ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 2023, том 61, № 1, с. 98–107

УДК 532.529.6:534-14

ОТКЛИК ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В СФЕРИЧЕСКИХ КЛАСТЕРАХ НА ОДНОКРАТНЫЙ ИМПУЛЬС РАЗРЕЖЕНИЯ

© 2023 г. А. А. Аганин, И. А. Аганин*, А. И. Давлетшин, Р. И. Нигматулин

Институт механики и машиностроения — ОСП ФГБУН "Федеральный исследовательский центр "Казанский научный центр РАН", Казань, Россия

**E-mail: aganel@gmail.com*

Поступила в редакцию 20.12.2021 г.
После доработки 27.02.2022 г.
Принята к публикации 07.06.2022 г.

Изучается отклик газовых (воздушных) пузырьков в сферическом кластере на однократное импульсное косинусообразное понижение и последующее восстановление давления окружающей жидкости (водоглицериновой смеси) при длительности импульса в окрестности периода собственных колебаний кластера. Полагается, что все пузырьки в ходе отклика остаются слабонесферическими. Исследуется влияние продолжительности и амплитуды импульса возбуждения, положения пузырьков в кластере, расстояния между пузырьками, числа пузырьков в кластере. Рассматриваются кластеры кубической структуры, в которых центры пузырьков располагаются в узлах кубической сетки, а также кластеры со случайным расположением пузырьков и с пузырьками, находящимися в центре и вершинах ряда вложенных друг в друга правильных многогранников. Для оценки влияния взаимодействия между пузырьками проводится сравнение с откликом одиночного пузырька. Используется один из вариантов дискретных моделей динамики пузырьков в кластере, в котором наряду с радиальными колебаниями моделируются их пространственные перемещения и малые несферические деформации. Установлено, что при выполнении условия малости несферических деформаций пузырьков в ходе отклика максимальное повышение давления в пузырьках по отношению к его начальному значению не превосходит нескольких раз. Если игнорировать нарушение данного допущения, то можно получить и значительно большие степени сжатия пузырьков. Это обусловлено тем, что при игнорировании нарушения условия малости деформаций диапазоны рассматриваемых параметров существенно расширяются.

DOI: 10.31857/S0040364423010131

ВВЕДЕНИЕ

Совместная динамика пузырьков может довольно сильно отличаться от динамики одиночных пузырьков (например, [1–5]), что обусловлено их гидродинамическим взаимодействием. Так, в результате взаимодействия амплитуда радиальных колебаний пузырьков в кластерах может увеличиваться и уменьшаться [6], расширение и сжатие пузырьков могут замедляться и ускоряться [7], может меняться период колебаний пузырьков [8]. Пузырьки в кластерах могут сближаться и удаляться [9, 10]. В результате взаимодействия пузырьки могут деформироваться и разрушаться [11–13], на их поверхности могут возникать направленные внутрь высокоскоростные струи [14]. Максимальные давления (и другие параметры) во взаимодействующих пузырьках могут значительно превышать их максимальные значения, реализующиеся в этих же пузырьках при отсутствии их взаимодействия [6, 15, 16]. Считается, что взаимодействие пузырьков является одним из необходимых условий достижения сверхсжатия содержимого кавитационных пузырьков для реализации в них термоядерных актов [17, 18] и т.д.

Основные особенности динамики одиночных пузырьков и пузырьков в пузырьковых жидкостях и применяемых для их исследования моделей можно найти в монографиях [1–3]. При изучении динамики пузырьков в кластерах зачастую используются модели, в которых пузырьки считаются чисто сферическими. В частности, такое допущение применяется в континуальной модели в [6, 19–23] для изучения образования и распространения ударных волн в кластере, установления влияния неоднородности пузырьков по размерам, исследования генерируемого кластером шума. Кластер подвергается воздействию в виде уменьшения и последующего восстановления давления жидкости. Допущение о сферичности пузырьков применяется в [7, 16] в несколько иной континуальной модели при изучении динамики пузырьковых кластеров и ее зависимости от размеров пузырьков при ступенчатом уменьшении давления жидкости от 50 до 10 кПа и последующем его повышении до 50 кПа. Подобная модель применяется в [24, 25] для исследования поведения пузырькового кластера в ультразвуковом поле. Гипотеза о сферичности пузырьков используется в модели работы [26, 27], в которой кластер интерпретируется как большая капля жидкости со множеством микропузырьков и однородным давлением. Изучаются динамика и диффузионная устойчивость пузырьков такого кластера, подвергаемого воздействию акустического поля с длиной волны, гораздо большей, чем размер кластера. Пузырьки считаются сферическими в работах [28, 29], где анализируется фокусировка волн давления в тороидальных кластерах.

Дискретная модель коллективной динамики сферических пузырьков в интенсивном ультразвуковом поле [30] (в дискретных моделях движение пузырьков описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка относительно радиусов пузырьков и радиус-векторов их центров) применялась в [31] для изучения поведения пузырьков в кластере при их мгновенном сжатии и периодическом возбуждении. Рассматривался сферический кластер с пузырьками в центре и вершинах вложенных додекаэдров. Было обнаружено, что степени сжатия некоторых пузырьков в таком кластере весьма значительные. Модель совместной динамики сферических пузырьков, подобная той, что применялась в [31], использовалась и в [32, 33] для изучения динамики пузырьков в сферических кластерах при резком повышении давления в жидкости и внутри пузырьков. Изначально пузырьки находятся в центре, вершинах правильных многогранников и в узлах кубической сетки. Было показано, что давление в центральных пузырьках кластера может достигать значений, намного превышающих величины, реализующиеся в случае одиночных пузырьков.

Выполнение допущения о сферичности пузырьков в кластере зачастую (как, например, в перечисленных работах) никак не контролируется. Вместе с тем очевидно, что результаты исследований могут сильно зависеть от деформаций пузырьков. В частности, существенное влияние несферических деформаций пузырьков было продемонстрировано в [34], где прямое численное моделирование использовалось для изучения расширения и последующего коллапса пузырьков в полусферическом кластере около плоской твердой стенки. Деформации пузырьков рассчитывались явно. Было показано, что при использовании одного из вариантов дискретной модели, в которой пузырьки считаются сферическими, пиковые давления получаются более чем в 10 раз завышенными по сравнению с теми, что дает прямое численное моделирование.

В настоящей работе изучается отклик газовых пузырьков в сферическом кластере на импульсное изменение давления окружающей жидкости в виде его однократного косинусоидального понижения и последующего повышения до исходного значения. Подобный закон изменения давления жидкости является весьма типичным, в частности, для сужающихся и затем расширяющихся потоков жидкости (такой закон рассматривался в [6, 19–23]). Исследуется влияние амплитуды и длительности импульса, положения пузырьков в кластере, расстояния между пузырьками, числа пузырьков в кластере, структуры кластера. Рассмотрение ограничивается лишь той областью параметров воздействия на кластер и конфигурации кластера, в которой все пузырьки остаются близкими к сферическим вплоть до завершения их радиальных пульсаций после окончания изменения давления жидкости. Исследования проводятся с помощью дискретной модели [35], в которой наряду с радиальными колебаниями пузырьков моделируются также их пространственные перемещения и малые несферические деформации. Последнее позволяет непосредственно контролировать выполнение принимаемого условия малости несферических деформаций. И в этом смысле результаты настоящей работы, в отличие от работ, где при использовании допущения о сферичности пузырьков фактически никак не проверяются не только их деформации, но и разрушение, являются намного более адекватными.

Применяемая в настоящей работе модель [35] использовалась также и в [36] для контроля малости несферических деформаций. В работе [36] исследовалось влияние взаимодействия газовых пузырьков в сферическом кластере воздушных пузырьков при их переходе в новое положение равновесия в результате мгновенного повышения их внутреннего давления. Исследование проводилось с применением указанной выше модели совместной динамики пузырьков, используемой в [32, 33]. Было показано, что, если удовлетворяется условие малости несферических деформаций, то область параметров задачи сужается так, что достигаемые в ней максимальные давления в центральных пузырьках кластера оказываются намного ниже, чем значения в соответствующей области при отсутствии таких ограничений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучаются особенности влияния межпузырькового взаимодействия на динамику газовых (воздушных) пузырьков в сферическом кластере при однократном воздействии импульсом разрежения в том случае, когда влияние несферических деформаций пузырьков мало (т.е. когда пузырьки можно считать близкими к сферическим). Рассматривается импульсное воздействие, при котором давление жидкости (водоглицериновой смеси) p_L изменяется следующим образом:

$$p_L = p_0 + \frac{1}{2} p_a \left[\cos\left(2\pi \frac{t}{t_0}\right) - 1 \right] \quad (1)$$

$$\text{при } 0 \le t \le t_0, \quad p_L = p_0 \text{ при } t > t_0,$$

где t – время, p_0 – статическое давление жидкости, p_a – амплитуда импульса, t_0 – его длительность. Согласно (1), давление жидкости сначала в течение времени $t_0/2$ понижается от p_0 до $p_0 - p_a$, а затем за время $t_0/2$ восстанавливается до начального значения p_0 и далее остается постоянным. Величины p_0 и p_a выбираются таким образом, чтобы минимальное давление $p_{L\,\min} = 1$ бар. Это означает, что p_0 связано с p_a как $p_0 = p_{L\,\min} + p_a$. Изначально (при $t = 0$) жидкость и пузырьки кластера покоятся, все пузырьки являются сферическими с радиусом $R_0 = 0.25$ мм.

Основное внимание направлено на кластеры с кубической структурой (рис. 1), в которых центры пузырьков располагаются в узлах равномерной трехмерной сетки, причем один из центров находится в середине кластера.

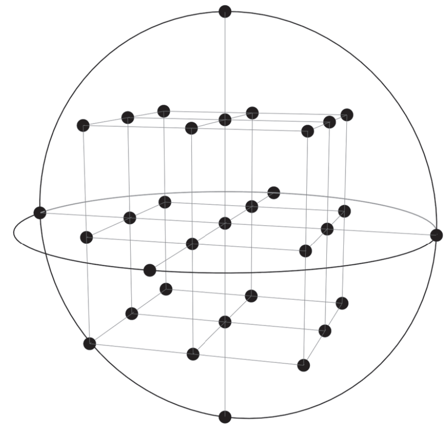

Рис. 1. Схема сферического кластера кубической структуры.

Длительность импульса t_0 варьируется в окрестности периода $t_{\rm cl} = f_{\rm cl}^{-1}$ собственных колебаний кластера ($f_{\rm cl}$ – частота собственных колебаний), начальное расстояние между центрами ближайших пузырьков кластера d0, амплитуда импульса ра и число пузырьков в кластере K варьируются от $d_0 = \infty$, $p_a = 0$ и $K = 1$ до тех значений, при которых (в случае воздействия с длительностью импульса $t_0 = t_{\rm cl}$) нарушается условие малости несферических деформаций пузырьков.

Собственная частота кластера $f_{\rm cl}$ определяется следующим выражением [6, 37, 38]:

$$f_{\rm cl} = f_{\rm sing}\left(1 + \frac{12}{\pi^2}\frac{R_{\rm cl0}^2}{R_0^2}\alpha_0\left(1-\alpha_0\right)\right)^{-1/2}, \qquad (2)$$

где $R_{\rm cl0}$ – значение радиуса кластера $R_{\rm cl}$ при $t = 0$, $f_{\rm sing}$ – собственная частота одиночного пузырька, α_0 – объемное газосодержание при $t = 0$. Под радиусом кластера $R_{\rm cl}$ понимается расстояние между центром кластера и наиболее удаленной от него точкой поверхностей периферийных пузырьков. Частота $f_{\rm sing}$ и газосодержание α_0 определяются как

$$f_{\rm sing} = \frac{1}{2\pi R_0}\sqrt{\frac{3\kappa p_0}{\rho_L} + \frac{2(3\kappa-1)\sigma}{R_0\rho_L} - \frac{4\nu^2}{R_0^2}},$$

$$\alpha_0 = K\left(\frac{R_0}{R_{\rm cl0}}\right)^3,$$

где $\kappa = 1.4$ – показатель адиабаты газа в пузырьках, $\rho_L = 1156$ кг/м^3 – плотность жидкости, $\sigma = 0.07$ Н/м – поверхностное натяжение, $\nu = 9.52 \times 10^{-6}$ м^2/с – кинематическая вязкость жидкости.

Анализируется также и влияние структуры кластера. С этой целью, наряду с кластерами кубической структуры (рис. 1), рассматриваются кластеры со случайным расположением пузырьков и с пузырьками, находящимися в центре и вершинах ряда вложенных друг в друга правильных многогранников.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Используется математическая модель взаимодействия пузырьков работы [35]. В данной модели уравнение поверхности k-го пузырька ($1 \le k \le K$) в сферической системе координат (r_k, θ_k, φ_k) с началом отсчета в центре этого пузырька имеет вид

$$r_k = R_k(t) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_{nk}^m(t) Y_n^m(\theta_k, \varphi_k).$$

Здесь R_k – радиус пузырька; $Y_n^m(\theta_k, \varphi_k) = P_n^{|m|}(\cos\theta_k)e^{im\varphi_k}$ – сферическая функция с номером n порядка m; $P_n^{|m|}$ – присоединенный полином Лежандра степени n порядка $|m|$; i – мнимая единица; a_{nk}^m – амплитуда отклонений в виде сферических функций $Y_n^m(\theta_k, \varphi_k)$ поверхности пузырька от сферической формы $r_k = R_k$.

Положение k-го пузырька определяется радиус-вектором его центра $\mathbf{p}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j} + z_k\mathbf{k}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – направляющие векторы осей декартовых координат x, y, z с началом отсчета в центре кластера (в центре центрального пузырька). Отклонение формы k-го пузырька от сферической в виде гармоник степени n характеризуется величиной ε_{nk}, определяемой выражениями

$$\varepsilon_{nk} = \varepsilon_{nk\,\max} \text{ при } \varepsilon_{nk\,\max} + \varepsilon_{nk\,\min} \ge 0,$$
$$\varepsilon_{nk} = \varepsilon_{nk\,\min} \text{ при } \varepsilon_{nk\,\max} + \varepsilon_{nk\,\min} < 0,$$

где $\varepsilon_{nk\,\max} = \max\limits_{\theta_k,\varphi_k}\varepsilon_{nk}^*(\theta_k, \varphi_k)$ – максимум положительного отклонения (высота выпуклости) поверхности пузырька от сферической поверхности $r_k = R_k$ в виде гармоник степени n, $\varepsilon_{nk\,\min} = \min\limits_{\theta_k,\varphi_k}\varepsilon_{nk}^*(\theta_k, \varphi_k)$ – максимум отрицательного отклонения (глубина вогнутости со знаком минус) поверхности пузырька от сферической поверхности $r_k = R_k$ в виде гармоник степени n, $\varepsilon_{nk}^*(\theta_k, \varphi_k) =$

$=\sum_{m=-n}^{n}\varepsilon_{nk}^{m}Y_{n}^{m}(\theta_k,\varphi_k)$ – величина отклонения поверхности пузырька от сферической поверхности $r_k = R_k$ в точке (θ_k, φ_k) в виде гармоник степени n ($\varepsilon_{nk}^{*}(\theta_k,\varphi_k) > 0$, если отклонение наружу пузырька, и $\varepsilon_{nk}^{*}(\theta_k,\varphi_k) < 0$, если отклонение внутрь), $\varepsilon_{nk}^{m} = a_{nk}^{m}/R_k$. Несферические деформации пузырьков считаются малыми в том смысле, что $\varepsilon_{nk}^{2} \ll 1$ при любых n и k. Величина ε_{nk} зависит только от формы пузырька. В частности, она не изменяется при повороте системы (r_k,θ_k,φ_k).

Динамика k-го пузырька кластера описывается следующими уравнениями:

$$R_k\ddot{R}_k+\frac{3\dot{R}_k^2}{2}-\frac{3\dot{p}_k^{1'}\dot{p}_k^{1''}\beta_{110}^{1'1''0}}{8}+\frac{2\sigma}{\rho_L R_k}-\frac{p_k-p_L}{\rho_L}+$$
$$+\psi_{0k}+\Delta_k=\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{K}\left[\frac{\dot{B}_{0j}}{d_{kj}}-\frac{B_{0j}\dot{d}_{kj}}{d_{kj}^2}-\frac{\left(R_j^3\dot{p}_j^{1'}C_{10kj}^{1'0}\right)'}{2d_{kj}^2}-\right.$$
$$-\frac{9B_{0j}\dot{p}_k^{1''}C_{01kj}^{01'}\beta_{110}^{1'1''0}}{4d_{kj}^2}+\sum_{\substack{s=1,\\ s\neq j}}^{K}\frac{\left(R_j^3B_{0s}C_{01js}^{01'}C_{10kj}^{1'0}\right)'}{2d_{kj}^2d_{js}^2}+ \tag{3}$$
$$\left.+\sum_{\substack{s=1,\\ s\neq k}}^{K}\frac{9B_{0j}B_{0s}C_{01kj}^{01'}C_{01ks}^{01''}\beta_{110}^{1'1''0}}{8d_{kj}^2d_{ks}^2}\right],$$

$$R_k\ddot{p}_k^{m}+3\dot{R}_k\dot{p}_k^{m}-2\dot{R}_k\dot{p}_k^{1'}\varepsilon_{2k}^{2'}\beta_{211}^{2'1'-m}-$$
$$-\frac{7\ddot{p}_k^{1'}a_{2k}^{2'}\beta_{211}^{2'1'-m}}{6}-\frac{3\dot{p}_k^{1'}\dot{a}_{2k}^{2'}\beta_{211}^{2'1'-m}}{2}+\psi_{1k}^{m}=$$
$$=\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{K}\left[\frac{3\left(R_kB_{0j}C_{01kj}^{0m}\right)'}{d_{kj}^2}-\frac{3\left(R_kR_j^3\dot{p}_j^{1'}C_{11kj}^{1'm}\right)'}{2d_{kj}^3}-\right.$$
$$-\frac{6R_kB_{0j}C_{01kj}^{0m}\dot{d}_{kj}}{d_{kj}^3}-\frac{5R_kB_{0j}\dot{p}_k^{1'}C_{02kj}^{02'}\beta_{211}^{2'1'-m}}{d_{kj}^3}+ \tag{4}$$
$$+\frac{3\left(B_{0j}C_{01kj}^{01'}a_{2k}^{2'}\right)'\gamma_{211}^{2'1'-m}}{2d_{kj}^2}-$$
$$\left.-\frac{B_{0j}\left(\dot{a}_{2k}^{2'}+2\dot{R}_k\varepsilon_{2k}^{2'}\right)C_{01kj}^{01'}\beta_{121}^{1'2'-m}}{d_{kj}^2}\right],$$
$$m=-1,\ 0,\ 1,$$

$$R_k\ddot{a}_{nk}^{m}+3\dot{R}_k\dot{a}_{nk}^{m}-(n-1)\ddot{R}_ka_{nk}^{m}-$$
$$-\delta_{2n}\frac{27\dot{p}_k^{1'}\dot{p}_k^{1''}\beta_{112}^{1'1''-m}}{8}+\frac{3}{2}\sum_{s=n-1}^{n+1}\left[\dot{p}_k^{1'}\dot{a}_{sk}^{s'}\gamma_{s1n}^{s'1'-m}-\right.$$
$$\left.-\frac{(n+1)\left(\dot{a}_{sk}^{s'}+2\dot{R}_k\varepsilon_{sk}^{s'}\right)\dot{p}_k^{1'}\beta_{1sn}^{1's'-m}}{(s+1)}+\ddot{p}_k^{1'}a_{sk}^{s'}\phi_{s1n}^{s'1'-m}\right]+$$
$$+\frac{\sigma(n^2-1)(n+2)\varepsilon_{nk}^{m}}{\rho_0R_k}+\psi_{nk}^{m}=$$
$$=\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{K}\left[-\frac{3(2n-1)(n+1)R_k^{n-2}B_{0j}\dot{p}_k^{1'}C_{0(n-1)kj}^{0(n-1)'}\beta_{(n-1)1n}^{(n-1)'1'-m}}{2nd_{kj}^{n}}+\right. \tag{5}$$
$$+\frac{(2n+1)\left(R_k^nB_{0j}C_{0nkj}^{0m}\right)'}{d_{kj}^{n+1}}+$$
$$+\sum_{s=n-1}^{n+1}\left(\frac{3\left(B_{0j}a_{sk}^{s'}C_{01kj}^{01'}\right)'\gamma_{1sn}^{1's'-m}}{2d_{kj}^2}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{3(n+1)B_{0j}\left(\dot{a}_{sk}^{s'}+2\dot{R}_k\varepsilon_{sk}^{s'}\right)C_{01kj}^{01'}\beta_{1sn}^{1's'-m}}{2(s+1)d_{kj}^2}\right)\right],$$
$$n=2,\ 3,\ \ldots,\ m=-n,-n+1,\ \ldots,\ n.$$

Здесь $p_k^{\mp1}=(x_k\pm iy_k)/2$, $p_k^{0}=z_k$, $p_k = p_{k0}(R_0/R_k)^{3\kappa}$ – давление в пузырьке; $p_{k0} = p_0 + (2\sigma/R_0)$ – его начальное значение; d_{kj} – расстояние между центрами k-го и j-го пузырьков; $B_{0k}^{0} = -R_k^2\dot{R}_k$; точка сверху, как и штрих около выражений в круглых скобках $(abc)'$, означает дифференцирование по времени, наличие сомножителей с повторяющимися верхними индексами со штрихами (одним или двумя) подразумевает суммирование в диапазоне значений, указываемых этими индексами, например: $\dot{p}_k^{1'}\dot{p}_k^{1''}\beta_{110}^{1'1''0}=\sum_{b=-1}^{1}\sum_{q=-1}^{1}\dot{p}_k^{b}\dot{p}_k^{q}\beta_{110}^{bq0}$, $\dot{p}_k^{1'}\dot{a}_{sk}^{s'}\gamma_{s1n}^{s'1'm}=\sum_{b=-1}^{1}\sum_{q=-s}^{s}\dot{p}_k^{b}\dot{a}_{sk}^{q}\gamma_{s1n}^{qbm}$; $C_{n\gamma kj}^{m\varsigma}=C_{n\gamma kj}^{m\varsigma}(t)=C_{n\gamma}^{m\varsigma}Y_{n+\gamma}^{m-\varsigma}(\theta_{kj},\varphi_{kj})$, $\alpha_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta}$, $\beta_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta}$, $\gamma_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta}$, $\phi_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta}$, $C_{n\gamma}^{m\varsigma}$ – числа, определяемые следующими выражениями:

$$\alpha_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta}=\frac{2\vartheta+1}{4\pi}\frac{(\vartheta-|\zeta|)!}{(\vartheta+|\zeta|)!}\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,Y_\eta^{\nu}(\theta,\varphi)\,Y_\xi^{\psi}(\theta,\varphi)\,Y_\vartheta^{\zeta}(\theta,\varphi)\,d\theta d\varphi,$$
$$\beta_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta}=\frac{\eta(\eta+1)+\xi(\xi+1)-\vartheta(\vartheta+1)}{2}\alpha_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta},$$
$$\gamma_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta}=2\alpha_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta}-\beta_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta},$$

$$\phi_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta} = \frac{2(2-\vartheta)}{3}\alpha_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta} - \beta_{\eta\xi\vartheta}^{\nu\psi\zeta},$$

$$C_{n\gamma}^{m\varsigma} = (-1)^{n+\frac{|m-\varsigma|-|m|-|\varsigma|}{2}}\frac{(n+\gamma-|m-\varsigma|)!}{(n-|\varsigma|)!(\gamma+|\varsigma|)!}.$$

Здесь $\psi_{0k}, \psi_{1k}^m, \psi_{mk}^m, \Delta_k$ – поправки, учитывающие влияние вязкости и сжимаемости жидкости, определяемые как

$$\psi_{0k} = \frac{4\nu_L \dot{R}_k}{R_k},\quad \psi_{1k}^m = \frac{18\nu_L \dot{p}_k^m}{R_k},$$

$$\psi_{nk}^m = \frac{2(n+1)\nu}{R_k}\left((n+2)\dot{a}_{nk}^m + 2(n-1)\dot{R}_k\varepsilon_{nk}^m\right),$$

$$\Delta_k = -\frac{\dot{R}_k}{c_L}\left(R_k\ddot{R}_k + \frac{\dot{R}_k^2}{2} + \frac{p_{bk}-p_L}{\rho_L}\right) - \\ - \frac{R_k}{c_L}\left(\frac{\dot{p}_{bk}-\dot{p}_L}{\rho_L} - \frac{4\nu_L\ddot{R}_k}{R_k}\right),$$

где c_L – скорость звука в жидкости ($c_L = 1500$ м/с).

Уравнения (3)–(5) получены в [35] методом сферических функций.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Для оценки влияния взаимодействия пузырьков в кластере их динамика сравнивается с динамикой одиночных пузырьков в тех же условиях. Давление в одиночном пузырьке обозначается как p_b, его начальное значение – p_{b0}. Основные особенности динамики пузырьков в кластере и их сжатия при воздействии (1) иллюстрируются на примере кластера кубической структуры (рис. 1) с начальным расстоянием между центрами соседних пузырьков $d_0 = 20R_0$ и числом пузырьков $K = 57$. Пузырьки кластеров кубической структуры можно разбить на несколько групп, в зависимости от начальной удаленности их центров от центра кластера $r_{\mathrm{cl}\,k,0} = r_{\mathrm{cl}\,k}(0)$, где $r_{\mathrm{cl}\,k}(t)$ – текущее расстояние между центрами k-го пузырька и кластера. Динамика пузырьков каждой из этих групп идентична: они совершают одинаковые радиальные пульсации, одинаково перемещаются вдоль прямых, проходящих через их центры и центр кластера, и одинаково деформируются. В частности, кластер с $K = 57$ состоит из шести таких групп с $r_{\mathrm{cl}\,k,0}/d_0 = 0$ (1 пузырек), 1 (6 пузырьков), $\sqrt{2}$ (12 пузырьков), $\sqrt{3}$ (8 пузырьков), 2 (6 пузырьков), $\sqrt{5}$ (24 пузырька).

Особенности динамики пузырьков при однократном импульсном воздействии. Рис. 2 иллюстрирует динамику одиночного пузырька в ходе его отклика на импульсное возбуждение (1) в рассматриваемых условиях при длительности импульса t_0 больше, равной и меньше периода $t_{\mathrm{sing}} = 1/f_{\mathrm{sing}}$ собственных колебаний одиночного пузырька. Приведено изменение относительного давления в пузырьке ($p_b/p_{b0} < 1$ соответствуют расширению пузырьков, $p_b/p_{b0} > 1$ – их сжатию, а $p_b/p_{b0} = 1$ – равновесному состоянию). Видно, что при всех значениях t_0 колебания давления в одиночном пузырьке монотонно затухают. Со временем частота этих колебаний стремится к собственной частоте f_{sing}. Максимум амплитуды колебаний при импульсном воздействии с $t_0 = t_{\mathrm{sing}}$ больше, чем при меньшем и большем t_0. Наряду с радиальными колебаниями пузырьков в настоящей работе рассматриваются также и их перемещения и деформации, но только

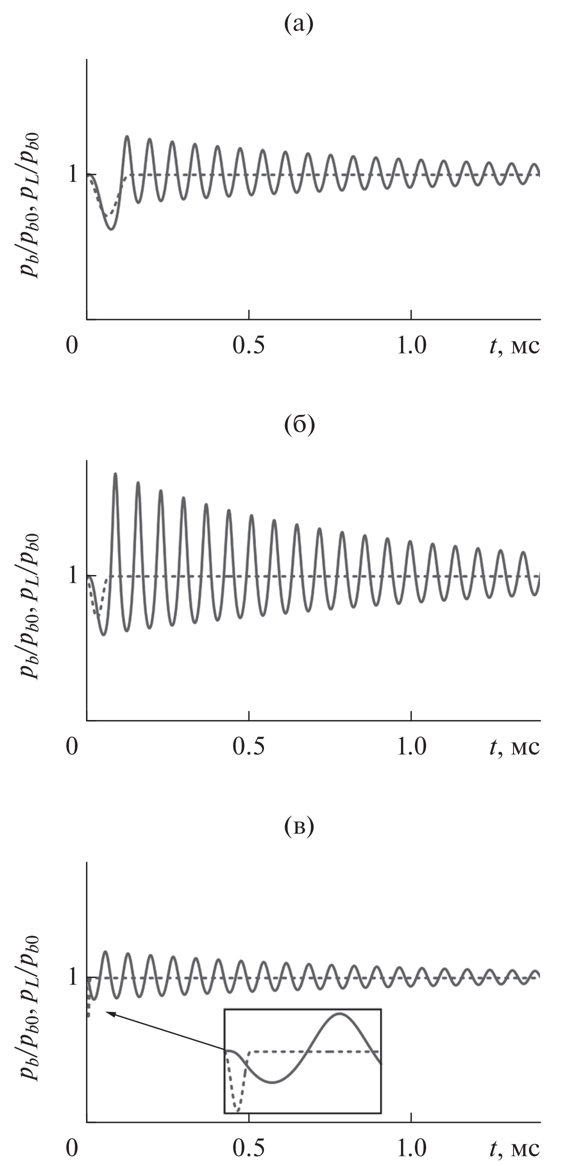

Рис. 2. Изменения относительного давления в одиночном пузырьке (сплошные кривые) и окружающей жидкости (пунктирные кривые) при $p_a = 0.4p_{L\,\min}$: (а) – $t_0 \approx 0.135$ мс > t_{sing}; (б) – $t_0 = t_{\mathrm{sing}} = 0.07$ мс; (в) – $t_0 \approx 0.0135$ мс < t_{sing}.

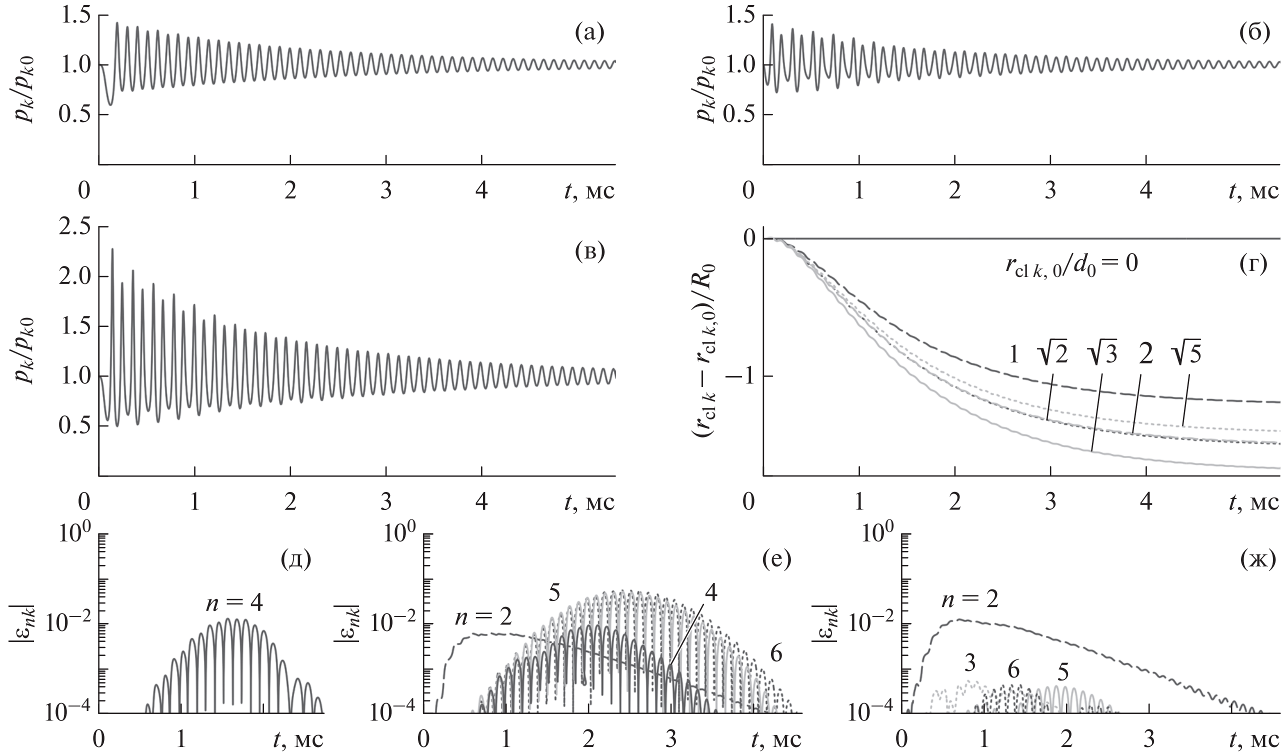

Рис. 3. Изменения относительного давления в центральном пузырьке кластера при $p_a = 0.4p_{L\,\min}$, $d_0 = 20R_0$, $K = 57$: (а) – $t_0 \approx 0.2$ мс $> t_{\mathrm{cl}}$, (б) – $t_0 \approx 1/37$ мс $< t_{\mathrm{cl}}$, (в) – $t_0 = t_{\mathrm{cl}} \approx 0.11$ мс; (г) – относительное смещение центров пузырьков кластера вдоль прямых, проходящих через эти центры и центр кластера при $t_0 = t_{\mathrm{cl}}$; (д)–(ж) – изменение амплитуд несферичности (приведены только те гармоники, которые соответствуют четырем максимальным значениям их амплитуды): (д) – центрального пузырька кластера ($r_{\mathrm{cl}\,k,\,0}/d_0 = 0$), (е) – ближайших к нему пузырьков группы с $r_{\mathrm{cl}\,k,\,0}/d_0 = 1$, (ж) – периферийных пузырьков группы с $r_{\mathrm{cl}\,k,\,0}/d_0 = \sqrt{5}$ при $t_0 = t_{\mathrm{cl}}$.

такие, которые возникают в результате взаимодействия между пузырьками. Поэтому центр одиночного пузырька в ходе колебаний остается неподвижным, а его форма сохраняется сферической.

Рис. 3 демонстрирует динамику пузырьков в кластере в ходе их отклика на возбуждение (1) при длительности импульса t_0 больше, равной и меньше t_{cl}. Амплитуда возбуждения здесь такая же, как и в случае одиночного пузырька на рис. 2. Вместе с особенностями изменения относительного давления в пузырьках рис. 3 иллюстрирует также пространственные перемещения пузырьков в кластере и их несферические деформации. Изменение давления приведено только для центрального пузырька кластера, поскольку именно в этом пузырьке давление принимает свое максимальное для кластера значение. Аналогично перемещения пузырьков и их деформации показаны только для длительности импульса $t_0 = t_{\mathrm{cl}}$, при которой они равны своим максимальным по t_0 значениям или незначительно отличаются от них.

Как и в случае с одиночным пузырьком, наибольшее значение максимума амплитуды колебаний давления в центральном пузырьке кластера (рис. 3а–3в) достигается при воздействии с длительностью импульса $t_0 \approx t_{\mathrm{cl}}$. По сравнению с одиночным пузырьком затухание колебаний давления в центральных пузырьках кластера при воздействии с t_0 в окрестности $t_0 = t_{\mathrm{cl}}$ более медленное, чем у одиночных пузырьков при $t_0 = t_{\mathrm{sing}}$, и имеет немонотонный характер. При этом со временем частота колебаний стремится к собственной частоте кластера, которая при каждом значении t_0 оказывается несколько отличной от f_{cl} в силу небольших перемещений пузырьков. В частности, из рис. 3г следует, что при $t_0 = t_{\mathrm{cl}}$ все пузырьки кластера в ходе колебаний смещаются к его центру (за исключением центрального, который остается неподвижным в силу симметричного расположения окружающих пузырьков). В результате этого радиус кластера R_{cl} со временем несколько уменьшается, что и приводит к изменению его собственной частоты. Сопоставление рис. 3а–3в с рис. 2 свидетельствует, что частота затухающих колебаний давления у пузырьков кластера заметно меньше, чем у одиночного пузырька, что согласуется с выражением (2), связывающим f_{cl} с f_{sing}. В ходе колебаний несферичность всех пузырьков сначала возрастает до некоторого максимального уровня, а затем постепенно убывает. При $t_0 = t_{cl}$ (рис. 3д–3ж) максимум амплитуды несферичности у всех пузырьков примерно одинаковый. При этом центральный пузырек деформируется преимущественно по четвертой гармонике (рис. 3д), периферийный – по второй (рис. 3ж), а пузырьки между центром и периферией – сразу по нескольким гармоникам (рис. 3е). Такая разница во многом обусловлена различием в скорости поступательного движения пузырьков: в центре кластера она равна нулю, а по мере удаления от него имеет тенденцию к росту.

Экстремальные давления в пузырьках. Рис. 4 иллюстрирует зависимости максимальных давлений в одиночном пузырьке и пузырьках кластера от длительности импульса возбуждения t_0. В случае одиночного пузырька (рис. 4а) в окрестности $t_0 = t_{sing}$ имеется явно выраженная область, в которой максимальные давления в пузырьке оказываются заметно выше своих значений на периферии этой области. В данной (резонансной) области с ростом длительности импульса t_0 до $t_0 \approx t_{sing}$ величина нормированных максимальных давлений $p_{b\max}/p_{b0}$ монотонно и относительно плавно возрастает до около 1.7, а затем также монотонно, но несколько более резко убывает. Справа от этой основной резонансной области можно выделить также еще одну, меньшую по размерам, область в окрестности $t_0 \approx 3.7t_{sing}$ с небольшим, но заметным локальным увеличением максимума давления.

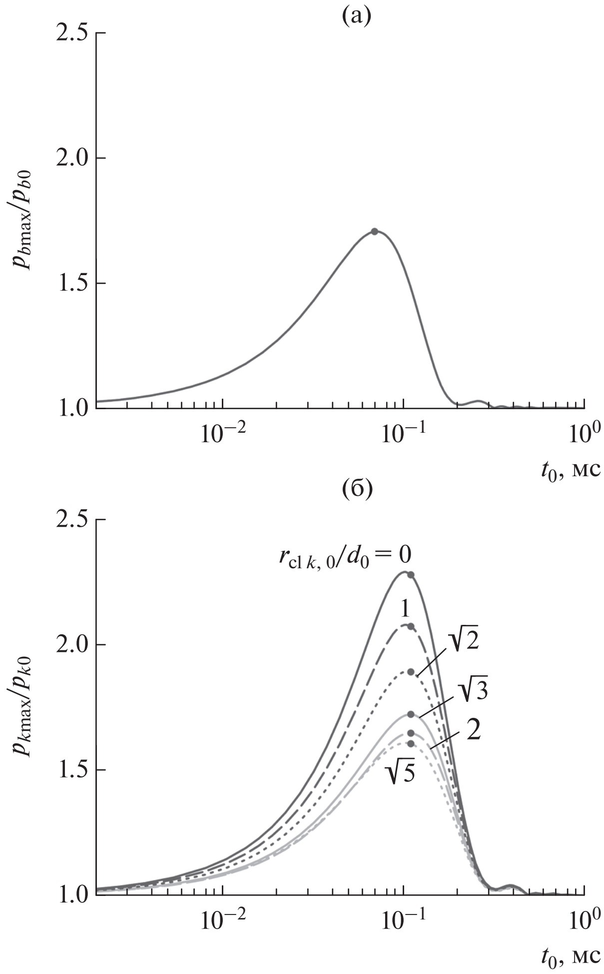

Рис. 4. Зависимости относительных максимальных давлений (а) в одиночном пузырьке и (б) пузырьках кластера ($d_0 = 20R_0$, $K = 57$) при $p_a = 0.4\,p_{L\min}$; точки – значения, соответствующие $t_0 = t_{sing} \approx 0.07$ мс и $t_0 = t_{cl} \approx 0.11$ мс.

На рис. 4б видно, что указанные особенности зависимостей от t_0 максимальных давлений в одиночном пузырьке имеют место и для пузырьков кластера с учетом того, что роль t_{sing} играет здесь t_{cl}. Вместе с тем взаимодействие между пузырьками в кластере приводит к ряду отличий. В частности, в пределах резонансной области максимальные давления монотонно возрастают по мере приближения пузырьков к центру кластера. На периферии кластера максимальные давления в пузырьках меньше, чем в случае одиночного пузырька, тогда как в пузырьках центральной области кластера они, наоборот, больше. При возбуждении кластера с $t_0 = t_{cl}$ максимум давления в его центральном и периферийном пузырьках оказывается соответственно на 34% выше и на 6% ниже, чем в одиночном пузырьке при его возбуждении с $t_0 = t_{sing}$.

Влияние числа пузырьков в кластере, расстояния между пузырьками, амплитуды воздействия и структуры кластера. В настоящем разделе рассматривается влияние параметров кластера K и d_0, амплитуды импульса воздействия p_a и структуры кластера на величину максимальных давлений в пузырьках при варьировании длительности импульса t_0 в окрестности $t_0 = t_{cl}$. При этом значения K, d_0 и p_a варьируются до тех пор, пока соответствующее воздействие с длительностью $t_0 = t_{cl}$ не нарушает условие малости несферических деформаций пузырьков. В качестве критерия малости принято неравенство $\varepsilon_{nk}^2 < 0.1$.

На рис. 5 представлено изменение давления в центральном и ближайших к нему пузырьках кластера кубической структуры с $d_0 = 20R_0$, $K = 57$ при воздействии с длительностью импульса $t_0 = t_{cl}$ при довольно высокой амплитуде $p_a = 8p_{L\min}$. Деформации пузырьков не учитывались: расчет проводился по уравнениям (3), (4) с $a_{nk}^m = 0$. Видно, что в данном случае максимальное давление в центральном пузырьке примерно в 125 раз боль-

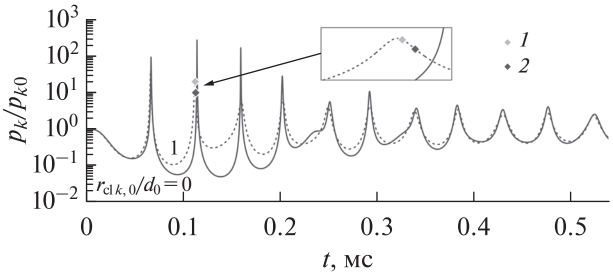

Рис. 5. Изменение давления в центральном и ближайших к нему пузырьках кластера при $d_0 = 20R_0$, $K = 57$, $t_0 = t_{\mathrm{cl}} \approx 0.44$ мс, $p_a = 8p_{L\,\min}$ и моделировании без учета деформаций пузырьков; *1* – момент достижения предела малых деформаций пузырька ($\varepsilon_{nk}^2 = 0.1$), *2* – момент его разрушения ($\varepsilon_{nk}^2 = 1$) при моделировании с учетом деформаций пузырьков.

ше, чем соответствующий максимум на рис. 4 при $p_a = 0.4p_{L\,\min}$. Однако, если деформации пузырьков учитывать, то их величина у пузырьков, ближайших к центральному ($r_{\mathrm{cl}\,k,0}/d_0 = 1$), становится немалой вскоре после их второго коллапса. А через малый промежуток времени данные пузырьки разрушаются (момент разрушения определяется равенством $\varepsilon_{nk}^2 = 1$). Варианты, подобные приведенному на рис. 5, в настоящей работе не рассматриваются, поскольку максимальные давления в сильно несферических (а тем более в разрушенных) пузырьках могут сильно отличаться от тех, что можно получить при игнорировании несферичности пузырьков. Таким образом, принятое в настоящей работе допущение о малости несферических деформаций пузырьков кластера существенно сужает диапазоны рассматриваемых параметров кластера и воздействия на него.

Рис. 6 иллюстрирует изменение зависимостей максимальных давлений в центральных пузырьках кластера от длительности импульса t_0 в окрестности $t_0 = t_{\mathrm{cl}}$ при варьировании K, d_0 и p_a и структуры кластера в рассматриваемых условиях. Во всех

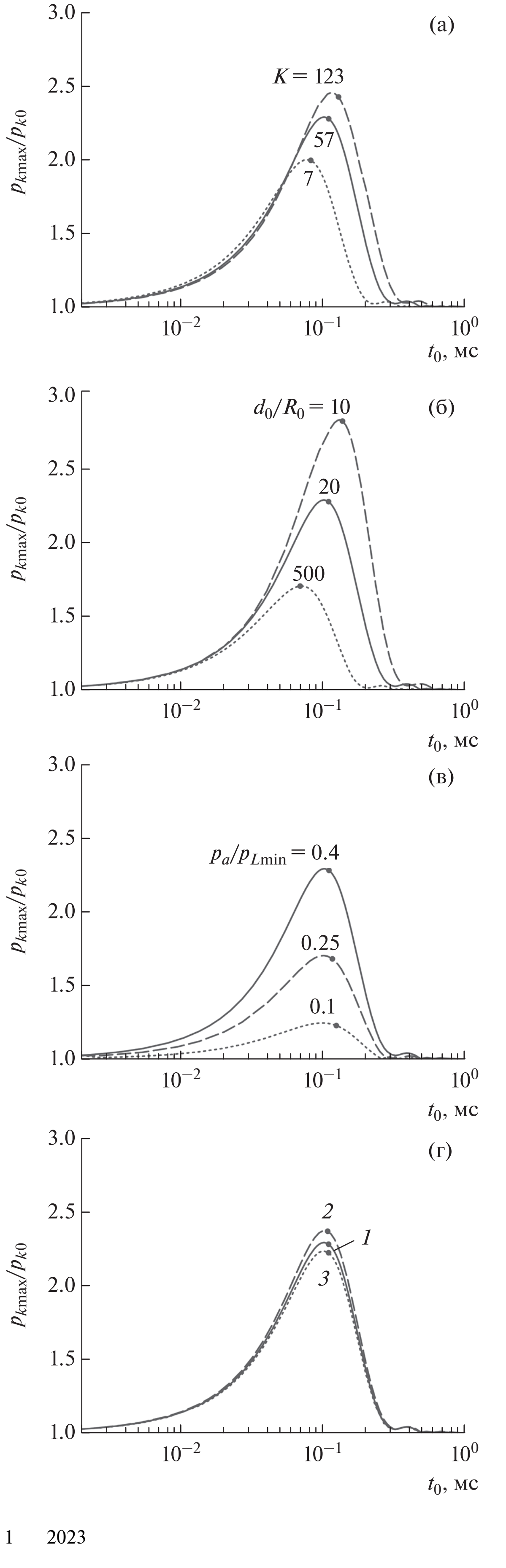

Рис. 6. Зависимости максимальных давлений в центральных пузырьках кластеров при ряде значений: (а) – числа пузырьков в кластере K ($p_a = 0.4\,p_{L\,\min}$, $d_0 = 20R_0$, кластер кубической структуры), (б) – расстояния между центрами пузырьков d_0 ($p_a = 0.4p_{L\,\min}$, $K = 57$, кластер кубической структуры), (в) – амплитуды возбуждения p_a ($d_0 = 20R_0$, $K = 57$, кластер кубической структуры), (г) – при трех различных структурах кластера ($p_a = 0.4p_{L\,\min}$, $K = 57$): *1* – пузырьки находятся в узлах равномерной кубической сетки, $d_0 = 20R_0$; *2* – в центре и вершинах пяти вложенных правильных многогранников, $d_{kj,0} \geq 20R_0$; *3* – распределены по объему случайным образом, $d_{kj,0} \geq 20R_0$; точки – значения, соответствующие $t_0 = t_{\mathrm{cl}}$.

случаях варьирования этих параметров зависимости максимального давления от t_0 остаются качественно подобными тем, что приведены на рис. 4. Рис. 6 также свидетельствует, что с увеличением числа пузырьков в кластере наибольшие значения максимальных давлений возрастают, увеличивается ширина резонансной области. Аналогичные особенности имеют место как при уменьшении расстояния между пузырьками, так и при увеличении амплитуды воздействия.

Для оценки влияния структуры кластера результаты для кластера кубической структуры сравниваются с результатами для кластеров стохастической структуры и кластеров, состоящих из пузырьков, расположенных в центре и вершинах правильных многогранников. Стохастический кластер состоит из пузырьков со случайным начальным расположением при условии, что расстояние между центрами соседних пузырьков $d_{kj,\,0} \geq 20R_0$. Кластер с пузырьками в центре и вершинах правильных многогранников состоит из 57 пузырьков, один из которых находится в центре кластера, а другие расположены на пяти концентрических сферических поверхностях, удаленных от центра кластера на расстояния d_0, $1.59d_0$, $2d_0$, $2.3d_0$, $2.36d_0$ соответственно. По мере удаления от центра кластера первыми размещаются 12 пузырьков, находящихся в вершинах икосаэдра, далее – 20 пузырьков в вершинах додекаэдра, 12 пузырьков в вершинах икосаэдра, 6 пузырьков в вершинах октаэдра и 6 пузырьков в вершинах октаэдра. Многогранники ориентированы так, что минимальное расстояние между центрами пузырьков, расположенных на соседних поверхностях, составляет $20R_0$. На рис. 6г видно, что при изменении структуры кластера с кубической на стохастическую или при переходе к кластеру со структурой, определяемой вложенными многогранниками, зависимости максимальных давлений в центральном пузырьке кластера от t_0 меняются несущественно. Рассматриваемое варьирование числа пузырьков в кластере, расстояния между пузырьками, амплитуды воздействия и структуры кластера приводит к повышению давления в пузырьках по отношению к его начальному значению не более чем в несколько раз (рис. 6).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование влияния взаимодействия между пузырьками в сферическом кластере на величину достигаемых в них давлений в ходе отклика на однократное импульсное разрежение жидкости. Изучены зависимости этих давлений от характеристик кластера, параметров воздействия и структуры кластера. В отличие от известных работ, рассмотрение ограничивалось лишь теми вариантами, в которых все пузырьки кластера в ходе отклика сохранялись слабонесферическими. В рамках принятой модели выполнение данного условия контролировалось естественным образом по результатам расчетов несферических деформаций пузырьков. Установлено следующее.

1. В отличие от одиночного пузырька, характеризующего динамику пузырьков без учета их взаимодействия, затухание колебаний давления в пузырьках кластера в ходе отклика является более медленным и немонотонным.

2. Как и в случае одиночного пузырька, при отклике кластера на возбуждение с длительностью в окрестности значений, равных периоду собственных колебаний кластера, имеется явно выраженная (резонансная) область, в которой максимальные давления в пузырьках оказываются заметно выше соответствующих значений на периферии этой области. В пределах данной области с ростом длительности импульса величина максимальных давлений сначала монотонно и относительно плавно возрастает, а затем также монотонно, но более резко убывает. В рамках данной области максимальные давления в пузырьках по мере их приближения к центру кластера монотонно возрастают. На периферии кластера они оказываются меньше, а в центральной области кластера больше, чем в случае одиночного пузырька.

3. При варьировании числа пузырьков в кластере, расстояния между пузырьками и амплитуды воздействия характер зависимостей максимальных давлений от длительности импульса не изменяется. При этом с увеличением числа пузырьков в кластере и амплитуды воздействия, а также при уменьшении расстояния между пузырьками максимальные давления в пузырьках и ширина резонансной области возрастают.

4. При изменении структуры кластера с кубической на стохастическую (по начальному положению пузырьков) или при переходе к кластеру из пузырьков, расположенных в центре и вершинах вложенных правильных многогранников, зависимости максимальных давлений в центральном пузырьке кластера от длительности импульса меняются не сильно.

5. В рассмотренных диапазонах варьирования числа пузырьков в кластере расстояния между пузырьками, амплитуды и длительности импульса воздействия, а также в рассмотренных вариантах структуры кластера максимальное повышение давления в пузырьках по отношению к его начальному значению не превышает нескольких раз.

6. К результатам, полученным при отсутствии контроля выхода за рамки принятого допущения о том, что пузырьки в кластере сохраняются сферическими (как это зачастую делается), следует относиться с осторожностью. В частности, полученные таким образом максимальные давления в пузырьках могут оказаться сильно завышенными.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 21-11-00100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 2. М.: Наука, 1987. 360 с.
3. *Кедринский В.К.* Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 434 с.
4. *Аганин А.А., Халитова Т.Ф.* Деформация ударной волны при сильном сжатии несферических пузырьков // ТВТ. 2015. Т. 53. № 6. С. 923.
5. *Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Ильгамов М.А., Топорков Д.Ю.* Экстремальная фокусировка энергии при ударном сжатии парового пузырька в углеводородных жидкостях // ТВТ. 2019. Т. 57. № 2. С. 253.
6. *Brennen C.E.* Bubbly Cloud Dynamics and Cavitation. Invited Lecture at the Acoustical Society of America Meeting. June 2007. Salt Lake City, Utah, 2007.
7. *Shimada M., Matsumoto Y., Kobayashi T.* Dynamics of the Cloud Cavitation and Cavitation Erosion // Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, B-hen. 1999. V. 65. № 634. P. 1934.
8. *Ma J., Chahine G.L., Hsiao C.-T.* Spherical Bubble Dynamics in a Bubbly Medium Using an Euler–Lagrange Model // Chem. Eng. Sci. 2015. V. 128. P. 64.
9. *Doinikov A.A.* Translational Motion of Two Interacting Bubbles in a Strong Acoustic Field // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. № 2. P. 026301.
10. *Harkin A., Kaper T.J., Nadim A.* Coupled Pulsation and Translation of Two Gas Bubbles in a Liquid // J. Fluid Mech. 2001. V. 445. P. 377.
11. *Dear J.P., Field J.E.* A Study of the Collapse of Arrays of Cavities // J. Fluid Mech. 1988. V. 190. P. 409.
12. *Blake J.R., Robinson P.B., Shima A., Tomita Y.* Interaction of Two Cavitation Bubbles with a Rigid Boundary // J. Fluid Mech. 1993. V. 255. P. 707.
13. *Bremond N., Arora M., Ohl C.-D., Lohse D.* Controlled Multibubble Surface Cavitation // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. № 22. P. 224501.
14. *Kornfeld M., Suvorov L.* On the Destructive Action of Cavitation // J. Appl. Phys. 1944. V. 15. P. 495.
15. *Chahine G.L.* Pressure Generated by a Bubble Cloud Collapse // Chem. Eng. Commun. 1984. V. 28. № 4–6. P. 355.
16. *Matsumoto Y.* Bubble and Bubble Cloud Dynamics // AIP Conf. Proc. 2000. V. 524. P. 65.
17. *Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T. Jr., Taleyarkhan R.P.* Theory of Supercompression of Vapor Bubbles and Nanoscale Thermonuclear Fusion // Phys. Fluids. 2005. V. 17. № 10. P. 107106.
18. *Нигматулин Р.И., Лэхи Р.Т., Талейархан Р.П., Вест К.Д., Блок Р.С.* О термоядерных процессах в кавитирующих пузырьках // УФН. 2014. Т. 184. № 9. С. 947.
19. *Wang Y.-C., Brennen C.E.* Shock Wave Development in the Collapse of a Cloud of Bubbles // ASME Cavitation Multiphase Flow Forum. 1994. V. FED-194. P. 15.
20. *Wang Y.-C., Brennen C.E.* The Noise Generated by the Collapse of a Cloud of Cavitation Bubbles // ASME/JSME Symp. on Cavitation and Gas-Liquid Flow in Fluid Machinery and Devices. 1995. V. FED-226. P. 17.
21. *Brennen C., Reisman G., Wang Y.-C.* Shock Waves in Cloud Cavitation // 21st Symp. Naval Hydrodynamics. Washington, DC: National Acad. Press, 1997. P. 756.
22. *Reisman G.E., Wang Y.-C., Brennen C.E.* Observations of Shock Waves in Cloud Cavitation // J. Fluid Mech. 1998. V. 355. P. 255.
23. *Wang Y.-C.* Effects of Nuclei Size Distribution on the Dynamics of a Spherical Cloud of Cavitation Bubbles // J. Fluids Eng. 1999. V. 121. № 4. P. 881.
24. *Yoshizawa S., Sugiyama K., Matsumoto Y.* Acoustic Emission from Micro Bubbles in Ultrasound Field // CAV 2001: 4th Int. Symp. on Cavitation. Pasadena, CA, USA: California Institute of Technology, 2001. Sess. A2. 003.
25. *Matsumoto Y., Yoshizawa S.* Behaviour of a Bubble Cluster in an Ultrasound Field // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2005. V. 47. № 6–7. P. 591.
26. *Насибуллаева Э.Ш., Ахатов И.Ш.* Исследование диффузионной устойчивости пузырьков в кластере // ПМТФ. 2007. Т. 48. № 4. С. 40.
27. *Nasibullaeva E.S., Akhatov I.S.* Bubble Cluster Dynamics in an Acoustic Field // JASA. 2013. V. 133. № 6. P. 3727.
28. *Галимзянов М.Н.* Волны давления в трубе, заполненной жидкостью при наличии в ней пузырьковой области в форме тора // Многофазные системы. 2021. Т. 16. № 3–4. С. 112.
29. *Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Агишева У.О.* О фокусировке волн давления в тороидальном пузырьковом кластере // Вестн. Башк. ун-та. 2022. Т. 27. № 2. С. 275.
30. *Doinikov A.A.* Mathematical Model for Collective Bubble Dynamics in Strong Ultrasound Fields // JASA. 2004. V. 116. № 2. P. 821.
31. *Губайдуллин А.А., Губкин А.С.* Особенности динамического поведения пузырьков в кластере, вызванные их гидродинамическим взаимодействием // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22. № 4. С. 471.
32. *Aganin I.A., Davletshin A.I.* Dynamics of Interacting Bubbles Located in the Center and Vertices of Regular Polyhedra // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1588. P. 012001.
33. *Aganin I.A., Davletshin A.I.* Dynamics of Gas Bubbles Inside a Ball-like Area at the Nodes of a Uniform Cubic Mesh under Sudden Liquid Pressure Rise // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. № 7. P. 1148.
34. *Tiwari A., Pantano C., Freund J.B.* Growth-and-collapse Dynamics of Small Bubble Clusters Near a Wall // J. Fluid Mech. 2015. V. 775. P. 1.
35. *Aganin A.A., Davletshin A.I.* Equations of Interaction of Weakly Non-spherical Gas Bubbles in Liquid // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39. № 8. P. 1047.
36. *Aganin I.A., Davletshin A.I.* Dynamics of Gas Bubbles in a Cluster under their Pressure Rise // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. P. 2082.
37. *D'Agostino L., Brennen C.E.* Linearized Dynamics of Spherical Bubble Clouds // J. Fluid Mech. 1989. V. 199. P. 155.
38. *Ma J., Hsiao C.T., Chahine G.L.* Numerical Study of Acoustically Driven Bubble Cloud Dynamics near a Rigid Wall // Ultrason. Sonochem. 2018. V. 40. P. 944.