

УДК 586.27

## АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ ВСТРЕЧНЫХ ПОТОКОВ

© 2023 г. А. И. Филиппов, О. В. Ахметова\*, М. А. Зеленова

*Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*

\*E-mail: ahoksana@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.02.2022 г.

После доработки 25.09.2022 г.

Принята к публикации 13.10.2022 г.

Получено решение нестационарной задачи о теплообмене встречных потоков, имеющих место при течении жидкости по петле. На дальнем конце петли задано равенство температур, а разность температур на входе и выходе определяется на основе расчетов при заданной температуре входящего теплоносителя. Показано, что формирование теплофизических процессов в рассматриваемой теплообменной системе определяется безразмерным конвективно-кондуктивным параметром  $Pv$ , представляющим собой соотношение вкладов конвекции и теплоотдачи в теплообмен системы. Решение представлено в пространстве интегрального преобразования Лапласа–Карсона. Построение оригиналов выполнено на основе алгоритма численного обращения ден Изегера, поскольку получение их аналитическими методами затруднено. Представлены пространственно-временные зависимости температурных изменений нисходящего и восходящего потоков, которые позволяют расширить существующие представления о физических процессах, для различных значений безразмерного конвективно-кондуктивного параметра. Показано, что при увеличении  $Pv$  вклад конвекции, как и кинематических температурных волн, увеличивается.

DOI: 10.31857/S0040364423020059

### ВВЕДЕНИЕ

Противоточный теплообмен — обмен энергией между двумя текущими в противоположных направлениях потоками — процесс, широко встречающийся в природе от океанских течений [1, 2] до кровотока млекопитающих [3]. Этот механизм используется также в теплообменных аппаратах [4], при промывке и бурении скважин [5–7] и т.д.

Разнообразие условий возникновения встречных потоков определяет широкий круг задач, большинство из которых исследованы численно [6, 8, 9] или методами структурной теории распределенных систем [4]. Аналитические же решения ограничиваются стационарными моделями [10]. Таким образом, несмотря на большое количество математических методов исследования проблем теплообмена, расширение круга актуальных задач теплообмена встречных потоков, допускающих решение, связано с необходимостью развития фундаментальных разделов математической и вычислительной физики. Значимость аналитических решений заключается в том, что они (даже в частных случаях) позволяют выполнять более глубокий анализ происходящих процессов и верифицировать численные модели. Достижения в области вычислительной техники и программирования обеспечивают возможность как создания принципиально новых моделей теплообмена, так и

расширения области применения аналитических решений для практических расчетов. Здесь показаны новые возможности в исследовании теплообмена встречных потоков, полученные комплексированием аналитического решения в изображениях и численного алгоритма обратного преобразования.

В данной статье исследуются нестационарные поля температуры потока, в котором жидкость течет по петле, так что на входе и выходе ( $z_d = 0$ ) температуры различны, а на дальнем конце петли ( $z_d = D$ ) задано равенство температур потоков при равенстве абсолютных значений их средних скоростей. В представленной модели на входе в петлю ( $z_d = 0$ ) в начальный момент создается и далее поддерживается скачок температуры закачиваемой жидкости, величина которого задается приращением  $\theta_0$  (разница температуры теплоносителя на входе в петлю и начальной температуры системы), известны объемная теплоемкость циркулирующей жидкости  $\rho c$  и коэффициент теплоотдачи системы  $\alpha$ . Целью динамического анализа теплообмена такой системы является сопоставление температуры на входе и выходе, а также скорости теплопередачи между двумя разнонаправленными течениями жидкости. Используя полученные решения, можно прогнозировать, как изменение независимых переменных системы позволит оптимизировать теплообмен в реальных технических устройствах.

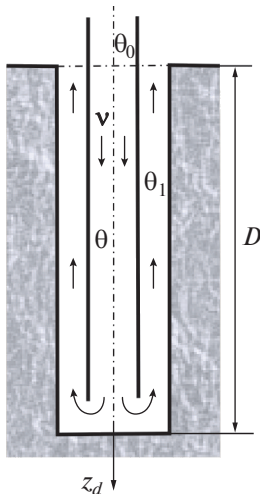


Рис. 1. Геометрия задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуемая система состоит из двух коаксиальных цилиндрических труб (рис. 1). Во внутреннюю трубу подается жидкий теплоноситель со скоростью  $v$ . В начальный момент времени температура теплоносителя на входе во внутреннюю трубу ( $z_d = 0$ ) изменяется скачком на величину  $\theta_0$ . На границе  $z_d = D$  поток меняет направление и возвращается по пространству между внутренней и внешней трубой со скоростью  $-v$ . Приращение температуры нисходящего и восходящего потоков от начальной температуры системы обозначены  $\theta$  и  $\theta_1$  соответственно.

Уравнение, описывающее температурное поле нисходящего потока, для нестационарного случая записывается как

$$\frac{\partial \theta}{\partial t_d} + v \frac{\partial \theta}{\partial z_d} = -\frac{\alpha}{\rho c} (\theta - \theta_1). \tag{1}$$

Аналогичное уравнение для температурного поля восходящего потока представляется в виде

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t_d} - v \frac{\partial \theta_1}{\partial z_d} = \frac{\alpha}{\rho c} (\theta - \theta_1). \tag{2}$$

Отметим, что уравнения (1) и (2) учитывают два основных конкурирующих теплофизических процесса. Основным является конвективный теплоперенос, представленный вторыми слагаемыми в левой части уравнений. Этот теплоперенос представлен встречными и гидродинамически равномошными течениями, поскольку скорости в уравнениях отличаются только знаками. Вторым является процесс теплообмена между встречными потоками, который представлен правыми частями в уравнениях (1) и (2). Для простоты этот процесс аппроксимирован соотношением Ньютона–Рихмана.

На входе внутренней трубы ( $z_d = 0$ ) в момент времени  $t_d = 0$  начинается и далее ( $t_d > 0$ ) поддерживается подача теплоносителя с температурой,

которая отличается от температуры системы в момент времени  $t_d = 0$  на величину  $\theta_0$ , что является источником температурных изменений в рассматриваемой системе. Приняв за начало отсчета температуру системы в момент времени  $t_d = 0$ , граничное условие на входе в петлю запишем как

$$\theta|_{z_d=0} = \theta_0, \quad t_d \geq 0.$$

На границе смены направления потока задано условие равенства температур

$$\theta|_{z_d=D} = \theta_1|_{z_d=D}.$$

Поскольку за начало отсчета принята температура системы в момент времени  $t_d = 0$ , то начальные условия для температурных приращений представляются как

$$\theta|_{t_d=0} = 0, \quad 0 < z_d \leq D;$$

$$\theta_1|_{t_d=0} = 0, \quad 0 \leq z_d \leq D.$$

Если использовать безразмерные переменные с учетом характерного времени  $\tau = \rho c / \alpha$ , размера  $D$ , максимального перепада температур  $\theta_0$

$$t = \frac{t_d}{\tau}, \quad T_1 = \frac{\theta_1}{\theta_0}, \quad T = \frac{\theta}{\theta_0}, \quad z = \frac{z_d}{D}$$

и критерияльное число

$$Pv = \frac{v \rho c}{\alpha D},$$

то безразмерная постановка примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Pv \frac{\partial T}{\partial z} = -(T - T_1), \tag{3}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - Pv \frac{\partial T_1}{\partial z} = (T - T_1), \tag{4}$$

$$T|_{z=0} = 1, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

$$T|_{z=1} = T_1|_{z=1}, \tag{6}$$

$$T|_{t=0} = 0, \quad 0 < z \leq 1, \tag{7}$$

$$T_1|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Из (3)–(7) следует, что теплофизические процессы в системе определяются только одним безразмерным конвективно-кондуктивным параметром  $Pv$ , характеризующимся соотношением вкладов конвекции и теплоотдачи в теплообмен системы.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для поиска решения поставленной задачи (3)–(7) записывается в пространстве преобразований Лапласа–Карсона с сохранением обозначения для безразмерных температур  $T, T_1$ :

$$pT + Pv \frac{\partial T}{\partial z} = -(T - T_1), \tag{8}$$

$$pT_1 - Pv \frac{\partial T_1}{\partial z} = (T - T_1), \tag{9}$$

$$T|_{z=0} = 1, \tag{10}$$

$$T|_{z=1} = T_1|_{z=1}. \tag{11}$$

Здесь  $p$  – параметр преобразования Лапласа–Карсона.

Преобразовав уравнение (8) к виду

$$T_1 = (p + 1)T + Pv \frac{\partial T}{\partial z} \quad (12)$$

и подставив выражение для  $T_1$  (12) в (9), получаем уравнение для определения безразмерных температур во внутренней трубе, т.е. в нисходящем потоке:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \omega^2 T = 0, \quad (13)$$

где  $\omega = \frac{1}{Pv} \sqrt{p(2+p)}$ .

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (13) представляется как

$$T = A \exp(\omega z) + B \exp(-\omega z).$$

Неизвестные коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются по граничным условиям (10), (11) и записываются в виде

$$A = \frac{\delta}{\delta - \gamma}, \quad B = \frac{\gamma}{\gamma - \delta},$$

где  $\gamma = (p + \omega Pv) \exp(\omega)$ ,  $\delta = (p - \omega Pv) \exp(-\omega)$ .

Окончательное выражение для безразмерной температуры нисходящего потока во внутренней трубе представлено в виде

$$T = \frac{\delta}{\delta - \gamma} \left[ \exp(\omega z) - \frac{\gamma}{\delta} \exp(-\omega z) \right]. \quad (14)$$

Согласно соотношениям (12) и (14), выражение для нормированного температурного поля восходящего потока выглядит как

$$T_1 = (p + 1) \frac{\delta}{\delta - \gamma} \left[ \exp(\omega z) - \frac{\gamma}{\delta} \exp(-\omega z) \right] + \omega Pv \frac{\delta}{\delta - \gamma} \left[ \exp(\omega z) + \frac{\gamma}{\delta} \exp(-\omega z) \right]. \quad (15)$$

Подчеркнем, что величины  $\omega$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$ , входящие в (14) и (15), являются функциями параметра преобразования Лапласа–Карсона  $p$ :

$$\omega = \frac{1}{Pv} \sqrt{p(2+p)}, \quad (16)$$

$$\gamma = (p + \omega Pv) \exp(\omega), \quad \delta = (p - \omega Pv) \exp(-\omega).$$

После подстановки (16) в (14) и (15) получаем

$$T = \frac{(p - \sqrt{p(2+p)})^2 \exp\left(-\frac{2-z}{Pv} \sqrt{p(2+p)}\right) + 2p \exp\left(-\frac{z}{Pv} \sqrt{p(2+p)}\right)}{(p - \sqrt{p(2+p)})^2 \exp\left(-\frac{2}{Pv} \sqrt{p(2+p)}\right) + 2p}, \quad (17)$$

$$T_1 = \frac{(p - \sqrt{p(2+p)})^2 \exp\left(-\frac{z}{Pv} \sqrt{p(2+p)}\right) + 2p \exp\left(-\frac{2-z}{Pv} \sqrt{p(2+p)}\right)}{(p - \sqrt{p(2+p)})^2 \exp\left(-\frac{2}{Pv} \sqrt{p(2+p)}\right) + 2p}. \quad (18)$$

Выражения (17) и (18) представляют точное решение задачи (8)–(11) в пространстве изображений Лапласа–Карсона. Для построения полей температур в нисходящем и восходящем потоках необходимо осуществить переход в пространство оригиналов. Обращение изображений такого рода в аналитической форме представляет значительные теоретические трудности. Для этого следует записать оригинал в виде интеграла Римана–Меллина, построить контур интегрирования, представить выражение этого интеграла в форме, удобной для вычисления [11].

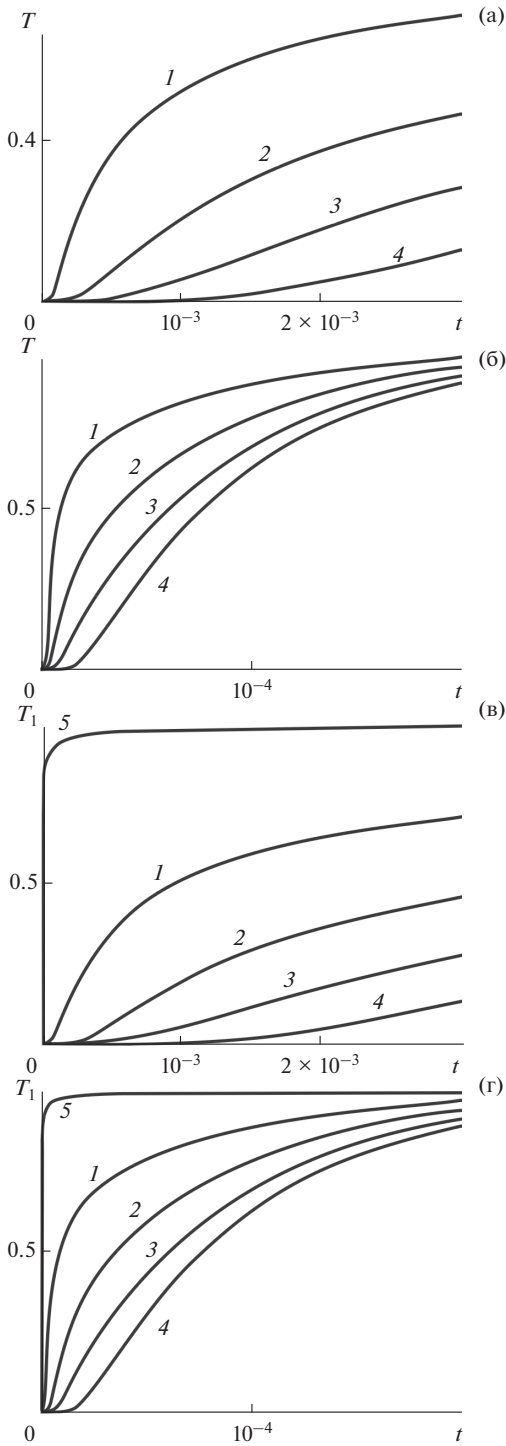
Альтернативные, менее трудоемкие подходы для расчета пространственно-временных распределений как температуры, так и ее приращений для встречных потоков основаны на использовании численных алгоритмов обращения, примером которых является алгоритм ден Изегера [12]. Этот алгоритм основан на использовании гауссовских квадратур и быстрого преобразования Фурье. Он отличается экономичностью и не требует построения контурных интегралов. Достоверность и эффективность разработанной на основе алгоритма ден Изегера программы подтверждены

авторами ранее на многочисленных теплофизических задачах [13, 14]. При этом широко использовано сопоставление с конечно-разностными расчетами, аналитическими асимптотиками, а также многими оригиналами, найденными в явном виде.

#### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Ниже приведен анализ временных и пространственных зависимостей безразмерных температур для оценки вкладов различных теплофизических процессов, построенных на основе численных расчетов с использованием алгоритма ден Изегера.

На рис. 2 представлены зависимости безразмерных температур в нисходящем и восходящем потоках от безразмерного времени в сечениях с различными координатами  $z$  при  $Pv = 0.01$ . Рис. 2а иллюстрирует процесс установления нормированного температурного поля при относительно малых значениях времени  $t < 3 \times 10^3$ . Из рисунка следует, что вблизи входа в петлю при  $z = 0.2$  происходит ускоренное установление температурного поля нисходящего потока, причем время за-



**Рис. 2.** Эволюция температурного поля нисходящего (а), (б) и восходящего (в), (г) потоков при различных значениях координаты  $z$ : 1 –  $z = 0.2$ , 2 – 0.4, 3 – 0.6, 4 – 1, 5 – 0.

паздывания, проявляющееся в поведении кривой при  $t < 10$ , убывает с уменьшением  $z$ .

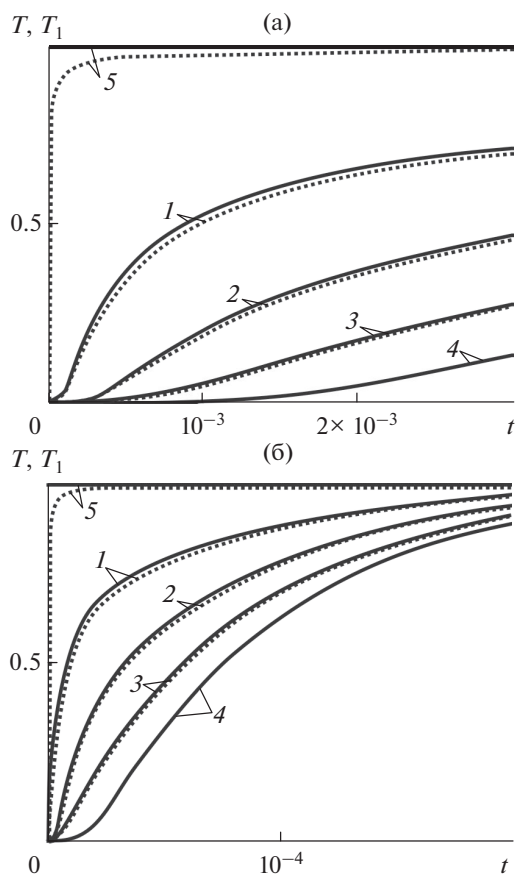
При увеличении  $z$  время запаздывания возрастает и при  $z = 1$ , т.е. в точке смены направления,

достигает  $t = 10^3$ . При этом характерное время установления нормированного температурного поля (рис. 2б) на порядок больше и достигает  $t = 2 \times 10^4$ . Сопоставление кривых 1–4 на рис. 2б позволяет сравнить темпы установления нормированного температурного поля в различных точках системы. При малых значениях  $z$  наблюдается интенсивное изменение безразмерных температур, а при больших значениях темп снижается. Сопоставление рис. 2а, 2б позволяет более детально выявить особенности поведения кривых в больших и малых временных масштабах.

Аналогичные кривые для восходящего потока приведены на рис. 2в, 2г. Сопоставление температурных кривых для нисходящего и восходящего потоков свидетельствует об идентичности процессов установления нормированного температурного поля. Рис. 2в, 2г отличаются наличием кривой 5, которая отражает температуру на выходе в восходящем потоке. Эта кривая представляет особую важность, поскольку позволяет оценить интегральную величину теплообмена. При анализе этой кривой следует иметь в виду, что безразмерная температура на входе нисходящего потока постоянна и ее значение поддерживается равным  $T(z = 0) = 1$ .

Сопоставление безразмерных температур в восходящем и нисходящем потоках позволяет заключить, что при выбранных значениях  $Pv$  преобладает теплообмен между восходящим и нисходящим потоками. Это приводит к тому, что кинематическая температурная волна, которая сформировалась бы при отсутствии теплообмена между потоками, распадается, а температурный фронт сглаживается.

Для уточнения вклада теплообмена между потоками в сравнении с конвективным переносом на рис. 3 сопоставлены температурные поля для нисходящего и восходящего потоков. Как и на рис. 2, кривые соответствуют изменению безразмерных температур со временем в различных точках  $z$ . Рис. 3а иллюстрирует динамику температурного поля в масштабах малых времен  $t < 10^3$ , а рис. 3б – больших. Различие температур в нисходящем и восходящем потоках мало в сравнении с полным перепадом температуры. Максимальное различие температур теплоносителя на входе в петлю и выходе из нее наблюдается в точке  $z = 0$  (кривая 5). С увеличением  $z$  различие между температурами восходящего и нисходящего потоков уменьшается, достигая нуля при  $z = 1$  (кривая 4), что согласуется с условием сопряжения в задаче. Такое поведение кривых означает, что при заданных значениях  $Pv = 0.01$  различие температур формируется за счет теплообмена между потоками. В то же время конвективный перенос определяет пространственное распределение температурного поля, т.е. различие температур между парами кривых, представленных на рисунках. Это означает также, что температурное поле в нисхо-

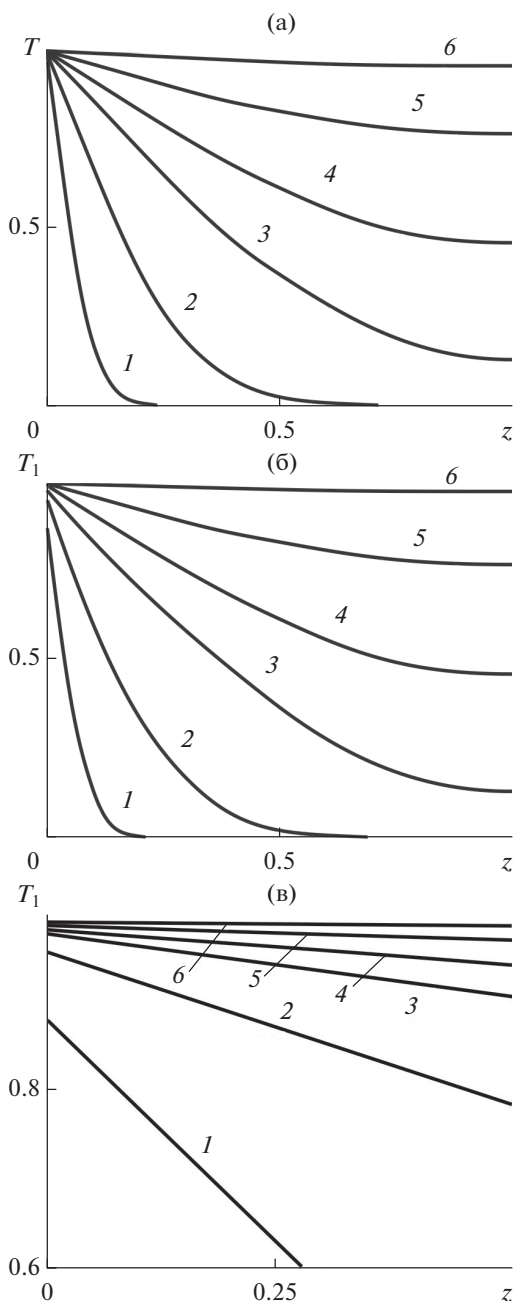


**Рис. 3.** Сопоставление эволюции температурных полей восходящего (пунктирные кривые) и нисходящего (сплошные кривые) потоков в различных точках  $z$ : 1 – 0.2, 2 – 0.4, 3 – 0.6, 4 – 1, 5 – 0.

дующем потоке формируется преимущественно за счет конвективного переноса, а в восходящем — за счет теплообмена с нисходящим потоком.

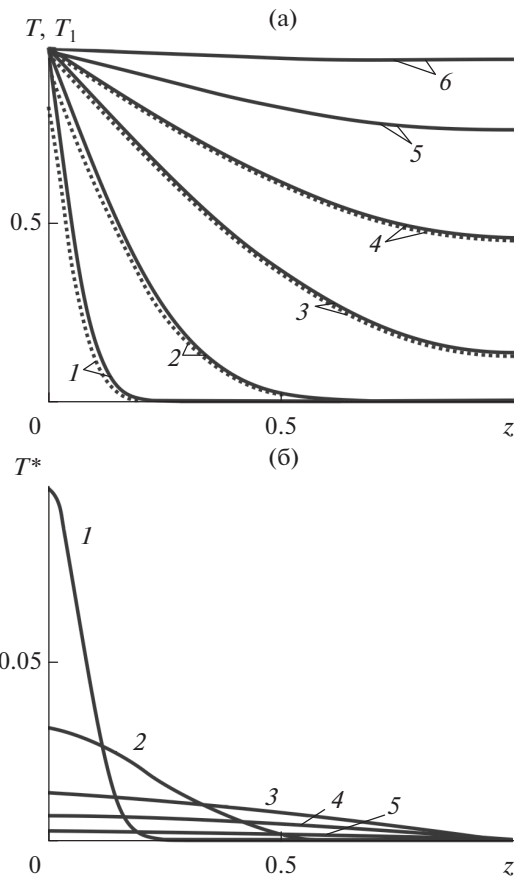
На рис. 4 приведены зависимости безразмерных температур от пространственной координаты  $z$  в нисходящем и восходящем потоках при различных значениях безразмерного времени. Область возмущений температурного поля нисходящего потока увеличивается с течением времени. Для времени  $t = 50$  (кривая 1) протяженность области возмущения составляет 20% от всей длины системы, а при  $t = 500$  (кривая 2) размер области возмущения превышает 50%. Время полной релаксации достигает  $t = 30000$  (кривая 6), за этот промежуток времени температура выравнивается по всей длине системы.

Аналогичные процессы преобладают и в восходящем потоке (рис. 4б). Кривые 1–6 на рис. 4а, 4б иллюстрируют сходное поведение. Это означает, что в формировании пространственного поведения кривых при  $Pv = 0.01$  преобладающее влияние оказывает процесс теплообмена между восходящим и нисходящим потоками.



**Рис. 4.** Зависимости безразмерных температур нисходящего (а) и восходящего (б), (в) потоков от пространственной координаты  $z$  в различные моменты безразмерного времени: 1 –  $t = 50$ , 2 – 500, 3 – 3000, 4 – 7000, 5 – 14000, 6 – 30000.

Заметим, что температура восходящего потока отличается от температуры закачиваемой жидкости. Об этом свидетельствует величина безразмерной температуры на выходе  $z = 0$  (рис. 4б), которая более наглядно представлена на рис. 4в, где детализирован масштаб температур на выходе из трубы. Из анализа этого рисунка следует, что с течением времени температура на выходе из трубы



**Рис. 5.** Пространственное сопоставление температурных полей восходящего (пунктирные кривые) и нисходящего (сплошные кривые) потоков (а) и зависимость разности  $T^* = T - T_1$  от координаты  $z$  (б) при различных значениях безразмерного времени  $t$ : 1 – 50, 2 – 500, 3 – 3000, 4 – 7000, 5 – 14000, 6 – 30000.

приближается к температуре нисходящего потока на входе, поскольку в безразмерных переменных  $T_1(z=0) \rightarrow T(z=0) = 1$ .

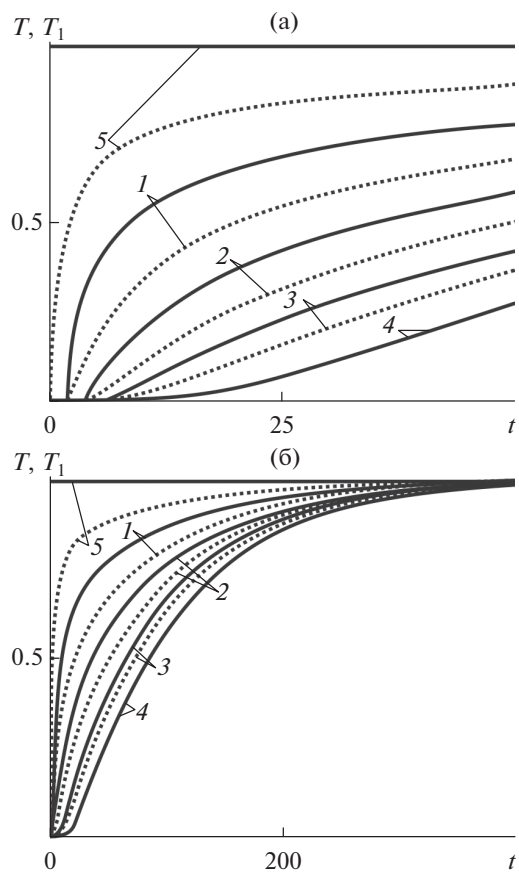
На рис. 5 сопоставляются пространственные распределения безразмерных температур нисходящего и восходящего потоков для различных значений безразмерного времени. Кривые для нисходящего и восходящего потоков зависят от вертикальной координаты практически одинаково. Максимальные различия наблюдаются при малых значениях времени, когда зона возмущений температурного поля составляет 20% от полного размера системы. С увеличением времени различие между кривыми уменьшается наряду с глобальным ростом температуры.

На рис. 5б изображены кривые, представляющие разность безразмерных температур нисходящего и восходящего потоков в зависимости от координаты  $z$  при различных значениях времени. Максимальные различия безразмерных температур достигаются при малых значениях времени на

участках, приближенных к выходу (входу) из системы теплообмена. Вычислительные эксперименты показывают, что максимальная разность безразмерных температур составляет 0.11 от амплитудного значения при  $t = 50$  ( $Pv = 0.01$ ). Это следует из анализа кривых, представленных на рис. 5б, поскольку амплитудное значение температурных изменений в безразмерных переменных равно единице. При более высоких значениях времени различие безразмерных температур существенно уменьшается.

Расчеты показывают, что при увеличении параметра  $Pv$  разница температур в нисходящем и восходящем потоках возрастает. На рис. 6 приведены временные зависимости безразмерных температур нисходящего и восходящего потоков в различных точках  $z$  теплообменной системы при  $Pv = 0.1$  (что на порядок выше, чем в расчетах на рис. 2–5) для малых  $t < 50$  и больших  $t < 400$  интервалов времени. Сравнение с рис. 3 показывает, что разность безразмерных температур потоков возрастает больше чем на порядок.

Как показывают вычислительные эксперименты, отмеченные ранее закономерности формирова-



**Рис. 6.** Сопоставление эволюций температурных полей восходящего (пунктирные кривые) и нисходящего (сплошные кривые) потоков при  $Pv = 0.1$  в различных точках  $z$ : 1 – 0.2, 2 – 0.4, 3 – 0.6, 4 – 1, 5 – 0.

ния температурных полей в теплообменной системе при  $Pv = 0.1$  (в сравнении с  $Pv = 0.01$ , рис. 2–5) сохраняются.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитый аналитико-численный подход позволяет осуществлять детальный анализ особенностей теплообменных процессов в переходном режиме, что особенно важно для прогноза динамики температуры в установках с высокой интенсивностью теплообмена. Учет переходных процессов имеет особое значение в режиме пуска системы с интенсивным теплообменом, особенно в экстремальных условиях пристеночного парового слоя.

Установлено, что динамика температурного поля встречных потоков определяется единым конвективно-кондуктивным параметром  $Pv = vrc / (\alpha D)$ , который увеличивается при возрастании вклада конвективного переноса по отношению к теплоотдаче. Показано, что модель позволяет оценивать относительный вклад конвекции и теплообмена, причем при выбранных значениях  $Pv$  преобладает теплообмен между восходящим и нисходящим потоками. Это приводит к тому, что кинематическая температурная волна, которая сформировалась бы при отсутствии теплообмена между потоками, распадается, а температурный фронт сглаживается. В рассмотренном диапазоне значений  $Pv$  вклад конвективных процессов, которые соответствуют кинематическим волнам, существенно подавлен, однако с увеличением числа  $Pv$  влияние фронтовых явлений увеличивается.

На основе анализа результатов вычислительных экспериментов установлено, что вблизи входа нисходящего потока в петлю и выхода восходящего потока из петли при  $Pv \leq 0.1$  наблюдается максимальная скорость изменения температуры. Время запаздывания минимально вблизи точки  $z = 0$ , при увеличении значения координаты время запаздывания возрастает и при  $z = 1$  (в точке смены направления) достигает  $t = 10^3$ . Из сравнения температурных кривых следует возрастающая с уменьшением  $Pv$  идентичность процессов установления для нисходящего и восходящего потоков температурного поля, а динамика температурного поля на выходе из петли определяет интегральную величину теплообмена.

Разработанная модель позволяет определить характерное безразмерное время установления температуры в исследуемой системе, которое при  $Pv = 0.01$  достигает  $t = 2 \times 10^4$ .

Таким образом, развитая аналитико-численная модель представляет новые возможности для исследования физических закономерностей формирования полей температуры встречных потоков.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 22-22-00132).

**Обозначения.**  $\rho$  – плотность жидкости,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $c$  – удельная теплоемкость циркулирующей жидкости,  $\text{Дж}/(\text{кг К})$ ;  $\alpha = 2 \infty / r_0$  – коэффициент теплоотдачи системы,  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \text{К})$ ;  $\infty$  – ньютоновский коэффициент теплоотдачи,  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \text{К})$ ;  $r_0$  – радиус внутренней трубы, м;  $D$  – длина участка теплообмена, м;  $v$  – скорость жидкости в трубе, м/с;  $\omega$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  – вспомогательные функции.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кортаев Г.К., Шутяев В.П.* Численное моделирование циркуляции океана со сверхвысоким пространственным разрешением // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 3. С. 334.
2. *Козина О.В., Дугин В.С.* Климатообразующая роль океанических течений // Вестн. Нижневартковск. гос. ун-та. 2013. № 3. С. 22.
3. *Луцаков Ю.И., Камышев Н.Г., Шабанов П.Д.* Перенос тепла кровью: сопоставление расчетных и экспериментальных данных // Обзоры по клинической фармакологии и лекарственной терапии. 2009. Т. 7. № 4. С. 3.
4. *Данилушкин И.А., Лежнев М.В.* Структурное представление процесса теплообмена при встречном направлении взаимодействующих потоков // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. 2007. № 1(19). С. 16.
5. *Бульгин Ю.А., Бородин В.В.* Моделирование “горячей” промывки нефтяных скважин мобильными колтюбинговыми установками // Насосы. Турбины. Системы. 2018. № 2(27). С. 62.
6. *Рамазанов А.Ш., Акчурун Р.З.* Моделирование распределения температуры в бурящейся скважине // Вестн. Башкирск. ун-та. 2016. Т. 21. № 2. С. 269.
7. *Тимофеев Н.Г., Скрабин Р.М., Пинигин В.В.* О температурном режиме при бурении скважин в условиях криолитозоны // Вестн. Сев.-Вост. фед. ун-та им. М.К. Аммосова. Сер. Науки о Земле. 2017. № 3(07). С. 54.
8. *Diaz G.* Numerical Investigation of Transient Heat and Mass Transfer in a Parallel-flow liquid-desiccant Absorber // Heat Mass Transfer. 2010. V. 46. P. 1335.
9. *Heller A.* CFD Simulation of the Thermal Performance of a Parallel Counter-Parallel Flow Heat Exchanger for the Treatment of Hypothermia. Dis., Prof. Papers, and Capstones. Las Vegas: University of Nevada, 2014. 172 p.
10. *Krasniqi D., Selimaj R., Krasniqi M., Filkoski R.V.* Thermal Dynamic Analysis of Parallel and Counter Flow Heat Exchangers // Int. J. Mech. Eng. Technol. (IJMET). 2018. V. 9. № 6. P. 723.
11. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложения. М.: URSS, 2017. 1080 с.
12. *Den Iseger P.* Numerical Transform Inversion Using Gaussian Quadrature // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2006. № 20. P. 1.
13. *Филиппов А.И., Зеленова М.А.* Релаксационные процессы в скважине после пуска насоса // Инж. физика. 2020. № 10. С. 17.
14. *Филиппов А.И., Ковальский А.А., Ахметова О.В., Зеленова М.А., Губайдуллин М.Р.* Макроскопическое фильтрационное поле давления в среде с двойной пористостью // ИФЖ. 2021. Т. 94. № 4. С. 863.