(x, p, x', \tau)$

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{\sqrt{p} - \left(\frac{v}{\sqrt{a}} + h\sqrt{a}\right)}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p} + h\sqrt{a}\right)} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{x+x'-2l_0}{\sqrt{a}}\sqrt{p} + \frac{v}{a}(x'-l_0)\right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Обращаясь в (65) к оригиналам и учитывая (63), находим функцию Грина для третьей краевой задачи в области  $x > l + vt, t > 0$ :

$$\begin{aligned} G(x, t, x', \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t-\tau)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a(t-\tau)}\right] + \right. \\ &+ \exp\left[-\frac{(x+x'-2(l+v\tau))^2}{4a(t-\tau)} + \frac{v}{a}(x'-(l+v\tau))\right] \left. \right\} - \\ &- \left(h + \frac{v}{2a}\right) \exp\left\{[x+x'-2(l+v\tau)h] + \right. \\ &+ ah^2(t-\tau) + \frac{v}{a}[x'-(l+v\tau)] \left. \right\} \times \\ &\times \Phi^*\left(\frac{x+x'-2(l+v\tau)}{2\sqrt{a(t-\tau)}} + h\sqrt{a(t-\tau)}\right). \end{aligned}$$

Полагая в (65)  $h = 0$ , находим функцию Грина для второй краевой задачи

$$\begin{aligned} G(x, t, x', \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t-\tau)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a(t-\tau)}\right] + \right. \\ &+ \exp\left[-\frac{(x+x'-2(l+v\tau))^2}{4a(t-\tau)} + \frac{v}{a}(x'-(l+v\tau))\right] \left. \right\} - \\ &- \frac{v}{2a} \exp\left[\frac{v}{a}(x'-(l+v\tau))\right] \Phi^*\left(\frac{x+x'-2(l+v\tau)}{2\sqrt{a(t-\tau)}}\right). \end{aligned}$$

Предельный переход при  $(1/h) \rightarrow 0$  в (65) приводит к функции Грина для первой краевой задачи:

$$\begin{aligned} G(x, t, x', \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t-\tau)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a(t-\tau)}\right] - \right. \\ &- \exp\left[-\frac{(x+x'-2(l+v\tau))^2}{4a(t-\tau)} + \frac{v}{a}(x'-(l+v\tau))\right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Интегральная запись аналитического решения задачи (58)–(62), согласно (8), имеет вид

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \int_l^\infty \Phi_0(x') G(x, t, x', 0) dx' + \\ &+ a \int_0^t \left( \gamma_1 \frac{\partial G}{\partial x'} - \gamma_2 G \right)_{x'=l+v\tau} \varphi(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{l+v\tau}^\infty f(x', \tau) G(x, t, x', \tau) d\tau dx', \end{aligned} \quad (66)$$

где  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$  в случае первой краевой задачи;  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$  – второй краевой задачи;  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = -h$  – третьей краевой задачи. Движущиеся границы вызывают эффекты, которые проявляются при графическом изображении температурных функций. С этой целью в (58)–(61) рассмотрим первую краевую задачу ( $\beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1$ ) при  $f(x, t) = f(t), \Phi_0(x) = T_0$ .

В безразмерных переменных

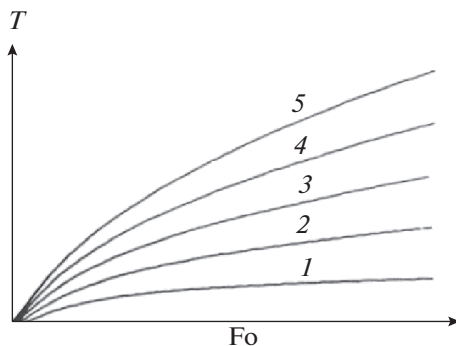
$$z = \frac{x}{l}; \quad Fo = \frac{at}{l^2}; \quad Pe = \frac{vl}{a}; \quad \varphi(Fo) = \frac{\varphi(t)}{T_0};$$

$$q(Fo) = \frac{f(t)l^2}{ac\rho}; \quad W(z, Fo) = \frac{T(x, t)}{T_0},$$

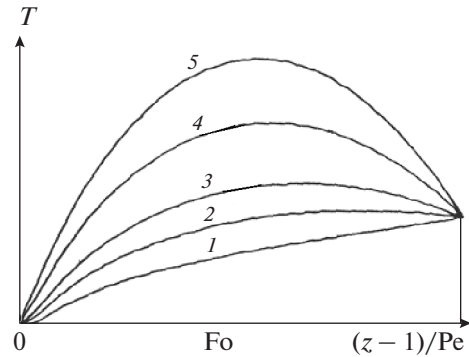
решение такой задачи при  $\varphi(Fo) = \varphi_0 = \text{const}$ ,  $q(Fo) = q_0 = \text{const}$  на основании (66) имеет следующий вид:

$$W(z, Fo) = \frac{\varphi_0}{2} \left\{ \Phi^* \left( \frac{z-1}{2\sqrt{Fo}} \right) + \exp[-Pe(z-1 - Pe\sqrt{Fo})] \times \Phi^* \left( \frac{z-1}{2\sqrt{Fo}} - Pe\sqrt{Fo} \right) \right\} - \frac{q_0(z-1)}{2\sqrt{Pe}} \Phi^* \left( \frac{z-1}{2\sqrt{Fo}} \right) + \frac{q_0(z-1 - 2PeFo)}{2Pe} \times \exp[-Pe(z-1 - PeFo)] \times \Phi^* \left( \frac{z-1}{2\sqrt{Fo}} - Pe\sqrt{Fo} \right) + q_0Fo. \quad (67)$$

На рис. 1 приведены построенные по соотношению (67) зависимости  $T(z, Fo)$  от  $Fo$  в сечении  $z = 2$  при  $Pe = 0$ ,  $\varphi_0 = 1$  и различных значениях  $q_0$ . Характер кривых на рисунке является типичным для теплообмена в области  $z > 1$  с внутренним однородным источником теплоты. Однако с появлением движения границы ситуация резко меняется, что отражено на рис. 2, построенном также по соотношению (67) при тех же условиях. При  $z > 1 + PeFo$  для сечения  $z = \text{const}$  имеем  $0 < Fo < (z-1)/Pe$  и при  $z = 2$  в интервале  $Fo \in (0, 1/Pe)$  существует момент времени, при котором температура достигает максимального значения. Последнее обстоятельство имеет важное прикладное значение в термомеханике при изучении теплового удара [8],



**Рис. 1.** Зависимости температурной функции  $T(z, Fo)$  от безразмерного времени  $Fo$  в случае нагрева с постоянной температурой на границе и источником теплоты постоянной мощности в сечении  $z = 2$  при  $\varphi_0 = 1$ ,  $Pe = 0$  и различных значениях мощности источника: 1 –  $q_0 = 0$ , 2 – 0.5, 3 – 1, 4 – 2, 5 – 3.



**Рис. 2.** Зависимости температурной функции  $T(z, Fo)$  от безразмерного времени  $Fo$  в случае нагрева с постоянной температурой на границе и источником теплоты постоянной мощности в сечении  $z = 2$  при  $\varphi_0 = 1$ ,  $Pe = 0.35$  и различных значениях мощности источника: 1 –  $q_0 = 0$ , 2 – 0.5, 3 – 1, 4 – 2, 5 – 3.

приводящего к разрывам сплошности во внутренних слоях твердого тела.

Метод тепловых потенциалов можно эффективно использовать при нахождении аналитических решений сравнительно новых задач теплопроводности с интегральным граничным условием, встречающихся при моделировании ряда процессов экологии, биологии, физики плазмы, термомеханики [1]. Здесь могут быть получены результаты, представляющие существенный интерес. Например, решение задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > 2\sqrt{ay}(t), \quad t > 0;$$

$$T(x, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad (68)$$

$$|T(x, t)| < +\infty, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0;$$

$$\int_{2\sqrt{ay}(t)}^{\infty} T(x, t) dx = 2\sqrt{ay}(t), \quad (69)$$

где  $y(t)$  – известная функция времени, следует записать в виде теплового потенциала

$$T(x, t) = \int_0^t \frac{\Psi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp \left\{ -\frac{[x - 2\sqrt{ay}(\tau)]^2}{4a(t-\tau)} \right\} d\tau.$$

Неизвестная плотность  $\Psi(\tau)$  данного потенциала находится из граничного условия (69), что приводит к уравнению

$$\int_0^1 \Psi(z\tau) \left[ 1 - \Phi \left( \frac{y(t) - y(zt)}{\sqrt{t(1-z)}} \right) \right] dz = 2y(t)/\sqrt{\pi t}. \quad (70)$$

Пусть в (68)  $y(t) = \beta t$ . Операционное решение интегрального уравнения (70) имеет вид

$$\Psi(t) = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \left[ 1 + \beta^2 t + \left( \beta^2 t + \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \Phi(\beta\sqrt{t}) \frac{\beta\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \exp(-\beta^2 t) \right].$$

Пусть  $y(t) = \beta\sqrt{t}$ , тогда уравнение (70) имеет решение

$$\Psi(t) = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi\gamma t}}; \quad \gamma = [1 + \Phi(\beta)] \times \\ \times [1 - \sqrt{\pi}\beta \exp(\beta^2) \Phi^*(\beta)].$$

**КОРНЕВАЯ ЗАВИСИМОСТЬ**

Как отмечалось выше, искусственные приемы, подстановки, преобразования могут в ряде случаев оказаться весьма эффективными при нахождении аналитических решений уравнений параболического типа в нецилиндрических областях. Рассмотрим один из таких приемов для области с границей, движущейся по корневой зависимости:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > \gamma\sqrt{2at}, \quad t > 0, \quad (71)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad (72)$$

$$T(x, t) \Big|_{x=\gamma\sqrt{2at}} = \varphi(t), \quad t > 0, \quad (73)$$

$$|T(x, t)| < \infty, \quad x \geq \gamma\sqrt{2at}, \quad t \geq 0. \quad (74)$$

Вместо независимой переменной  $x$  вводится новая переменная  $\xi = i(x/\sqrt{2at})$  ( $i$  – мнимая единица), а вместо функции  $T(x, t)$  – последовательно новые функции  $\Theta$  ( $\xi, t) \equiv T(x, t)$ ,  $W(\xi, t) = \exp(-\xi^2/4)\Theta(\xi, t)$ . Тогда задача (71)–(74) принимает вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + (1/2 - \xi^2/4)W + 2t \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad (75)$$

$$\xi > i\gamma, \quad t > 0,$$

$$W(\xi, 0) = 0, \quad \xi \geq i\gamma, \quad (76)$$

$$W(\xi, t) \Big|_{\xi=i\gamma} = \exp(\gamma^2/4)\varphi(t), \quad t > 0, \quad (77)$$

$$|W(\xi, t)| < \infty, \quad \xi \geq i\gamma, \quad t \geq 0.$$

Пусть граничная функция  $\varphi(t)$  раскладывается в ряд вида  $\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{k/m} t^{k/m}$ , где  $m$  – произвольное число. Решение преобразованной задачи нужно искать в виде функционального ряда того же вида, но с неизвестными коэффициентами:

$$W(\xi, t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} M_{k/m} t^{k/m}.$$

Уравнение (75) с условиями (76), (77) приводит к уравнению Вебера для функций параболического цилиндра  $D_p(z)$ :

$$d^2 M_{k/m} / d\xi^2 + (2k/m + 1/2 - \xi^2/4) M_{k/m} = 0, \\ \xi > i\gamma, \quad M_{k/m}(i\gamma) = \exp(\gamma^2/4) c_{k/m}, \\ |M_{k/m}(\xi)| < \infty, \quad \xi \geq i\gamma,$$

откуда находим  $M_{k/m}(\xi) = c_{k/m} \exp(\gamma^2/4) \times D_{-2k/m-1}(-i\xi) / D_{-2k/m-1}(\gamma)$ . Искомое решение в системе координат  $(x, t)$  будет иметь вид

$$T(x, t) = \exp\left(-\frac{x^2}{8at} + \gamma^2/4\right) \times \\ \times \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{k/m} \frac{D_{-2k/m-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)}{D_{-2k/m-1}(\gamma)}. \quad (78)$$

Выражение (78) включает ряд частных случаев, известных в литературе. Например, пусть  $\varphi(t) = T_0 = \text{const}$ , тогда можно воспользоваться полученным специально для этого случая преобразованием

$$D_{-2s-1}(z) = 2^s \sqrt{\pi/2} \exp(z^2/4) i^{2s} \Phi^*(z/\sqrt{2}), \quad (79)$$

где  $i^{2s} \Phi^*(z) = \int_z^\infty i^{2s-1}(y) dy$ ,  $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$ ,  $\Phi(z)$  – функция Лапласа.

Следует заметить, что соотношение (79) может представлять интерес для теории специальных функций. Решение (78) приводится к виду

$$T(x, t) / T_0 = \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) / \Phi^*(\gamma/\sqrt{2}),$$

полученному в [8]. Если  $\varphi(t) = T_0 t$ , то аналогично можно найти известное решение [2]

$$\frac{T(x, t)}{T_0} = \\ = \frac{\sqrt{\pi/2} \left(1 - \frac{x^2}{2at}\right) \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \frac{x}{\sqrt{2at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)}{(1 - \gamma^2) \sqrt{\pi/2} \Phi^*(\gamma/\sqrt{2}) - \gamma \exp(-\gamma^2/4)}.$$

Изложенный прием дает возможность получить более значимый результат, а именно функцию Грина первой краевой задачи для уравнения (71). Опуская длительные выкладки, приведем конечный результат

Значения нецелых корней уравнения  $D_{-p-1}(z) = 0$

$p_n$ при $z = 0.5$	$p_n$ при $z = 1/\sqrt{2}$
-2.4486867	-2.6643553
-4.6490658	-4.9479469
-6.7988093	-7.1597082
-8.9235111	-9.3360379
-11.0326029	-11.4902931
-13.1307779	-13.6291133
-15.2207688	-15.7563625
-17.3043307	-17.8745224
-19.3826696	-19.9852978
-21.4566563	-22.0899199

$$G(x, t, x', \tau) = -\frac{e^{\frac{1}{8a} \left( \frac{x'^2}{\tau} - \frac{x^2}{t} \right)}}{2\sqrt{a\pi\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(p_n + 1) \times$$

$$\times \frac{D_{-p_n-1} \left( -\frac{\beta}{\sqrt{2a}} \right)}{\frac{\partial}{\partial p} \left[ D_{-p-1} \left( \frac{\beta}{\sqrt{2a}} \right) \right]_{p=p_n}} D_{-p_n-1} \left( \frac{x'}{\sqrt{2a\tau}} \right) D_{-p_n-1} \left( \frac{x}{\sqrt{2at}} \right) \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{p_n}{2}},$$

где  $p_n$  — нецелые корни уравнения  $D_{-p_n-1} \left( -\frac{\beta}{\sqrt{2a}} \right) = 0$ .

В таблице приводятся полученные численными методами нецелые корни уравнения  $D_{-p-1}(z) = 0$  при различных фиксированных значениях аргумента  $z$  функции параболического цилиндра.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на кажущуюся простоту математических моделей нестационарного теплопереноса в областях с движущимися во времени границами, приведенные задачи являются далеко не тривиальными для получения их точного аналитического решения. Практически изучены простейшие случаи для линейного, параболического (корневого), квадратичного законов движения границы, хотя и для этих случаев (в декартовой системе координат) аналитическая теория теплопроводности находится лишь в начале своего развития. Что касается более сложных законов движения границы как в декартовой, так и в цилиндрической (радиальный поток) и сферической (центральная симметрия) системах координат, то в [1] намечены лишь возможные пути изучения теплопереноса в такого рода областях, и предстоит большая работа по нахождению аналитических решений соответствующих задач теплопроводности, изучению свойств этих решений и

построению температурных номограмм. Как показывает анализ литературных источников в [1], при решении такого рода задач возникает большой круг проблем вычислительной математики, теории специальных функций, методов математической физики. Ситуация еще более усложняется при переносе движения границ на краевые задачи нестационарной теплопроводности для уравнений гиперболического типа на основе гипотезы А.В. Лыкова о конечной скорости распространения тепла [9–11], на деформируемые среды с учетом эффекта связанности поля температуры и деформаций в уравнении теплопроводности [12], на задачи напыления высокотемпературного теплозащитного покрытия [13] и др. Указанные случаи представляют собой практически не разработанную область аналитической теории теплопроводности твердых тел.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карташов Э.М.* Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами (Обзор, посвященный 275-летию АН СССР) // ИФЖ. 2001. Т. 74. № 2. С. 171.
2. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
3. *Лыков А.В.* Некоторые аналитические методы решения задач нестационарной теплопроводности (Обзор) // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1969. № 2. С. 3.
4. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. 560 с.
5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
6. *Масленникова В.Н.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Изд-во РУДН, 1997. 446 с.
7. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
8. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012. 656 с.
9. *Лыков А.В.* Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // ИФЖ. 1965. Т. 9. № 3. С. 287.
10. *Карташов Э.М.* Оригиналы операционных изображений для обобщенных задач нестационарной теплопроводности // Тонкие химические технологии. 2019. Т. 14. № 24. С. 77.
11. *Формалев В.Ф.* Уравнения математической физики. М.: URSS, 2020. 646 с.
12. *Колпациков В.А., Яновский С.Ю.* Связанная динамическая задача термоупругости для полупространства с учетом тепловой памяти // ИФЖ. 1979. Т. 36. № 6. С. 1093.
13. *Формалев В.Ф., Дегтяренко Р.А., Гарибян Б.А., Колесник С.А.* Моделирование тепломассопереноса при периодическом напылении высокотемпературного теплозащитного покрытия // ТВТ. 2021. Т. 59. № 4. С. 566.