

## ПРОВОДИМОСТЬ И ЭКРАНИРОВАНИЕ В ПЛАЗМЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ЭЛЕКТРОНОВ

© 2023 г. С. А. Тригер\*, С. А. Маслов

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

\*E-mail: satron@mail.ru

Поступила в редакцию 02.10.2022 г.

После доработки 02.10.2022 г.

Принята к публикации 13.10.2022 г.

Оптические свойства неидеальной полностью ионизированной плазмы обсуждаются на основе кинетической теории. Показано, что проводимость плазмы в умеренно неидеальном режиме в общем случае требует учета произвольного вырождения электронной компоненты плазмы. Полученные аналитические результаты обобщают недавно развитое рассмотрение оптических свойств плазмы для невырожденных электронов. Проведены расчеты для статической проводимости плазмы.

DOI: 10.31857/S0040364423020187

### ВВЕДЕНИЕ

Оптические свойства плазмы измеряются при различных значениях ее параметров в лабораторных установках, в космосе, в околоземном пространстве. Они являются важнейшими характеристиками при астрофизических исследованиях и изучении ранней Вселенной. Оптические свойства плазмы обсуждаются во многих известных монографиях (см., например, [1, 2]) и в большом количестве оригинальных статей. Полная информация об оптических свойствах однородной плазмы содержится в зависящей от частоты поля проводимости  $\sigma(\omega)$ . Интерес к оптическим свойствам ионизированной плазмы возрос из-за недавнего экспериментального исследования неидеальной плазмы и плазмоподобных сред [3–9] с параметром взаимодействия  $\Gamma = e^2/aT$ , не малым по сравнению с единицей ( $a = (4\pi n_e/3)^{-1/3}$  – радиус Вигнера–Зейтца,  $e$ ,  $n_e$  и  $T_e$  – заряд, плотность и температура электронов соответственно). Тем более, может быть не мал параметр электрон-ионного взаимодействия  $\Gamma_{ei} = z_i \Gamma$ , где  $z_i$  – заряд иона. Однако это взаимодействие недостаточно сильно, чтобы связанные состояния играли существенную роль в проводимости, в противном случае их вклад должен быть рассчитан отдельно. В то же время электроны проводимости в такой плазме нельзя рассматривать как полностью невырожденные (см., например, [5]), и соответствующий параметр, характеризующий вырождение  $1/\Theta \equiv \epsilon_F/T = (3\pi^2 n_e)^{2/3} \hbar^2 / 2m_e T \leq 1$  (где  $\epsilon_F$  и  $\hbar$  – соответственно энергия Ферми и постоянная Планка), не столь мал, чтобы им можно было пренебречь.

В данной работе теоретически анализируется зависящая от частоты проводимость плазмы произвольного вырождения в отличие от оптических свойств чисто классических электронов [10] или полностью вырожденных электронов в жидких металлах [11]. Для описания частично вырожденной плазмы (warm plasma) используется подход, развитый в [10] для вычисления оптических свойств невырожденной плазмы.

В работах [10, 12] рассмотрены оптические свойства и статическая проводимость умеренно неидеальной невырожденной плазмы на основе лоренцевского подхода к кинетической теории. Для параметра  $\Gamma_{ei} \leq 1$  полученные результаты для оптических характеристик оказались в хорошем согласии с экспериментами [6, 9, 10]. Это согласие достигалось как для модифицированного кулоновского логарифма (КЛ) [12], так и для обычного КЛ классической невырожденной плазмы, полностью сходящегося при больших передачах импульса. Однако с увеличением параметров  $1/\Theta$  и  $\Gamma$  расхождение с экспериментами может возрастать. В связи с этим ниже рассматривается проводимость для плазмы с конечным значением параметра  $\Theta$ .

### ЧАСТОТНО ЗАВИСЯЩАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Теоретическое изучение неидеальной плазмы аналитическими методами вызывает большие трудности, связанные с необходимостью учета эффектов сильного кулоновского взаимодействия. В связи с этим все шире используются численные методы расчета, такие как методы Монте-Карло и молекулярной динамики (МД) в разных модификациях. Однако кулоновское взаимодействие мо-

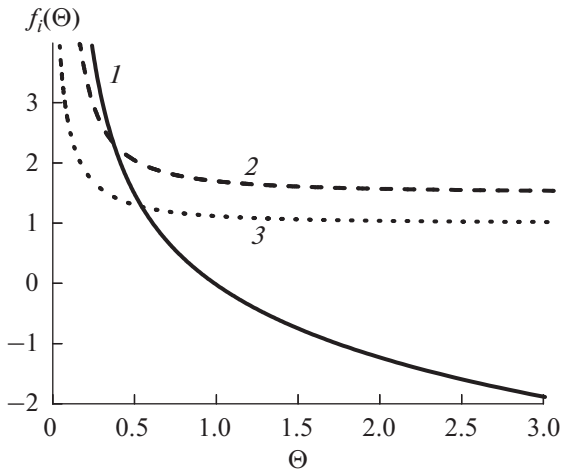


Рис. 1. Функции  $f_1(\Theta) \equiv M_e(\Theta)$  (1),  $f_2(\Theta) \equiv \langle \eta(\Theta) \rangle$  (2) и  $f_3(\Theta) \equiv R_{scr}(\Theta)/R_{De}$  (3).

жет приводить к образованию связанных состояний, что вызывает сомнения в реализации сильного взаимодействия между несвязанными электронами в плазме [13]. Для умеренно сильного кулоновского взаимодействия в квазиклассической плазме естественно применить аналитический расчет частотно-зависимой проводимости  $\sigma(\omega)$ , расширенный по параметру  $\Gamma_{ei} \simeq 1$ , чтобы сравнить результаты с существующими экспериментальными данными (см., например, [5]). В настоящей работе выясняется влияние частичного вырождения электронной компоненты плазмы на радиус экранирования, КЛ и проводимость плазмы.

Будем исходить из обобщенного выражения для частотно зависящей проводимости (см. [14] и ссылки там)

$$\sigma(\omega) = -\frac{2e^2}{3m_e} \int p \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial p} \frac{1}{v_{ei}(p) - i\omega(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (1)$$

Здесь  $v_{ei}(p)$  – статическая частота столкновений электронов и ионов,  $f_e^{(0)}(p)$  – функция Ферми распределения по импульсам при произвольном вырождении электронов. При этом нормировка функции распределения  $f_e^{(0)}$  на плотность электронов имеет вид

$$\begin{aligned} n_e &= (2s+1) \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} f_e^{(0)}(p) \equiv \\ &\equiv \frac{4\pi(2m_e T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} I_{1/2}(M_e), \end{aligned} \quad (2)$$

где введен безразмерный химический потенциал  $M_e = \mu_e/T$  и учтено значение спина электрона  $s = 1/2$ . Здесь и ниже использованы функции  $I_\nu(M_e)$

$$I_\nu(M_e) = \int_0^\infty d\eta \frac{\eta^\nu}{e^{\eta - M_e} + 1}, \quad (3)$$

называемые интегралами Ферми, и их асимптотики

$$I_\nu(M_e < 0, |M_e| \gg 1) \simeq \Gamma(\nu+1) \exp(M_e) = \frac{4\Gamma(\nu+1)}{3\sqrt{\pi}\Theta^{3/2}},$$

$$I_\nu(M_e > 0, M_e \gg 1) \simeq \frac{M_e^{\nu+1}}{\nu+1},$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция. Интегрирование в (3) проводится по переменной  $\eta = p^2/2m_e T$ . Согласно определению  $\Theta$ , условие нормировки (2) можно записать в виде  $\Theta^{-3/2} = 3I_{1/2}(M_e)/2$ .

Зависимость величины  $M_e$  от параметра  $\Theta$  в широком интервале значений этого параметра изображена на рис. 1. Значение  $\Theta_0 \simeq 0.98$ , при котором  $M_e = 0$ , определяется аналитически с учетом равенства  $I_{1/2}(M_e = 0) = (1 - 1/\sqrt{2})\Gamma(3/2)\zeta(3/2)$ , где  $\zeta(x)$  – дзета-функция Римана [15].

Ниже для определения частоты столкновений используется классическое сечение Резерфорда  $\sigma_R^*(p)$  с обрезанием при малых передачах импульса в духе Ландау для классического случая [16]. Однако нужно учесть произвольное вырождение электронного газа, которое изменяет радиус экранирования Дебая  $R_D$  на общее выражение  $R_{scr}$  [17].

Тогда сечение  $\sigma_R^*(p)$  записывается в виде

$$\sigma_R^*(p) = \frac{4\pi z_i^2 e^4 m_e^2}{p^4} \ln \Lambda, \quad \ln \Lambda = \frac{u}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{R_{scr}}{\rho_0} \right)^{2/u} \right],$$

где  $\rho_0 = z_i^2 e^2 m_e / p^2$ , а постоянная  $u = 1$  для стандартной формы КЛ и  $u = 2$  для его модифицированной формы, которая может лучше описать эффекты умеренной неидеальности при  $\Gamma \geq 1$  в невырожденной плазме [16, 18]. Ниже предполагается, что эта модификация эффективна и при учете вырождения электронов. Тогда частота столкновений  $v_{ei}(p)$  приобретает вид

$$v_{ei}(p) = \frac{n_i p}{m_e} \sigma_R^*(p) = \frac{4\pi n_i z_i^2 e^4 m_e}{\gamma_E p^3} \ln \Lambda(p, \Gamma, \Theta),$$

где  $\gamma_E \simeq 0.5816$  – множитель Спитцера и Харма, учитывающий влияние электрон-электронных столкновений на проводимость.

Общая форма выражения для  $R_{scr}$  найдена в [17] через термодинамические производные  $\partial n_a / \partial \mu_b$ . Для радиуса электронного экранирования этот подход дает

$$\frac{1}{R_{scr}^2} = 4\pi e^2 \frac{\partial n_e}{\partial \mu_e} = \frac{8\pi^2 e^2 (2m_e T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3 T} \times \int_0^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}[\exp(\eta - M_e) + 1]} = \frac{1}{R_{De}^2} \frac{I_{-1/2}(M_e)}{2I_{1/2}(M_e)}$$

Очевидно, что при больших по модулю отрицательных  $M_e$  отношение  $R_{scr}^2/R_{De}^2$  стремится к единице (см. рис. 1). При больших положительных  $M_e$  это отношение дает для радиуса экранирования предельное значение Томаса–Ферми  $R_{scr} \rightarrow \sqrt{\epsilon_F/6\pi n_e e^2}$ , следовательно,  $R_{scr}^2/R_{De}^2 \rightarrow 2M_e/3$  при  $M_e \rightarrow \infty$  ( $\Theta \rightarrow 0$ ,  $M_e(\Theta \rightarrow 0) \simeq 1/\Theta \gg 1$ ).

Полезно также вычислить безразмерную среднюю кинетическую энергию на одну частицу  $\langle \eta \rangle$  для ферми-распределения электронов (см. рис. 1) и ввести параметр взаимодействия  $\Upsilon$  для плазмы произвольного вырождения

$$\langle \eta \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m_e T} \right\rangle = \frac{3}{2} \Theta^{3/2} I_{3/2}(M_e), \quad (4)$$

$$\Upsilon = \frac{e^2}{a \langle p^2/2m_e \rangle} \equiv \frac{\Gamma}{\langle \eta \rangle}$$

При вычислении проводимости (1) введем безразмерные переменные  $\omega^* = \omega/\omega_{pe}$  и  $v_{ei}^*(p) = v_{ei}(p)/\omega_{pe}$ . Тогда безразмерная проводимость  $\sigma_* = \sigma(\omega)/\omega_{pe}$  приобретает вид

$$\sigma_*(\omega^*) = \frac{\Theta^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\eta^3 \exp(\eta - M_e)}{[\exp(\eta - M_e) + 1]^2} \times \frac{d\eta}{\sqrt{3z_i} \Gamma^{3/2} \ln \Lambda(\eta, \Gamma, \Theta) - i2\sqrt{2}\eta^{3/2}\omega^*}, \quad (5)$$

где КЛ выражается через параметр  $\Gamma$ :

$$\ln \Lambda(\eta, \Gamma, \Theta) = \frac{u}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{\eta^2}{z_i^2} \frac{16}{9\Gamma^3 \Theta^{3/2} I_{-1/2}(M)} \right)^{1/u} \right] \quad (6)$$

или в эквивалентной форме через параметр  $\Upsilon$  (4). Для произвольного вырождения электронов при  $u = 1$  выражение (6) соответствует стандартному КЛ, при  $u = 2$  – модифицированному КЛ, учитывающему умеренно сильное кулоновское взаимодействие. В частном случае невырожденной плазмы КЛ (6) имеет вид

$$\ln \Lambda(\eta, \Gamma) = \frac{u}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{R_{De}^2}{\rho_0^2} \right)^{1/u} \right] = \frac{u}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{4\eta^2}{3z_i^2 \Gamma^3} \right)^{1/u} \right]. \quad (7)$$

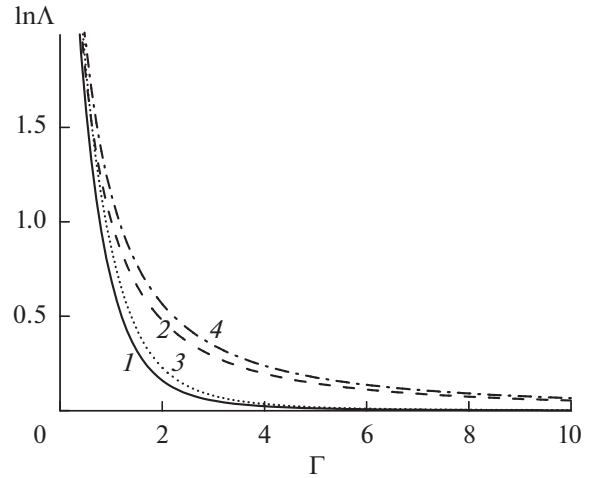


Рис. 2. Различные представления КЛ в зависимости от  $\Gamma$ : 1 –  $\ln \Lambda_{Land}(\Gamma)$ , 2 –  $\ln \Lambda_{mod}(\Gamma)$ ; 3 –  $\ln \tilde{\Lambda}(\Gamma, \Theta)$  при  $\Theta = 0.3$ ,  $u = 1$ ; 4 –  $\ln \tilde{\Lambda}(\Gamma, \Theta)$  при  $\Theta = 0.3$ ,  $u = 2$ .

В приближении Ландау, когда под логарифмом используется среднее  $\langle p^2/2m_e \rangle = 3T/2$  ( $\langle \eta \rangle = 3/2$ ), имеем стандартную с  $u = 1$  и модифицированную с  $u = 2$  формы логарифма (7), соответственно обозначаемые  $\ln \Lambda_{Land}$  и  $\ln \Lambda_{mod}$  (рис. 2).

### СТАТИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Из выражения (5) следует общее выражение для безразмерной статической проводимости, которая, согласно (6), является функцией параметров  $\Gamma$  и  $\Theta$ :

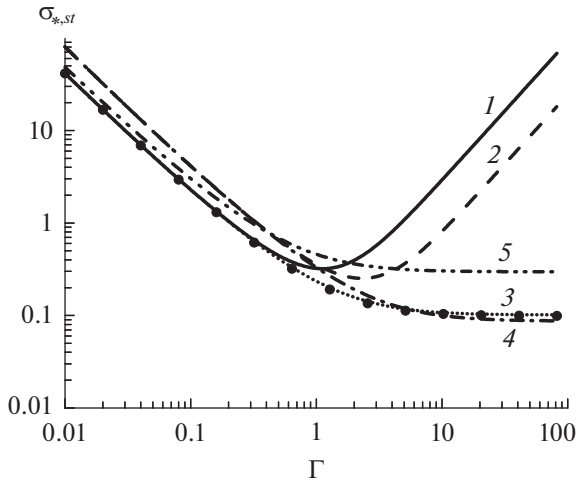
$$\sigma_{*,st}(\Gamma, \Theta) = \frac{\Theta^{3/2}}{z_i \sqrt{6\pi} \Gamma^{3/2}} \times \int_0^\infty \frac{\eta^3 \exp(\eta - M_e)}{[\exp(\eta - M_e) + 1]^2 \ln \Lambda(\eta, \Gamma, \Theta)} d\eta. \quad (8)$$

Полагая, что КЛ (6) как функция параметра  $\eta$  медленно изменяется, и заменяя в нем  $\eta$  средним значением (4), получаем для статической проводимости упрощенное выражение:

$$\tilde{\sigma}_{*,st}(\Gamma, \Theta) = \frac{3\Theta^{3/2}}{z_i \sqrt{6\pi} \Gamma^{3/2} \ln \tilde{\Lambda}(\Gamma, \Theta)} I_2(M_e), \quad (9)$$

где  $\ln \tilde{\Lambda}(\Gamma, \Theta) \equiv \ln \Lambda(2\langle \eta \rangle/3, \Gamma, \Theta)$ .

На рис. 2 показано поведение различных форм КЛ в зависимости от  $\Gamma$  при фиксированном значении  $\Theta$ . На рис. 3 приведена безразмерная статическая проводимость как функция  $\Gamma$ , рассчитанная по точной формуле (8) и по приближенному выражению (9) при значениях  $u = 1$  и 2. Для расчетов использовалось значение параметра  $\Theta = 30$ , отвечающее почти невырожденной плазме, и  $\Theta = 0.3$ , соответствующее умеренному вырожде-



**Рис. 3.** Безразмерная статическая проводимость  $\sigma_{*,st}(\Gamma, \Theta)$  (1–4) и  $\bar{\sigma}_{*,st}(\Gamma, \Theta)$  (5) в зависимости от  $\Gamma$ : 1 –  $u = 1$ ,  $\Theta = 30$ ; 2 –  $u = 1$ ,  $\Theta = 0.3$ ; 3 –  $u = 2$ ,  $\Theta = 30$ ; 4 –  $u = 2$ ,  $\Theta = 0.3$ ; 5 – при  $u = 2$ ,  $\Theta = 30$ ; кружки – расчет без учета вырождения ( $\Theta \rightarrow \infty$ ) методом МД (см. [10]).

нию. Интервал значений  $0.01 < \Gamma < 100$  выбран, чтобы продемонстрировать поведение статической проводимости не только в экспериментально достижимом интервале для классической плазмы [6, 7], но и далеко вне его. В дальнейшем предполагается провести расчеты для статической и оптической проводимости плазмы произвольного вырождения, включая жидкометаллическое состояние (см. [11]), где развиты другие приближения расчета проводимости.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты могут быть использованы для расчетов статической и оптической проводимости частично вырожденных плазменных систем, а также при расчетах спектральной плотности энергии равновесного излучения [18].

Авторы благодарны А.М. Игнатову за полезные обсуждения и замечания. Данная работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение с ОИВТ РАН № 075-15-2020-785 от 23 сентября 2020 г.).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 621 с.

2. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978. 407 с.
3. Dressel M., Gruener G. *Electrodynamics of Solids. Optical Properties of Electrons in Matter*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. 474 p.
4. Дьячков Л.Г., Кобзев Г.А., Панкратов П.М. Анализ экспериментальных данных по непрерывному излучению плотной плазмы инертных газов // ТВТ. 1996. Т. 34. 6. С. 867.
5. Zaporoghets Y., Mintsev V., Gryaznov V., Fortov V., Reinholz H., Raitza T., Roepke G. Reflectivity of Nonideal Plasmas // J. Phys. A: Math. General. 2006. V. 39. 17. P. 4329.
6. Kurilenkov Y.K., Berkovsky M.A. Collective Modes and Correlations // *Transp. Opt. Prop. Nonideal Plasma*. Springer, 1995. P. 215.
7. Skowronek M., Rous J., Goldstein A., Cabannes F. Influence of Plasma Frequency on the Light Emitted by an Exploding Ionized Gaseous Filament // *Phys. Fluids*. 1970. V. 13. 2. P. 378.
8. Magnitskiy S.A., Morozov I.V., Norman G.E., Valuev A.A. Anomalous Reflectivity from Nonideal Plasma // *J. Phys. A: Math. General*. 2003. V. 36. 22. P. 5999.
9. Lankin A.V., Norman G.E. Crossover from Bound to Free States in Plasmas // *J. Phys. A: Math. Theor*. 2009. V. 42. 21. 214032.
10. Khrapak S.A., Trigger S.A. To the Optical Properties of Moderately Non-ideal Plasma // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. 2022. V. 290. 108297.
11. Бобров В.Б., Тригер С.А. Оптические свойства двухкомпонентной жидкометаллической плазмы // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. 2. С. 514.
12. Khrapak S.A., Khrapak A.G. On the Conductivity of Moderately Non-ideal Completely Ionized Plasma // *Results Phys*. 2020. V. 17. 103163.
13. Khomkin A.L., Shumikhin S.A. Plasma Phase Transition in Historical Aspect and the Role of Bound States // *Contr. Pl. Phys*. 2022. 202200011.
14. Бобров В.Б., Тригер С.А. О квантовых эффектах в теории проводимости полностью ионизированной квазиклассической плазмы // *Физика плазмы*. 2010. Т. 36. № 9. С. 849.
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.
16. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Физическая кинетика*. М.: Наука, 1979. 528 с.
17. Бобров В.Б., Тригер С.А. Соотношения Крамерса–Кронига для диэлектрической проницаемости, “истинный” радиус экранирования и критическая точка кулоновской системы // ТВТ. 2011. Т. 49. № 4. С. 513.
18. Maslov S.A., Trigger S.A. High-frequency Spectral Density of Equilibrium Radiation and Zero Oscillations in the Presence of Electron Gas // *Phys. Plasmas*. 2022. V. 29. 033302.