*ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 2022, том 60, № 6, с. 866–872*

*УДК 533.72;532*

# О ВЛИЯНИИ ТЕПЛООБМЕНА НА ФОТОФОРЕЗ НАГРЕТОЙ КРУПНОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ

**© 2022 г. Н. В. Малай[1], *, Е. Р. Щукин[2], **, Ю. И. Шостак[1]**

*[1]Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия*

*[2]Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия*

**E-mail: malay@bsu.edu.ru*

***E-mail: evgrom@yandex.ru*

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.
После доработки 14.03.2022 г.
Принята к публикации 07.06.2022 г.

Впервые в квазистационарном приближении Стокса при малых числах Рейнольдса и Пекле построена теория, учитывающая влияние конвективного теплообмена на фотофорез нагретой крупной аэрозольной частицы сферической формы, с использованием метода сращиваемых асимптотических разложений. При решении уравнений газовой динамики учитывался степенной вид зависимостей коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры.

**DOI:** 10.31857/S0040364422060138

## ВВЕДЕНИЕ

В термодинамически неравновесных по температуре газообразных средах возникает упорядоченное движение взвешенных в них аэрозольных частиц, обусловленное силами молекулярной природы, в частности фотофоретическое движение [1, 2]. Механизм фотофореза можно кратко описать следующим образом. При взаимодействии электромагнитного излучения с частицей внутри нее происходит выделение тепловой энергии с некоторой объемной плотностью $q_i$, которая неоднородно нагревает ее поверхность. Молекулы газа, окружающие частицу, после соударения с ее поверхностью отражаются от нагретой стороны с большим импульсом, чем от противоположной. В результате частица приобретает нескомпенсированный импульс, направленный от горячей стороны поверхности к более холодной. В зависимости от размеров и формы поверхности частицы, оптических свойств ее материала, длины волны излучения более нагретой может оказаться как освещенная, так и теневая сторона поверхности. В связи с этим наблюдается как положительный (движение частицы в направлении распространения излучения), так и отрицательный (движение в обратном направлении) фотофорез. Явление фотофореза практически всегда сопутствует термодинамически неравновесным по температуре аэродисперсным системам.

Задача о поведении поглощающей свет частицы в вязкой газообразной среде распадается, следовательно, на две взаимосвязанные части: определение распределения электромагнитной энергии в объеме частицы, основанное на теории рассеяния света, например задача Ми [3], и расчет фотофоретической силы и скорости движения частицы в неоднородно нагреваемом ею же самой окружающем газе.

Фотофоретическая сила может оказывать значительное влияние на процесс осаждения частиц в каналах тепло- и массообменников, на движение частиц в зонах просветления дисперсных систем и в окрестностях, вымывающих частиц. Ее можно использовать при проведении тонкой очистки небольших объемов газов, отборе аэрозольных проб, нанесении специальных покрытий заданной толщины из частиц и т.д.

При описании поведения частиц, взвешенных в термодинамически неравновесных по температуре вязких газообразных средах, вводится безразмерный параметр $\theta$, характеризующий перепад между средней температурой поверхности частицы $T_S$ и температурой газообразной среды вдали от нее $T_\infty$, отнесенный к последней, т.е. $\theta = (T_S - T_\infty)/T_\infty$. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство $\theta \ll 1$, и значительным, если $\theta \sim O(1)$. При выполнении первого условия коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотность вязкой газообразной среды можно считать постоянными величинами, а саму вязкую среду изотермической. Это условие существенно упрощает процедуру нахождения выражений для силы и скорости фотофореза. Основные результаты при таком описании получены в работах [2, 4, 5]. Если $\theta \sim O(1)$, частица называется нагретой (нагрев поверхности частицы может быть обусловлен, например, протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.д.), а вязкая среда считается неизотермической. При нахождении в этом случае силы и скорости фотофореза необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса и плотности вязкой газообразной среды от температуры, а сама система газодинамических уравнений, описывающая такую среду, становится существенно нелинейной. В научной литературе имеется мало работ, посвященных исследованию этого случая, в частности рассматривались, например, гравитационное движение нагретых частиц [6, 7], фотофорез нагретых крупных частиц [8], термофорез крупных нагретых частиц [9], диффузионное испарение (сублимация) [10]. В этих работах показано, что нагрев поверхности частиц существенно влияет на их поведение в газообразной среде.

Следует отметить, что в [6–10] не исследовался вопрос о влиянии теплообмена на поведение частицы в вязкой неизотермической газообразной среде. Стационарное уравнение конвективного теплообмена имеет вид [11, 12]

$$\rho_e c_{pe} (\mathbf{U}_e \nabla) T_e = \operatorname{div}(\lambda_e \nabla T_e).$$

Здесь левая часть уравнения ответственна за конвективный перенос тепла, а правая – за молекулярный. В случае малых чисел Рейнольдса и относительных перепадов температуры в газе конвективным переносом тепла можно пренебречь. Настоящая работа посвящена случаю, когда числа Рейнольдса малы, но в газе имеются значительные перепады температуры. По порядку величины в этом случае конвективный перенос тепла сравним с молекулярным.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается твердая частица сферической формы радиуса $R$, взвешенная в газе с плотностью $\rho_e$, теплопроводностью $\lambda_e$ и динамической вязкостью $\mu_e$, поверхность которой неравномерно нагревается электромагнитным излучением. Неравномерный нагрев приводит к неоднородному распределению температуры вдоль поверхности частицы.

Газ, взаимодействуя с неоднородно нагретой поверхностью, начинает двигаться вдоль поверхности в направлении возрастания температуры. Это явление называется тепловым скольжением газа, и оно вызывает появление фотофоретической силы. Под действием фотофоретической силы частица начинает двигаться. Наряду с фотофоретической силой на частицу действует сила вязкого сопротивления среды. Когда обе эти силы уравновешиваются, частица начинает двигаться равномерно с постоянной скоростью, которая называется фотофоретической скоростью $\mathbf{U}_{\text{ph}}$.

При описании свойств газообразной среды и частицы учитывается степенной вид зависимостей коэффициентов молекулярного переноса и плотности от температуры [13]: $\mu_e = \mu_\infty t_e^\beta$, $\lambda_e = \lambda_\infty t_e^\alpha$, $\rho_e = \rho_\infty / t_e$, $\lambda_i = \lambda_{i0} t_i^\gamma$, где $\mu_\infty = \mu_e(T_\infty)$, $\lambda_\infty = \lambda_e(T_\infty)$, $\lambda_{i0} = \lambda_i(T_\infty)$, $\rho_\infty = \rho_e(T_\infty)$, $t_k = T_k / T_\infty$ $(k = e, i)$, $0.5 \le \alpha, \beta \le 1$, $-1 \le \gamma \le 1$. Значения показателей степени у коэффициентов молекулярного переноса, например, для воздуха равны $\alpha = 0.81$, $\beta = 0.72$ при $273 \le T_e \ge 900$ K. Относительная погрешность не превышает 5% [13]. Индексы $e$ и $i$ относятся к газу и частице соответственно, $S$ – значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности частицы, $\infty$ – характеризующие газообразную среду вдали от частицы.

При теоретическом описании фотофореза предполагается, что ввиду малого времени тепловой релаксации процесс теплообмена в системе частица–газ протекает квазистационарно. Рассматривается движение крупной [1] частицы при малых числах Пекле и Рейнольдса в пренебрежении свободной конвекцией (число Грасгофа много меньше единицы). Задача решается гидродинамическим методом, т.е. решаются уравнения газовой динамики с соответствующими граничными условиями.

Фотофорез удобно описывать в сферической системе координат $(r, \theta, \varphi)$, которая связана с центром масс аэрозольной частицы, ось $Oz$ направлена в сторону распространения однородного потока излучения интенсивностью $I_0$. Задача сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком газа, скорость которого $\mathbf{U}_\infty$ подлежит определению ($\mathbf{U}_\infty \parallel Oz$). При данном выборе начала системы координат частицу можно считать неподвижной, а газообразную среду – движущейся в противоположную сторону фактического движения частицы ($\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_{\text{ph}}$). Распределения скоростей, давления и температур обладают аксиальной симметрией относительно оси $Oz$, т.е. являются функциями от двух переменных $y, \theta$ ($y = r/R$).

В рамках сформулированных допущений решается следующая система газодинамических уравнений [11, 12]:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}P_e=\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu_e\left[\frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j^{(e)}}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\delta_k^j\frac{\partial U_n^{(e)}}{\partial x_n}\right]\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho_e U_k^e\right)=0,\quad \rho_e c_{pe}\left(\mathbf{U}_e\nabla\right)T_e=\operatorname{div}\left(\lambda_e\nabla T_e\right),\qquad (1)$$

$$\operatorname{div}\left(\lambda_i\nabla T_i\right)=q_i.$$

Здесь $x_k$ – декартовые координаты, $U_k^{(e)}$ – компоненты массовой скорости $\mathbf{U}_e$, $P_e$ – давление, $c_{pe}$ – теплоемкость при постоянном давлении.

Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные $\mu_\infty$, $\rho_\infty$, $\lambda_\infty$ и сохраняющиеся в процессе движения частицы $R$, $T_\infty$ и $U_\infty$ ($U_\infty=|\mathbf{U}_\infty|$). Из этих параметров можно составить безразмерное число Рейнольдса ($\mathrm{Re}_\infty=RU_\infty\rho_\infty/\mu_\infty$), которое играет роль малого параметра в решаемой задаче.

При $\varepsilon\ll 1$ ($\varepsilon=\mathrm{Re}_\infty$) решение уравнений гидродинамики ищем в виде

$$\mathbf{V}_e=\mathbf{V}_e^{(0)}+\varepsilon\mathbf{V}_e^{(1)}+\ldots,\quad P_e=P_e^{(0)}+\varepsilon P_e^{(1)}+\ldots,$$

где $\mathbf{V}_e=\mathbf{U}_e/U_\infty$.

## ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ПО СКОРОСТИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Исходя из постановки задачи, выражения для обезразмеренных компонент массовой скорости $V_r^{(e)}$ и $V_\theta^{(e)}$ следует искать в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [12]. Для определения общей силы, действующей на частицу, достаточно ограничиться первыми членами этих разложений [12]. С учетом этого выражения для компонент массовой скорости можно искать в виде

$$V_r^{(e)}(y,\theta)=\cos\theta G(y),\quad V_\theta^{(e)}(y,\theta)=-\sin\theta g(y)$$

с краевыми условиями

$$\lim_{y\to\infty}\left(U_r^{(e)}(y,\theta)-U_\infty\cos\theta\right)=0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(U_\theta^{(e)}(y,\theta)+U_\infty\sin\theta\right)=0.$$

Здесь $G(y)$ и $g(y)$ – произвольные функции, зависящие от координаты $y$.

Исследование линеаризованной по скорости системы уравнений Навье–Стокса в сферической системе координат (1) показало, что, если коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа (слабая угловая асимметрия распределения температуры, что имеет место для большинства газов), то это уравнение может быть сведено к неоднородному дифференциальному уравнению третьего порядка с изолированной особой точкой. Решение полученного в результате уравнения ищем в виде обобщенных степенных рядов (подробный анализ проведен в работе [14]).

Таким образом, общие выражения для компонент массовой скорости, удовлетворяющие условию ограниченности решения при $y\to\infty$, и давления имеют вид

$$U_r^{(e)}=U_\infty\cos\theta G(y),\quad G(y)=A_1G_1+A_2G_2+G_3,$$

$$U_\theta^{(e)}=-U_\infty\sin\theta g(y),\quad g(y)=A_1G_4+A_2G_5+G_6,$$

$$P_e=P_\infty+\frac{\mu_\infty U}{R}t_{e0}^{\beta}\left\{\frac{y^2}{2}\frac{d^3G}{dy^3}+\right.$$

$$+\,y\left[3+\frac{\beta-1}{2}yf\right]\frac{d^2G}{dy^2}+\left[2-y^2f'-\frac{\beta}{2}y^2f^2+\right.$$

$$\left.+\,(\beta-2)yf\right]\frac{dG}{dy}+\left[\frac{f}{3}-\frac{y^2f''}{2}-yf'\left(2+\frac{y\beta f}{2}\right)\right]G\Bigg\}.$$

Здесь

$$G_1(y)=\frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(1)}\ell^n,$$

$$G_2(y)=\frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(2)}\ell^n+\omega_2\ln(y)G_1(y),$$

$$G_3(y)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(3)}\ell^n+\omega_3\ln(y)G_1(y),$$

$$f(y)=\frac{1}{t_{e0}(y)}\frac{dt_{e0}(y)}{dy}.$$

Значения коэффициентов $C_n^{(1)}$ ($n\ge 1$), $C_n^{(2)}$ ($n\ge 3$) и $C_n^{(3)}$ ($n\ge 4$) определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$C_n^{(1)}=\frac{1}{n(n+3)(n+5)}\Big\{\Big[(n-1)\left(3n^2+13n+8\right)+$$

$$+\,\gamma_1(n+2)(n+3)+\gamma_2(n+2)\Big]C_{n-1}^{(1)}-$$

$$-\Big[(n-1)(n-2)(3n+5)+2\gamma_1\left(n^2-4\right)+$$

$$+\,\gamma_2(n-2)+\gamma_3(n+3)\Big]C_{n-2}^{(1)}+$$

$$+\,(n-2)\left[(n-1)(n-3)+\gamma_1(n-3)+\gamma_3\right]C_{n-3}^{(1)}\Big\},$$

$$C_n^{(2)}=\frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)}\times$$

$$\times\Big\{\Big[(n-1)\left(3n^2+n-6\right)+\gamma_1 n(n+1)+n\gamma_2\Big]C_{n-1}^{(2)}-$$

$$-\,\big[\gamma_3(n+1)+(n-1)(n-2)(3n-1)+$$

$$+\,2\gamma_1 n(n-2)+\gamma_2(n-2)\big]C_{n-2}^{(2)}+(n-2)\times$$

$$\times\left[(n-1)(n-3)+\gamma_3+\gamma_1(n-3)C_{n-3}^{(2)}\right]+$$

$$+\,\frac{\omega_2}{\Gamma_0^2}\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)S_k^{(1)}-6(-1)^n\frac{\gamma_4!}{(\gamma_4-n)!\,n!}\Big\},$$

$$C_n^{(3)} = \frac{1}{n(n+2)(n-3)} \times$$
$$\times \Big\{ (n-1)\left[3n^2 - 5n - 4 + \gamma_1 n + \gamma_2\right] C_{n-1}^{(3)} -$$
$$- [(n-1)(n-2)(3n-4) +$$
$$+ 2\gamma_1 (n-1)(n-2) + \gamma_2 (n-2) + n\gamma_3] C_{n-2}^{(3)} +$$
$$+ (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1 (n-3) + \gamma_3] C_{n-3}^{(3)} +$$
$$+ \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) S_k^{(1)} \Big\},$$

где

$$S_k^{(1)} = \left(3k^2 + 16k + 15\right) C_k^{(1)} - ((k-1)(6k+13) +$$
$$+ \gamma_1 (2k+5) + \gamma_2) C_{kk-1}^{(1)} +$$
$$+ (3(k-1)(k-2) + 2\gamma_1 (k-2) + \gamma_3) C_{k-2}^{(1)},$$
$$\ell(y) = \Gamma_0 / (y + \Gamma_0), \quad \Gamma_0 = \mathrm{const},$$
$$G_k = \left(1 + \frac{\ell}{2(1+\alpha)}\right) G_{k-3} + \frac{1}{2} y G'_{k-3} \, (k = 4,5,6),$$

$f'$, $f''$, $G'_1$, $G'_2$, $G'_3$ – первые и вторые производные по $y$ от соответствующих функций.

При вычислении коэффициентов $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}$ и $C_n^{(3)}$ по рекуррентным формулам необходимо учитывать, что

$$C_0^{(1)} = 1, \;\; C_0^{(2)} = 1, \;\; C_0^{(3)} = 1, \;\; C_1^{(3)} = 0, \;\; C_2^{(2)} = 1,$$
$$C_1^{(2)} = -\frac{1}{8}(2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4),$$
$$\frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} = -\frac{\gamma_3}{60}(10 + 3\gamma_1 + \gamma_2),$$
$$\gamma_4 = \beta/(1+\alpha), \quad \gamma_1 = \frac{1-\beta}{1+\alpha},$$
$$\frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} = \frac{1}{15}\left[3\gamma_3 - (8 + 6\gamma_1 + 2\gamma_2) C_1^{(2)} + 3\gamma_4(\gamma_4 - 1)\right],$$
$$C_2^{(3)} = \frac{1}{4}\gamma_3, \;\; C_3^{(3)} = 1, \;\; \gamma_2 = 2\frac{1+\beta}{1+\alpha},$$
$$\gamma_3 = \frac{2 + 2\alpha - \beta}{(1+\alpha)^2},$$

а коэффициенты $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$ и $C_n^{(3)}$ при $n < 0$ равны нулю.

Постоянные интегрирования $A_1, A_2, \Gamma_0$ определяются из краевых условий задачи.

## ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР ВНЕ И ВНУТРИ ЧАСТИЦЫ

Для нахождения фотофоретической силы и скорости нужно знать поля температур. Для этого необходимо решить уравнения (1) со следующими краевыми условиями: на поверхности частицы $(y = 1)$ учитываются равенство температур и непрерывность радиальных потоков тепла включая тепло, связанное с излучением

$$T_e = T_i, \;\; -\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} = -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} - \sigma_0 \sigma_1 R\left(T_i^4 - T_\infty^4\right),$$

температура вдали от частицы и конечность температуры в ее центре учитываются в краевых условиях

$$T_e\big|_{y\to\infty} \to T_\infty, \quad T_i\big|_{y\to 0} \neq \infty.$$

Здесь $\sigma_0$ – постоянная Стефана–Больцмана, $\sigma_1$ – интегральная степень черноты.

В [15] для тепловой задачи показано, что вблизи сферы инерционные и конвективные члены становятся одного порядка с членами, описывающими молекулярный перенос, поэтому обычный метод разложения по малому параметру дает известную погрешность, т.е. не позволяет строго удовлетворить граничным условиям на бесконечности и получить точное единое решение, однородно справедливое для всей области течения. Поэтому решение уравнения, описывающего поле температуры вне частицы, находится методом сращиваемых асимптотических разложений [16]. Суть данного метода заключается в том, что поле температуры представляется в виде двух асимптотических разложений. В данном случае внутренние и внешние асимптотические разложения безразмерной температуры записываются в виде

$$t_e(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{en}(y,\theta), \quad f_0(\varepsilon) = 1,$$
$$\varepsilon = \mathrm{Re}_\infty, \;\; t_e^*(\xi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\varepsilon) t_{en}^*(\xi,\theta), \qquad (2)$$

где $\xi = \varepsilon y$ – “сжатая” радиальная координата [15].

При этом требуется, чтобы

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \to 0, \;\; \frac{f_{n+1}^*}{f_n^*} \to 0, \;\; \varepsilon \to 0.$$

Недостающие граничные условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности асимптотических продолжений того и другого в некоторую промежуточную область, т.е.

$$t_e(y \to \infty, \theta) = t_e^*(\xi \to 0, \theta).$$

Асимптотическое разложение для поля температуры внутри частицы, как показывают граничные условия на ее поверхности, следует искать в виде аналогичном (2):

$$t_i(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon)\, t_{in}(y,\theta).$$

Относительно функций $f_n(\varepsilon)$ и $f_n^*(\varepsilon)$ предполагается лишь, что порядок их малости по $\varepsilon$ увеличивается с ростом $n$.

В безразмерных переменных конвективное уравнение теплопроводности (1) имеет вид

$$\varepsilon \frac{\mathrm{Pr}_\infty}{t_e}\left(V_r^e \frac{\partial t_e}{\partial y} + \frac{V_\theta^e}{y}\frac{\partial t_e}{\partial \theta}\right) = \operatorname{div}\left(t_e^\alpha \nabla t_e\right),$$

а с учетом сжатой радиальной координаты получаем следующее уравнение для нахождения температуры $t_e^*$:

$$\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{t_e^*}\left(V_r^{e*} \frac{\partial t_e^*}{\partial \xi} + \frac{V_\theta^{e*}}{\xi}\frac{\partial t_e^*}{\partial \theta}\right) = \operatorname{div}\left(t_e^{*\alpha} \nabla t_e^*\right),$$

$$t_e^* \to 1 \quad \text{при } \xi \to \infty,$$

$$\mathbf{V}_e^*(\xi,\theta) = \mathbf{n}_z + \varepsilon \mathbf{V}_e^{(1)*}(\xi,\theta) + \ldots,$$

$$P_e^*(\xi,\theta) \to P_\infty \quad \text{при } \xi \to \infty.$$

Здесь $V_r^{e*} = V_r^{e*}(\xi,\theta)$, $V_\theta^{e*} = V_\theta^{e*}(\xi,\theta)$ – составляющие вектора $\mathbf{V}_e^*$; $t_e^* = t_e^*(\xi,\theta)$; $\mathbf{n}_z$ – единичный вектор в направлении оси $Oz$.

При нахождении выражений для фотофоретической силы и скорости достаточно ограничиться нулевыми и первыми асимптотическими разложениями для полей температур, которые имеют следующий вид:

$$t_e^*(\xi,\theta) = t_{eo}^*(\xi) + \varepsilon t_{e1}^*(\xi,\theta),$$
$$t_e(y,\theta) = t_{eo}(y) + \varepsilon t_{e1}(y,\theta),$$
$$t_i(y,\theta) = t_{io}(y) + \varepsilon t_{i1}(y,\theta),$$

где

$$t_{eo}^*(\xi) = 1, \quad t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

$$t_{i0}(y) = \left(B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y}\int_y^1 \psi_0 dy + \int_y^1 \frac{\psi_0}{y} dy\right)^{\frac{1}{1+\gamma}},$$

$$z = r\cos\theta,$$

$$t_{e1}^*(\xi,\theta) = \frac{\Gamma_0}{(1+\alpha)\xi}\exp\left\{-\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{2}\xi(1-\cos\theta)\right\},$$

$$H_0 = \frac{(1+\gamma)R^2}{3\lambda_{i0}T_\infty}J_0, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad x = \cos\theta,$$

$$t_{i1}(y) = \frac{D_0}{t_{i0}^\gamma} + \frac{\cos\theta}{t_{i0}^\gamma}\left[B_1 y + \frac{H_1}{y^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\left(y\int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2}\int_1^y \psi_1 y dy\right)\right],$$

$$H_1 = \frac{R}{3\lambda_{i0}T_\infty}J_1, \quad t_{e1}(y,\theta) = \frac{1}{t_{e0}^\alpha}\left\{\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{D_1}{y} - 1\right) + \right.$$
$$\left. + \cos\theta\left[\frac{\Gamma}{y^2} + \frac{\omega_0}{3}\left(\tau_3 + A_2\frac{\tau_2}{y} - A_1\frac{\tau_1}{y^3}\right)\right]\right\},$$

$$J_0 = \frac{1}{V}\int_V q_i dV, \quad J_1 = \frac{1}{V}\int_V q_i z dV,$$

$$\psi_0(y) = -\frac{R^2(1+\gamma)}{2\lambda_{i0}T_\infty}y^2\int_{-1}^{+1} q_1 dx,$$

$$\psi_1(y) = -\frac{3R^2}{2\lambda_{i0}T_\infty}y^2\int_{-1}^{+1} q_1 x dx, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$\tau_1(y) = (1-\ell)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ell^n}{n+1}\left[\Omega_n^{(1)} - \frac{(1-\ell)^3}{6}\frac{n+1}{n+4}\Omega_n^{(3)}\right],$$

$$\Omega_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^{(1)}, \quad \omega_0 = \frac{\Gamma_0\,\mathrm{Pr}_\infty}{1+\alpha},$$

$$\tau_2(y) = \frac{1}{1-\ell}\left[1 + \ell\ln\ell + C_1^{(2)}\ell(\ell - \ln\ell) - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n^{(2)}\ell^n}{n-1}\left(1 - \frac{n-1}{n}\ell\right)\right] +$$
$$+ \frac{\omega_2}{y^2}(1-\ell)S_n^{(2)} + (1-\ell)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega_n^{(4)}\ell^n}{n+2}, \quad \tau_3(y) = \frac{1}{(1-\ell)^2}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{2} - 2\ell - \ell^2\ln\ell + C_2^{(3)}\left(2\ell^3 - \ell^2\ln\ell - \frac{1}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{C_n^{(3)}\ell^n}{n-2}\left(1 - 2\frac{n-2}{n-1}\ell + \frac{n-2}{n}\ell^2\right)\right] +$$
$$+ \frac{\omega_3}{y^3}(1-\ell)S_n^{(2)} +$$
$$+ (1-\ell)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega_n^{(6)}\ell^n}{n+1}, \quad \Omega_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\Omega_k^{(1)}}{k+1},$$

$$\Omega_n^{(3)} = \sum_{k=0}^{n}(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)C_k^{(1)},$$

$$\Omega_n^{(4)} = \sum_{k=0}^{n}(n-k+1)C_k^{(2)}, \quad \Omega_n^{(5)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\Omega_k^{(3)}}{k+4},$$

$$\theta_n^{(1)} = \Omega_n^{(2)} + \ln y\Omega_n^{(1)}, \quad \Omega_n^{(6)} = \sum_{k=0}^{n}C_k^{(3)},$$

$$\theta_n^{(2)} = \Omega_n^{(5)} + \ln y\Omega_n^{(3)},$$

$$S_n^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ell^n}{6(n+4)}\left[(1-\ell)^3\theta_n^{(2)} - 6\frac{n+4}{n+1}\theta_n^{(1)}\right],$$

$\mathrm{Pr}_\infty = \left(\mu_\infty c_p\right)/\lambda_\infty$ – число Прандтля, $\int_V q_i z dV$ – дипольный момент плотности тепловых источников [2, 4, 8], $dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$. Интегрирование здесь ведется по всему объему частицы.

Среднее значение температуры поверхности частицы $T_S = t_{iS}T_\infty$ определяется решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} t_{iS} = t_{eS}, \quad \Gamma_0 = t_{eS}^{1+\alpha} - 1, \\ \dfrac{\ell^{(S)}}{1+\alpha}t_{eS} = \dfrac{R^2}{3\lambda_{eS}T_\infty}J_0 - \sigma_0\sigma_1\dfrac{RT_\infty^3}{\lambda_{eS}}\left(t_{eS}^4 - 1\right), \\ \ell^{(S)} = \dfrac{t_{eS}^{1+\alpha} - 1}{t_{eS}^{1+\alpha}}, \end{cases} \tag{3}$$
$$t_{iS} = t_{i0}\left(y=1\right), \quad t_{eS} = t_{e0}\left(y=1\right),$$
$$\lambda_{eS} = \lambda_\infty t_{eS}^{\alpha}, \quad \lambda_{iS} = \lambda_{i0}t_{iS}^{\gamma}.$$

## ФОТОФОРЕТИЧЕСКАЯ СИЛА И СКОРОСТЬ. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для нахождения силы и скорости фотофореза требуются граничные условия для компонент массовой скорости на поверхности частицы, которые имеют следующий вид:

$$U_r^{(e)}\Big|_{y=1} = 0, \quad U_\theta^{(e)}\Big|_{y=1} = K_{TS}^{(0)}\frac{\nu_{eS}}{Rt_{eS}}\frac{\partial t_e}{\partial\theta}, \tag{4}$$

где $K_{TS}$ – коэффициент теплового скольжения.

При численных оценках необходимы значения коэффициентов теплового скольжения. Коэффициент теплового скольжения определяется из решения в слое Кнудсена уравнения Больцмана и в общем случае он зависит от вида использованной модели межмолекулярного взаимодействия и средней температуры поверхности частицы [1, 17, 18]. Поскольку в настоящей задаче ограничиваемся вычислениями силы и скорости фотофореза до первого порядка малости по $\varepsilon$, то необходимо разложить коэффициент скольжения в ряд по малому параметру, а принимая во внимание граничное условие для касательной компоненты массовой скорости (4), а также работы [17, 18], в качестве нулевого приближения при численных оценках силы и скорости фотофореза можно взять $K_{TS}^{(0)} = 1.161$ [1, 17, 18].

Результирующая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности [11]:

$$F_z = \int_{(S)}\left(-P_e\cos\theta + \sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta\right)\times \times r^2\sin\theta d\theta d\varphi\Big|_{r=R}. \tag{5}$$

Здесь $\sigma_{rr}$, $\sigma_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений [11].

После подстановки в (5) полученных выше выражений и интегрирования получаем, что результирующая сила складывается из силы вязкого сопротивления среды $\mathbf{F}_\mu$, фотофоретической силы $\mathbf{F}_{\mathrm{ph}}$ (“чистый фотофорез”) и силы $\mathbf{F}_{mh}$, обусловленной конвективным переносом тепла:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\mu &= -6\pi R\mu_\infty U f_\mu \mathbf{n}_z, \\ \mathbf{F}_{\mathrm{ph}} &= 6\pi R\mu_\infty f_{\mathrm{ph}}J_1\mathbf{n}_z, \\ \mathbf{F}_{\mathrm{ph}} &= 6\pi R\mu_\infty f_{mh}\omega_0\mathbf{n}_z. \end{aligned} \tag{6}$$

Значения коэффициентов $f_m$ и $f_{\mathrm{ph}}$, $f_{mh}$ могут быть оценены с помощью следующих формул

$$f_m = \frac{2}{3}\frac{N_2}{N_1}, \quad f_{\mathrm{ph}} = \frac{4}{3}K_{TS}^{(0)}\frac{\nu_{eS}}{\delta T_\infty t_{eS}}\frac{G_1}{N_1\lambda_{iS}},$$

$$f_{mh} = \frac{4}{9}K_{TS}^{(0)}\frac{\nu_{eS}G_1}{Rt_{eS}^{1+\alpha}N_1\delta}\frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}}\times$$

$$\times\left[\tau_3' + 2\tau_3 + \frac{G_3}{G_1}(\tau_1' - \tau_1)\left(1 - \frac{N_2G_2}{N_1G_1}\right) - \frac{N_2}{N_1}(\tau_2' + \tau_2)\right],$$

$$N_1\big|_{y=1} = G_1G_2' - G_2G_1', \quad N_2\big|_{y=1} = G_1G_3' - G_3G_1',$$

$$G_1'(y), \quad G_2'(y)$$

и т.д. – первые производные от соответствующих функций, $\nu_{eS} = \nu_\infty t_{eS}^{1+\beta}$ – кинематическая вязкость газообразной среды. Функции $G_1, G_2, \tau_2, N_1$ и т.д. берутся при $y = 1$.

Скорость равномерного движения частицы $\mathbf{U}_p$ определяется из условия равенства нулю общей силы, действующей на нее. Из (6) видно, что скорость также складывается из двух слагаемых: фотофоретической скорости (“чистый фотофорез”) и скорости, вызванной движением среды:

$$\mathbf{U}_p = -\left(h_{hp}J_1 + h_{mh}\omega_0\right)\mathbf{n}_z,$$
$$h_{\mathrm{ph}} = f_{\mathrm{ph}}/f_\mu, \quad h_{mh} = f_{mh}/f_\mu.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые получены выражения, учитывающие вклад в “чистый” фотофорез (силу и скорость) крупной нагретой твердой сферической частицы конвективного переноса тепла.

Полученные формулы для силы и скорости фотофореза можно использовать и при малых относительных перепадах температуры, т.е. когда нагрев поверхности частицы мал. В этом случае средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей газообразной среды вдали от нее, и при $\Gamma_0 \to 0 (\ell \to 0)$ имеем

$$G_1 = 1,\ \ G_1' = -3,\ \ G_1'' = 12,\ \ G_2 = 1,$$
$$G_2' = -1,\ \ G_2'' = 2,\ \ G_3 = 1,\ \ G_3' = 0,$$
$$N_1 = 2,\ \ N_2 = 3,\ \ \tau_1 = \frac{3}{4},\ \ \tau_1' = 0,$$
$$\tau_2 = \frac{3}{2},\ \ \tau_2' = 0,\ \ \tau_3 = \frac{3}{2},\ \ \tau_3' = 0.$$

Численные оценки, проведенные для значений $\alpha, \beta = 0.5,\ 0.7,\ 1$ в интервале температур от 273 до 1000 K показали, что нагрев поверхности частицы существенно влияет на функции $G_i(y), N_i(y), \tau_i(y)$ и т.д. и их производные по сравнению со значениями функций при малых относительных перепадах температуры. Это свидетельствует о нелинейном характере зависимости силы и скорости фотофореза от средней температуры нагрева поверхности частицы.

Конвективный перенос тепла пропорционален коэффициенту $\omega_0 = \frac{\Gamma_0 \mathrm{Pr}_\infty}{1+\alpha}$. Для большинства газов число Прандтля порядка единицы, а коэффициент $\Gamma_0 = \left(\frac{T_S}{T_\infty}\right)^{1+\alpha} - 1$ зависит от средней относительной температуры нагрева поверхности частицы $T_S$, определяемой формулой (3). Например, при $T_\infty = 273,\ T_S = 1000$ K и $\alpha = 1,\ \omega_0 \approx 6$. Следовательно, этот вклад в силу и скорость “чистого” фотофореза тем существеннее, чем сильнее нагрета частица. Таким образом, при описании фотофореза при значительных перепадах температуры необходимо учитывать конвективный член в уравнении теплообмена.

Разработанный метод решения конвективного уравнения теплообмена можно применить и для решения других аналогичных физических задач. В частности, для решения уравнения конвективной диффузии, задачи влияния конвективного тепло- и массообмена на процесс испарения нагретой капли и т.д.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галоян В.С., Яламов Ю.И.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985.
2. *Щукин Е.Р., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л.* Избранные вопросы физики аэрозолей. М.: МПУ, 1992.
3. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
4. *Береснев С.А., Ковалев Ф.Д., Кочнева Л.Б., Рунков В.А., Суетин П.Е., Черемисин А.А.* О возможности фотофоретической левитации частиц в стратосфере // Оптика атмосферы и океана. 2003. Т. 16. № 1. С. 52.
5. *Cheremisin A.A., Kushnarenko A.V.* Photophoretic Interaction of Aerosol Particles and Its Effect on Coagulation in Rarefied Gas Medium // J. Aerosol Sci. 2013. V. 62. P. 26.
6. *Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С.* Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 74.
7. *Малай Н.В., Рязанов К.С., Щукин Е.Р., Стукалов А.А.* О силе, действующей на нагретую сферическую каплю, движущуюся в газообразной среде // ПМТФ. 2011. Т. 52. № 1. С. 63.
8. *Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А.* Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы // ЖТФ. 2012. Т. 57. № 10. С. 42.
9. *Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р.* Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 2. С. 164.
10. *Щукин Е.Р., Малай Н.В., Шулиманова З.Л., Уварова Л.А.* О диффузионном испарении (сублимации) крупной аэрозольной частицы при значительных перепадах температуры в ее окрестности // ТВТ. 2015. Т. 53. № 4. С. 561.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: ТТЛ, 1954.
12. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
13. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
14. *Malai N.V., Limanskaya A.V., Shchukin E.R.* Solution of a Boundary Value Problem for the Navier–Stokes Equations Linearized with Respect to Velocity: Nonisothermal Flow of a Gaseous Medium Past a Uniformly Heated Sphere // J. Differential Equations. 2015. V. 51. № 10. P. 1319.
15. *Acrivos A., Taylor T.* Heat and Mass Transfer from Single Spheres in Stokes Flow // Phys. Fluids. 1962. V. 5. № 4. P. 387.
16. *Найфэ А.* Введение в методы возмущения. М.: Мир, 1984. 525 с.
17. *Юшканов А.А., Савков С.А., Яламов Ю.И.* О зависимости коэффициентов скольжения от модели межмолекулярного взаимодействия // ИФЖ. 1986. Т. 51. № 4. С. 686.
18. *Яламов Ю.И., Поддоскин А.Б., Юшканов А.А.* О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны // ДАН СССР. 1980. Т. 237. № 2. С. 1047.