

УДК 536.24

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА

© 2023 г. Ю. В. Видин, В. С. Злобин*

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

*E-mail: zlobinsfu@mail.ru

Поступило в редакцию 03.10.2022 г.

После доработки 29.12.2022 г.

Принято к публикации 30.12.2022 г.

Предложен метод исследования характеристических уравнений, и получены аналитические формулы для определения корней характеристического уравнения в задаче нестационарной теплопроводности сферического тела. Данные формулы позволяют определять любое необходимое количество корней с высокой точностью, что особенно важно при решении задач теплопроводности в начальный момент времени. Предложенный метод может быть использован для исследования более сложных характеристических уравнений, возникающих в других задачах теплообмена.

DOI: 10.31857/S0040364423020199

ВВЕДЕНИЕ

При определении нестационарного температурного поля в сплошном сферическом теле необходимо использовать математическое решение в виде бесконечного ряда [1, 2]. Основной проблемой при применении такой зависимости является нахождение корней μ_n характеристического уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{\operatorname{Bi} - 1}, \quad (1)$$

которому соответствует бесчисленное множество собственных чисел μ , причем каждый последующий больше предыдущего

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n < \dots$$

В (1) число $\operatorname{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda}$ – безразмерный параметр, определяющий интенсивность теплообмена (нагрева или охлаждения) на поверхности шара; α – коэффициент теплоотдачи на поверхности шара, Вт/(м² К); R – радиус наружной поверхности шара, м; λ – коэффициент теплопроводности материала шара, Вт/(м К).

Для расчета неустановившегося температурного поля в начальной стадии процесса чем меньше продолжительность начальной стадии нагрева (или охлаждения), тем большее количество корней уравнения (1) приходится определять. В монографии [1] приведена таблица значений первых шести корней μ_n для ряда фиксированных значений Bi . Однако наряду с имеющимися табличными значениями μ_n целесообразно дополнительно рас-

полагать более общей аналитической методикой нахождения чисел μ_n для произвольных величин Bi и порядковых номеров n . При этом желательно, чтобы рекомендуемые расчетные зависимости были максимально простыми и обладали приемлемой точностью с инженерной точки зрения.

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для решения поставленной в работе задачи целесообразно придерживаться определенной последовательности.

1. $\operatorname{Bi} = 0$. Предварительно исследуем уравнения (1) для частного случая $\operatorname{Bi} = 0$. Тогда исходная зависимость принимает вид

$$\operatorname{tg} \mu = \mu.$$

Корни этого уравнения для $n = 2, 3, 4, \dots$ находим по простому соотношению

$$\mu_n = \frac{(2n-1)}{8} \pi + \sqrt{\frac{9(2n-1)^2}{64} \pi^2 - \frac{3}{2}}, \quad (2)$$

при $n = 1$ $\mu_1 = 0$.

Проиллюстрируем возможности формулы (2) на конкретных примерах. Так, при $n = 2$, согласно (2), получаем

$$\mu_2 = \frac{(2 \times 2 - 1)}{8} \pi + \sqrt{\frac{9(4-1)^2}{64} \pi^2 - \frac{3}{2}} = 4.4934,$$

при $n = 6$

$$\mu_6 = \frac{(2 \times 6 - 1)}{8} \pi + \sqrt{\frac{9(12-1)^2}{64} \pi^2 - \frac{3}{2}} = 17.2208.$$

Эти значения корней полностью соответствуют табличным [1]. Рассчитанные по выражению (2) собственные числа μ_n можно рассматривать как оценку снизу соответствующих корней уравнения (1).

2. $0 < Bi \leq 1$. Далее разрабатываем также сравнительно простые расчетные соотношения для нахождения чисел μ_n в интервале $0 < Bi \leq 1$. Очевидно, что при $Bi = 1$ формула (1) записывается так

$$\operatorname{tg} \mu = \rightarrow \infty.$$

Следовательно, в этом случае искомые корни μ_n равны

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2} \pi, \quad (3)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

Следует отметить, что формула (3) справедлива также и для случая расчета нестационарного симметричного температурного поля неограниченной пластины при граничных условиях первого рода ($Bi \rightarrow \infty$) [1].

Для определения величин μ_n в случае, когда $Bi < 1$, представим формулу (3) в виде

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2} \pi - \beta, \quad (4)$$

где β – вспомогательный безразмерный коэффициент.

Тогда зависимость (1) принимает вид

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\frac{2n-1}{2} \pi - \beta}{1 - Bi}.$$

Аппроксимируя $\operatorname{ctg} \beta$ соотношением [3]

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{3},$$

получаем квадратное алгебраическое уравнение, решение которого имеет вид

$$\beta = \frac{3(2n-1)\pi}{4(2+Bi)} - \sqrt{\frac{9(2n-1)^2 \pi^2}{16(2+Bi)^2} - \frac{3(1-Bi)}{2+Bi}}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), находим

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2} \pi \times \left[1 - \frac{3}{2(2+Bi)} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{16(1-Bi)(2+Bi)}{3(2n-1)^2 \pi^2}} \right) \right]. \quad (6)$$

Рассчитаем по (6) μ_2 и μ_6 при $Bi = 0.5$:

$$\mu_2 = \frac{3}{2} \pi \left[1 - \frac{3}{5} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8 \times 2.5}{3 \times 3^2 \pi^2}} \right) \right] = 4.60423,$$

$$\mu_6 = \frac{11}{2} \pi \left[1 - \frac{3}{5} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{16 \times 0.5 \times 2.5}{3 \times 11^2 \pi^2}} \right) \right] = 17.24982.$$

Данные результаты полностью соответствуют табличным значениям [1]. Выражение (6) может быть эффективно использовано для нахождения первого ($n = 1$) собственного числа μ_1 , являющегося, как правило, наиболее важным. Однако при сравнительно небольших значениях Bi (примерно $Bi < 0.3$) удобнее использовать также очень простую зависимость вида

$$\mu_1^2 = 7.5(\sqrt{1+0.8Bi} - 1), \quad (7)$$

которая получена преобразованием уравнения (1) к виду

$$Bi - 1 = -\mu \operatorname{ctg} \mu.$$

Представляя $\operatorname{ctg} \mu$ в виде усеченного степенного ряда [3]

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{3} - \frac{\mu^3}{45},$$

получаем биквадратное алгебраическое уравнение

$$\mu^4 + 15\mu^2 - 45Bi = 0,$$

откуда находим

$$\mu_1^2 = -\frac{15}{2} + \sqrt{\frac{225}{4} + 45Bi} = -\frac{15}{2} + \frac{15}{2} \sqrt{1 + \frac{180}{225} Bi}.$$

Проведя необходимые преобразования, получаем формулу (7) для определения первого корня характеристического уравнения (1) при $Bi < 0.3$.

Например, при $Bi = 0.2$ на основе (7) находим $\mu_1 = 0.7601$. Табличная величина согласно [1] $\mu_1 = 0.7593$, т.е. невязка в данном случае составляет около 0.1%.

3. $Bi > 1$. Далее аналогично математически исследуется характеристическое уравнение (1) для случая $Bi > 1$. Тогда вместо условия (4) примем

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2} \pi + \beta. \quad (8)$$

Выполняя действия, аналогичные ранее изложенным, находим

$$\beta = \frac{3(2n-1)\pi}{4(Bi+2)} \left(\sqrt{1 + \frac{16(Bi-1)(Bi+2)}{3(2n-1)^2 \pi^2}} - 1 \right). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), окончательно получим

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2} \times \pi \left[1 + \frac{3}{2(Bi+2)} \left(\sqrt{1 + \frac{16(Bi-1)(Bi+2)}{3(2n-1)^2 \pi^2}} - 1 \right) \right]. \quad (10)$$

Проиллюстрируем возможности рекомендуемого соотношения (10) на конкретных числовых примерах. Примем $Bi = 2$ и рассчитаем

$$\mu_2 = \frac{3}{2} \pi \left[1 + \frac{3}{8} \left(\sqrt{1 + \frac{16 \times 1 \times 4}{3 \times 9 \pi^2}} - 1 \right) \right] = 4.9132,$$

$$\mu_6 = \frac{11}{2} \pi \left[1 + \frac{3}{8} \left(\sqrt{1 + \frac{16 \times 1 \times 4}{3 \times 11^2 \pi^2}} - 1 \right) \right] = 17.3364.$$

Полученные величины μ_2 и μ_6 полностью согласуются с табличными значениями [1]. Выполним аналогичные расчеты для более высокого значения параметра $Bi = 5$:

$$\mu_2 = \frac{3}{2} \pi \left[1 + \frac{3}{14} \left(\sqrt{1 + \frac{448}{3 \times 9 \pi^2}} - 1 \right) \right] = 5.3561,$$

$$\mu_6 = \frac{11}{2} \pi \left[1 + \frac{3}{14} \left(\sqrt{1 + \frac{16 \times 4 \times 7}{3 \times 11^2 \pi^2}} - 1 \right) \right] = 17.5033.$$

И в данном примере наблюдается также хорошее согласование с табличными величинами, которые, согласно [1], равны $\mu_2 = 5.3540$ и $\mu_6 = 17.5034$.

Таким образом, выведенная формула (10) позволяет рассчитывать корни μ_n характеристического уравнения (1) с высокой степенью точности в диапазоне $1 \leq Bi \leq 5$. При этом вычисленные μ_n либо полностью совпадают с известными табличными значениями [1], либо с ростом параметра Bi очень мало отличаются от них.

4. $Bi > 10$. Для области высоких Bi (например, $Bi > 10$) целесообразно использовать представление искомых корней в форме

$$\mu_n = n\pi - \beta.$$

Тогда, применяя вышеописанный математический подход, удастся получить следующее аналитическое решение для определения μ_n :

$$\mu_n = n\pi \left[1 - \frac{3Bi}{2n^2 \pi^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4n^2 \pi^2}{3Bi^2}} - 1 \right) \right]. \quad (11)$$

На основе зависимости (11) определим для $Bi = 10$ корни μ_1 и μ_6 :

$$\mu_1 = \pi \left[1 - \frac{3 \times 10}{2\pi^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{3 \times 10\pi^2}} - 1 \right) \right] = 2.8371,$$

$$\mu_6 = 6\pi \left[1 - \frac{3 \times 10}{2 \times 6^2 \pi^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4 \times 6^2 \pi^2}{3 \times 10^2}} - 1 \right) \right] = 17.7392.$$

Сопоставление этих результатов с данными [1] свидетельствует, что расхождение не превышает 0.05%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведенные числовые расчеты показывают, что рекомендуемая аналитическая методика позволяет определять собственные значения характеристического уравнения (1) с высокой точностью, используя весьма простые инженерные формулы.

В заключение следует также сказать, что предлагаемые в статье аналитические методы решения характеристического уравнения (1) могут быть применены для эффективного исследования других типов зависимостей, например приводимых в работах [4–6]. При необходимости значения полученных корней можно уточнить путем прямой подстановки в правую часть характеристического уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
2. *Лыков А.В.* Теоретические основы строительной теплофизики. Минск: Изд-во АН БССР, 1961. 520 с.
3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1965. С. 608.
4. *Видин Ю.В., Злобин В.С.* Аналитический расчет нестационарного температурного поля плоского тела при переменном коэффициенте теплопроводности // ТВТ. 2019. Т. 57. № 5. С. 790.
5. *Видин Ю.В., Злобин В.С.* К расчету собственных чисел нестационарной теплопроводности плоского тела при несимметричных граничных условиях третьего рода // Изв. РАН. Энергетика. 2021. № 2. С. 75.
6. *Видин Ю.В., Злобин В.С.* Определение собственных значений в задаче нестационарной теплопроводности неоднородного плоского тела // Изв. РАН. Энергетика. 2022. № 2. С. 73.