

УДК 536.21

ВОЛНОВОЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

© 2022 г. В. Ф. Формалев*, С. А. Колесник**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*E-mail: formalev38@yandex.ru

**E-mail: sergey@oviont.com

Поступило в редакцию 31.05.2022 г.

После доработки 16.06.2022 г.

Принято к публикации 13.10.2022 г.

Исследуется теплоперенос в полубесконечной прямой, теплопроводность которой экспоненциально зависит от температуры. Введение автомодельной подстановки сводит задачу теплопроводности к задаче нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Ее решение показало волновой характер распространения теплоты в виде бегущих тепловых волн. Решение дает предельное время, при превышении которого тепловой поток “запирается” на определенном расстоянии от границы тела, несмотря на то что температура или тепловой поток на границе могут возрастать до бесконечности. Получена предельная глубина прогрева, при превышении которой расчетная область остается холодной (с начальной температурой).

DOI: 10.31857/S0040364422050039

ВВЕДЕНИЕ

Волновые явления теплопроводности характеризуют конечную скорость распространения теплоты вследствие следующих факторов: термодинамической неравновесности из-за отставания тепловых потоков от градиентов температуры на время релаксации [1–6], периодического нагрева изолированными тепловыми импульсами (тепловыми солитонами) [7, 8], зависимостью от температуры теплофизических характеристик (ТФХ) материалов расчетной области [9–12].

На фронтах тепловых волн наблюдаются разрывы температур, или тепловых потоков, или производных температурного распределения по пространственным переменным первого и выше первого порядков.

Так, при волновом теплопереносе за счет нелинейности ТФХ на фронтах тепловых волн наблюдается непрерывность температур и тепловых потоков, но градиенты температур и более старшие производные температур по пространственным переменным претерпевают разрывы первого рода [10].

В случае наличия релаксационных явлений температурные профили и тепловые потоки претерпевают разрывы первого рода на подвижных фронтах, причем амплитуды разрывов при продвижении в глубь расчетной области уменьшаются за счет диссипации тепловой энергии [5, 6].

В данной работе поставлена и аналитически решена задача о нагреве полубесконечной прямой, материал которой имеет нелинейную теплопроводность в виде экспоненциальной зависимости от температуры. Следствием такой зависимости теплопроводности от температуры является предельная глубина прогрева за ограниченное время, несмотря на неограниченный рост температуры или теплового потока на границе тела [9], что можно использовать для блокировки тепловых потоков в тепловой защите высокоскоростных летательных аппаратов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматривается следующая задача теплопереноса в полубесконечной прямой:

$$\text{ср} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda_0 T(x, t) \exp(-kT(x, t))) \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (1)$$

$$0 < x < \infty, \quad t > 0;$$

$$T(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad t = 0; \quad (2)$$

$$T(0, t) = \varphi(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \quad (3)$$

$$T(\infty, t) = 0, \quad \partial T(\infty, t) / \partial x = 0, \quad (4)$$

где λ_0 — теплопроводность при некоторой фиксированной температуре с размерностью в Вт/(м К²), c — теплоемкость, ρ — плотность, t — время, T — температура, k — коэффициент в 1/К.

Из выражения (1) ясно, что теплопроводность является существенно нелинейной функцией температуры

$$\lambda(T) = \lambda_0 T(x, t) \exp(-kT(x, t)),$$

значительно зависящей от коэффициента k .

Такая зависимость теплопроводности от температуры обнаружена в оксиде кобальта [13] и стехиометрической смеси германия и кремния $\text{Si}_c\text{Ge}_{1-c}$ с объемной долей кремния, равной c [14].

Для решения задачи (1)–(4) строим частное автомодельное решение, введя пространственно-временную переменную типа бегущей волны:

$$T(x, t) = f(\xi), \quad \xi = x - \alpha t, \quad (5)$$

где α – скорость возмущений в бегущей волне.

Подставляя (5) в (1)–(4) и учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}(-\alpha); \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi},$$

получаем

$$-\alpha \frac{df}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(a_0 f(\xi) e^{-kf(\xi)} \frac{df}{d\xi} \right), \quad (6)$$

где $a_0 = \lambda_0 / (c\rho)$ – температуропроводность при некоторой постоянной температуре в $\text{м}^2/(\text{с К})$; объемная теплоемкость $c\rho$ принимается постоянной.

Вычислив неопределенные интегралы от левой и правой частей равенства (6), приходим к равенству

$$-f(\xi)\alpha = a_0 f(\xi) e^{-kf(\xi)} \frac{df}{d\xi} + C_1. \quad (7)$$

Из начального условия (2) следует, что при $t = 0$ и $0 \leq x < \infty$ $\xi|_{t=0} = x - \alpha t = 0$, $f(0) \equiv 0$ и $df(0)/d\xi = 0$, т.е. $C_1 = 0$. Тогда из (7) следует равенство

$$e^{-kf(\xi)} \frac{df}{d\xi} = -\frac{\alpha}{a_0}. \quad (8)$$

Интегрируя (8) по ξ от $\xi = 0$ до ξ и учитывая, что

$$\int_0^\xi e^{-kf(\xi)} \frac{df}{d\xi} d\xi = \int_0^{f(\xi)} e^{-kf(\xi)} df(\xi) = -\frac{1}{k} [e^{-kf(\xi)} - 1],$$

получаем

$$-\frac{1}{k} (e^{-kf(\xi)} - 1) = -\frac{\alpha}{a_0} \xi,$$

или, используя подстановку (5), выражение

$$-kf(\xi) = \ln \left[1 + \frac{k\alpha}{a_0} (x - \alpha t) \right], \quad (9)$$

из которого в соответствии с (5) находим

$$T(x, t) = -\frac{1}{k} \ln \left[1 - \frac{k\alpha}{a_0} (\alpha t - x) \right]. \quad (10)$$

Из равенства (10) следует, что подлогарифмическое выражение внутри квадратных скобок должно быть больше нуля и меньше единицы, т.е. значение логарифма должно быть отрицательным. Отсюда же следует, что при $\alpha t - x < 0$ значения $T(x, t)$ отрицательны, что неприемлемо. Поэтому $\alpha t - x \geq 0$, т.е. $\xi = x - \alpha t \leq 0$.

Решению (10) должна удовлетворять следующая функция $\varphi(t)$ в граничном условии (3) при $x = 0$:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{k\alpha^2}{a_0} t \right),$$

т.е.

$$T(0, t) = -\frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{k\alpha^2}{a_0} t \right). \quad (11)$$

Из выражения (11) следует, что при максимальном значении времени, равном

$$t_{\max} = \frac{a_0}{k\alpha^2}, \quad (12)$$

граничное значение температуры $T(0, t)$ должно стремиться к бесконечности.

С другой стороны, при $\alpha t - x = 0$ из (9) следует равенство

$$T(x, t) = 0.$$

Поэтому при $\alpha t_{\max} - x_{\max} = 0$, используя равенство (12), получаем

$$x_{\max} = \alpha \frac{a_0}{k\alpha^2} = \frac{a_0}{k\alpha}.$$

Вводя обозначение $x_{\max} = l$, находим максимальную глубину прогрева l , когда $t \rightarrow t_{\max} = \frac{a_0}{k\alpha^2}$, а граничное значение температуры $T(0, t)$ при этом стремится к бесконечности

$$x_{\max} = l = \frac{a_0}{k\alpha}$$

и

$$T(0, t)|_{t \rightarrow t_{\max}} \rightarrow \frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{k\alpha^2}{a_0} t_{\max} \right).$$

Итак, получено следующее решение задачи (1)–(4):

$$T(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{k} \ln \left[1 - \frac{k\alpha}{a_0} (\alpha t - x) \right], & 0 \leq x \leq \alpha t \leq \alpha t_{\max} = \frac{a_0}{k\alpha} = l; \\ 0, & x > a_0/k\alpha. \end{cases} \quad (13)$$

Из (13) следует, что, несмотря на то что на границе $x = 0$ значение $T(0, t)$ возрастает неограниченно при $t \rightarrow t_{\max} - \varepsilon$, где ε – бесконечно малое время, температурные возмущения проникают лишь на ограниченную глубину $l = \alpha t_{\max} = \alpha \frac{a_0}{k\alpha^2} = \frac{a_0}{k\alpha}$.

Таким образом, из выражения (13) следует волновой характер распределения температур в средах с нелинейной зависимостью ТФХ от температуры с фронтами $x_{\phi} = \alpha t$.

Из выражения (13) следует также, что при $T(x, t) = 0$ имеет место непрерывность температур $T(x - \varepsilon, t) = T(x + \varepsilon, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и разрыв производной $\frac{\partial T(x - \varepsilon, t)}{\partial x} < 0, \frac{\partial T(x + \varepsilon, t)}{\partial x} = 0$, так как $T(x, t) \equiv 0$ при $x > \alpha t$. Тепловой же поток $\lambda_0 T(x, t) e^{-kT(x, t)} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\alpha t} = 0$ и, следовательно, непрерывен в точках фронта $x_{\phi} = \alpha t$.

На рис. 1 и 2 приведены результаты расчетов температурных полей в полубесконечной прямой при следующих входных данных: $k = 10^{-3}$ 1/К (рис. 1) и $k = 2 \times 10^{-3}$ (рис. 2), $\alpha = 10^{-3} \frac{м}{с}$, $a_0 = 10^{-6} \frac{м^2}{с \cdot К}$.

Видны предельные зависимости температур от пространственной переменной x (жирные кривые), ограничивающие прогрев по пространственной переменной в момент времени $t = t_{\max}$, хотя граничное значение температуры беспредельно возрастает, т.е. имеет место “запирание” тепловых потоков и температурных полей. При этом максимальное значение пространственной переменной, после которого температура становится равной начальной температуре, равно значению $x_{\max} = l = a_0/(k\alpha)$.

Рисунки показывают существенную зависимость температурного поля от коэффициента k . Так, при $k = 10^{-3}$ 1/К максимальное значение температуры в точке $x = 0.1$ м составляет $T_{\max} = 2300$ К, а при $k = 2 \times 10^{-3}$ $T_{\max} = 800$, т.е. с ростом k температура падает.

Таким образом, материалы с теплопроводностью в форме (5) можно использовать в качестве тепловой защиты перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов планирующего типа, функционирующих длительное время в плотных слоях атмосферы. Подобные подходы можно также использовать при исследовании термостойкости композиционных материалов на основе керамики [15–20].

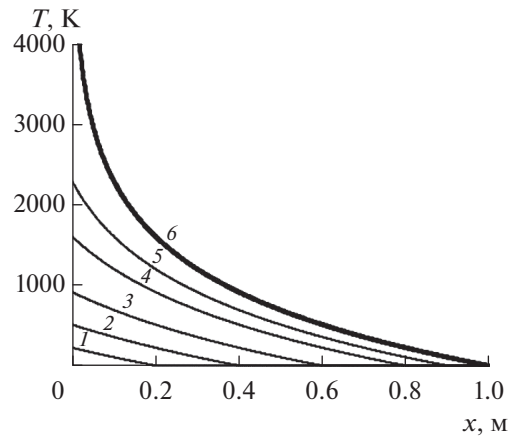


Рис. 1. Распределения температур по пространственной переменной для $k = 10^{-3}$ 1/К: 1 – $t = 200$ с, 2 – 400, 3 – 600, 4 – 800, 5 – 900, 6 – 1000.

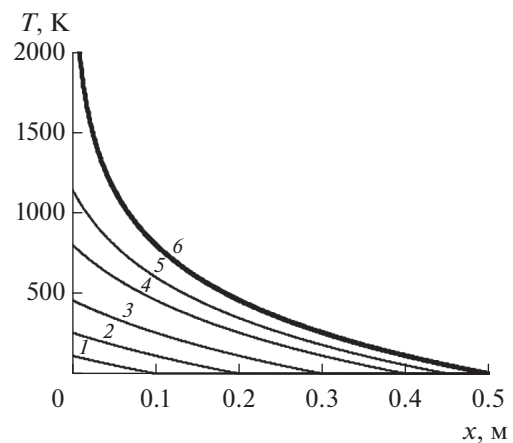


Рис. 2. Распределения температур по пространственной переменной при $k = 2 \times 10^{-3}$ 1/К: 1 – $t = 100$ с, 2 – 200, 3 – 300, 4 – 400, 5 – 450, 6 – 500.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставлена и аналитически решена задача о теплопереносе в нелинейной полубесконечной прямой с нелинейной зависимостью теплопроводности от температуры экспоненциального вида. Полученное решение типа бегущей волны характеризует волновой теплоперенос, возникающий вследствие специального вида зависимости теплопроводности от температуры.

Несмотря на то, что граничное значение температуры стремится к бесконечности при некотором ограниченном значении времени, температурные возмущения проникают на ограниченную глубину с предельным температурным профилем по пространству. Возникает процесс “запирания” тепловых потоков предельной зависимостью температуры от пространственной переменной при

предельном времени прогрева. После предельного профиля температуры с ярко выраженным фронтом тепловой волны, на котором непрерывны температуры и тепловые потоки, устанавливается начальное значение температуры.

Материалы с экспоненциальной зависимостью теплопроводности от температуры можно рекомендовать для тепловой защиты перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов с длительным временем полета в плотных слоях атмосферы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант РНФ № 22-19-00420).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // УФН. 1991. Т. 161. № 3. С. 5.
2. *Карташов Э.М.* Аналитические решения гиперболических моделей переноса // ИФЖ. 2014. Т. 87. № 5. С. 1072.
3. *Карташов Э.М.* Математические модели теплопроводности с двухфазным запаздыванием // ИФЖ. 2016. Т. 89. № 2. С. 338.
4. *Шашков А.Г., Бубнов А.В., Яновский С.Ю.* Волновые явления теплопроводности. М.: URSS, 2004. 216 с.
5. *Формалев В.Ф.* О тепловых ударных волнах в нелинейных средах // ТВТ. 2012. Т. 50. № 6. С. 799.
6. *Формалев В.Ф., Карташов Э.М., Колесник С.А.* Волновой теплоперенос в анизотропном полупространстве под действием точечного источника теплоты экспоненциального характера на основе волнового уравнения параболического типа // ИФЖ. 2022. Т. 95. № 2. С. 373.
7. *Формалев В.Ф., Колесник С.А.* О тепловых солитонах при волновом теплопереносе в ограниченных областях // ТВТ. 2019. Т. 57. № 4. С. 543.
8. *Формалев В.Ф., Карташов Э.М., Колесник С.А.* О динамике движения и отражения температурных солитонов при волновом теплопереносе // ИФЖ. 2020. Т. 93. № 1. С. 11.
9. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов В.А., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
10. *Формалев В.Ф., Рабинский Л.Н.* Волновой теплоперенос в анизотропном пространстве с нелинейными характеристиками // ТВТ. 2014. Т. 52. № 5. С. 704.
11. *Кузенов В.В., Рыжков С.В.* Численное моделирование взаимодействия мишени магнитно-инерциального термоядерного синтеза с плазменным и лазерным драйверами // ТВТ. 2021. Т. 59. № 4. С. 492.
12. *Ryzhkov S.V., Kuzenov V.V.* Analysis of the Ideal Gas Flow Over Body of Basic Geometrical Shape // Int. J. Heat Mass Transfer. 2019. V. 132. P. 587.
13. *Kobayashi W., Teraoka Y., Terasaki I.* An Oxide Thermal Rectifier // Appl. Phys. Lett. 2009. V. 95. № 17. 171905.
14. *Rogolino P., Cimmeli V.A.* Fitting Thermal Conductivity and Optimizing Thermoelectric Efficiency in $\text{Si}_c\text{Ge}_{1-c}$ Nanowires // Mathematics and Computers in Simulation. 2020. V. 176. P. 279.
15. *Булычев Н.А.* Получение наноразмерных материалов в плазменных разрядах и ультразвуковой кавитации // ТВТ. 2021. Т. 59. № 4. С. 600.
16. *Булычев Н.А., Иони Ю.В., Димитриева С.Е., Чеботарев С.Н., Рабинский Л.Н.* Плазмохимический синтез наноразмерных бактерицидных частиц под действием ультразвуковой кавитации // ТВТ. 2021. Т. 59. № 5. С. 770.
17. *Butusova O.A.* Surface Modification of Titanium Dioxide Microparticles under Ultrasonic Treatment // Int. J. Pharmaceutical Res. 2020. V. 12. № 4. P. 2292.
18. *Butusova O.A.* Adsorption Behaviour of Ethylhydroxyethyl Cellulose on the Surface of Microparticles of Titanium and Ferrous Oxides // Int. J. Pharmaceutical Res. 2020. V. 12. Suppl. № 2. P. 1156.
19. *Bulychev N.A.* Preparation of Stable Suspensions of ZnO Nanoparticles with Ultrasonically Assisted Low-Temperature Plasma // Nanosci. Technol.: Int. J. 2021. V. 12. № 3. P. 91.
20. *Bulychev N.A.* Study of Interaction of Surface-active Polymers with ZnO Nanoparticles Synthesized in Ultrasonically Assisted Plasma Discharge // Nanosci. Technol.: Int. J. 2022. V. 13. № 1. P. 55.