

УДК 66.06:66.08:533.735:532.529.2:536.25

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЫ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ТЕРМОДИФФУЗИЕЙ

© 2019 г. Л. Х. Ингель*

НПО “Тайфун”, Обнинск, Россия

*E-mail: lev.ingel@gmail.com

Поступила в редакцию 26.02.2018 г.

После доработки 26.11.2018 г.

Принята к публикации 27.12.2018 г.

В линейном приближении исследуется устойчивость состояния покоя жидкой среды в поле силы тяжести. Плотность среды линейно зависит от температуры и концентрации примеси. В фоновом состоянии примесь распределена однородно, а стратификация температуры устойчивая (плотность убывает с высотой). Поэтому, согласно известным критериям, состояние покоя считается устойчивым. Показано, что даже относительно слабая термодиффузия при отрицательных значениях коэффициента $Соре$ может дестабилизировать устойчиво стратифицированную по плотности среду (найденны нейтральные кривые, относящиеся к монотонной неустойчивости в бесконечном вертикальном слое). Для задачи с нагревом от боковой границы показана возможность эффективной “отрицательной теплоемкости” – понижения температуры среды в области притока тепла.

Ключевые слова: термодиффузия, двухкомпонентная среда, конвективная неустойчивость, температурная стратификация, отрицательная теплоемкость

DOI: 10.1134/S004035711905004X

ВВЕДЕНИЕ

Пусть жидкая среда устойчиво стратифицирована по температуре в поле силы тяжести – температура с высотой растет, плотность убывает. Конвективная устойчивость такой среды, на первый взгляд, не вызывает сомнений. Правда, в двухкомпонентной среде, плотность которой зависит не только от температуры, но и от концентрации примеси, возможно возникновение специфической неустойчивости, связанной с различием скоростей диффузии двух компонентов [1, 2]. Но это возможно только при достаточной неустойчивой фоновой стратификации примеси. В настоящей работе показано, что в двухкомпонентной среде возможно возникновение конвективной неустойчивости и при отсутствии вклада примеси в фоновую стратификацию плотности – при учете даже довольно слабого перекрестного кинетического эффекта – термодиффузии (эффекта $Соре$) [3–5]. Попутно обращается внимание на нетривиальные особенности отклика рассматриваемой среды на тепловыделение. Проявления термодиффузии, как известно, имеют важное значение для некоторых процессов химической технологии (см., например, [6]).

ФОНОВОЕ СОСТОЯНИЕ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Согласно обычно используемому приближению, предполагаем, что отклонения плотности среды ρ' линейно зависят от возмущений температуры T и отклонений концентрации примеси s (простейший пример – соленая вода):

$$\rho' = \rho_0 (1 - \alpha T + \beta s),$$

где ρ_0 – средняя (отсчетная) плотность среды; α – термический коэффициент расширения среды, β – соответствующий коэффициент для концентрации примеси (в случае соленой воды – коэффициент ее соленостного сжатия).

Рассматриваем устойчиво стратифицированную по температуре жидкую среду в бесконечном вертикальном слое $-L/2 < x < L/2$ (x – горизонтальная координата). Задан постоянный фоновый вертикальный градиент температуры $\gamma_T > 0$. Фоновая стратификация примеси отсутствует, т.е. задано постоянное значение массовой доли примеси $\bar{\mu} = \bar{c}/\rho_0$, где c – концентрация примеси ($\text{кг}/\text{м}^3$). Поскольку отклонения концентрации примеси удобно измерять в промилле, $c = \bar{c} + c' \approx \bar{c} + 10^{-3} \rho_0 s$.

Линеаризованная система уравнений для возмущений в приближении Буссинеска с учетом термодиффузии имеет вид [3–5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g(\alpha T - \beta s) \mathbf{e}_z, \quad \nabla \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \gamma_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z &= \kappa \nabla^2 T, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \chi \nabla^2 s + \chi_T \nabla^2 T. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v} – вектор возмущения поля скорости, t – время, p – возмущение давления, \mathbf{e}_z – единичный вектор в направлении вертикальной оси z , g – ускорение свободного падения; ν – кинематический коэффициент вязкости, κ – коэффициент температуропроводности, χ – коэффициент диффузии примеси, χ_T – соответствующий коэффициент, относящийся к термодиффузии.

Поясним последнее из уравнений (1) (остальные достаточно традиционны [3–5, 7]). В более общем случае уравнение переноса примеси имеет вид [4]

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \left[\chi \nabla c + \chi_{sT} c \left(1 - \frac{c}{\rho} \right) \nabla T \right], \quad (2)$$

где s_T – коэффициент Соре $(^\circ\text{C})^{-1}$ [3, 4]. Ограничиваемся здесь случаем, когда в (2) коэффициенты χ и s_T можно считать постоянными, а вариации фоновой плотности достаточно малы, так что $c/\rho \approx c/\rho_0$. В этом случае (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \chi \nabla^2 \mu + \chi_{sT} \nabla [\mu(1-\mu)] \nabla T + \\ &+ \chi_{sT} \mu(1-\mu) \nabla^2 T = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mu \approx c/\rho_0$. Концентрация примеси и температура складываются из фоновых значений и возмущений. При линеаризации по возмущениям первое слагаемое в правой части (3) имеет вид $\chi \nabla^2 \mu'$; порядок второго слагаемого – $\chi_{sT} \gamma_T (1 - 2\bar{\mu}) \nabla \mu'$ (здесь штрихом обозначены возмущения). Отношение абсолютной величины второго слагаемого к первому, как видно из масштабного анализа, порядка $l s_T \gamma_T (1 - 2\bar{\mu})$, где l – наименьший из рассматриваемых пространственных масштабов возмущений. Ниже будут рассматриваться значения параметров, при которых упомянутое отношение много меньше единицы. Поэтому пренебрегаем вторым слагаемым и приходим к последнему уравнению (1), в котором

$$\chi_T = 10^3 \chi_{sT} \bar{\mu} (1 - \bar{\mu}), \quad (4)$$

где множитель 10^3 связан с тем, что возмущение концентрации примеси s здесь измеряется в промилле.

На вертикальных границах $x = \pm L/2$ предполагается выполнение условий непротекания и

прилипания, а также отсутствуют температурные возмущения и потоки примеси:

$$w = 0, \quad T = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm L/2. \quad (5)$$

НЕЙТРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ (ВЕРТИКАЛЬНО- ОДНОРОДНЫХ) ВОЗМУЩЕНИЙ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

Будем исследовать устойчивость состояния покоя по отношению к монотонным вертикально-однородным возмущениям. Ищется решение вида

$$\begin{aligned} \{w(x, t), T(x, t), s(x, t)\} &= \\ = \{W(x), \theta(x), S(x)\} \exp(\omega t), \end{aligned} \quad (6)$$

где $W(x)$, $\theta(x)$, $S(x)$ – соответствующие амплитудные функции. При $\omega = 0$ (имея в виду расчет порога неустойчивости) из последних двух уравнений (1) следует уравнение

$$W \gamma_s = \chi \nabla^2 S, \quad (7)$$

где введено обозначение

$$\gamma_s \equiv -\frac{\gamma_T \chi_T}{\kappa} = -10^3 \frac{\chi}{\kappa} \gamma_T s_T \bar{\mu} (1 - \bar{\mu}). \quad (8)$$

Уравнение (7) формально совпадает с линеаризованным стационарным уравнением переноса примеси без учета термодиффузии, но при наличии фоновой вертикальной стратификации примеси с градиентом γ_s (%о/м). Тем самым задача о нейтральных кривых формально свелась к известным задачам для двухкомпонентных сред, стратифицированных по обоим компонентам [1, 7, 8]. В частности, в безграничной среде монотонная неустойчивость имеет место при не слишком малых положительных значениях γ_s :

$$\xi \equiv \frac{\kappa \beta \gamma_s}{\chi \alpha \gamma_T} = -10^3 \frac{\beta}{\alpha} s_T \bar{\mu} (1 - \bar{\mu}) > 1. \quad (9)$$

Но с учетом краевых эффектов, условие неустойчивости, как показано ниже, может быть гораздо мягче. Аналогичная задача без учета термодиффузии, но при наличии фоновой вертикальной стратификации концентрации примеси, рассмотрена в [7]. Поэтому здесь достаточно лишь вкратце напомнить решение. (В промежуточных выкладках [7] содержится ряд опечаток, не отразившихся на окончательных результатах. Ниже приведены исправленные формулы.) Исключая из исходной системы уравнений все неизвестные, кроме w , при $\omega = 0$ приходим к уравнению

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = -\frac{1}{\nu \kappa} \left(N_T^2 + \frac{\kappa}{\chi} N_s^2 \right) W, \quad (10)$$

где $N_T = (\alpha g \gamma_T)^{1/2}$, $N_s = (-\beta g \gamma_s)^{1/2}$ – частоты пла-
вучести, обусловленные стратификациями каж-
дого из компонентов. Вводя безразмерную гори-
зонтальную координату $X = \frac{x}{(L/2)}$, систему урав-
нений можно переписать в виде

$$\frac{d^4 W}{dX^4} = -R W, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dX^2} = (L^2 \gamma_T / 4\kappa) W, \quad \frac{d^2 S}{dX^2} = (L^2 \gamma_s / 4\chi) W. \quad (12)$$

Здесь безразмерный параметр

$$R = \frac{L^4}{16\nu\kappa} \left(N_T^2 + \frac{\kappa}{\chi} N_s^2 \right) = \frac{\alpha g \gamma_T L^4}{16\nu\kappa} (1 - \xi) \quad (13)$$

с точностью до знака является некоторым анало-
гом и обобщением числа Рэлея (рассматриваем-
ым стратификациям, устойчивым по известным
критериям, соответствует $R > 0$).

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$W(X) = \sum_{j=1}^4 C_j \exp(q_j X), \quad (14)$$

где C_j – постоянные интегрирования, q_j – корни
характеристического уравнения:

$$q_j = \pm B(1 \pm i), \quad B = \sqrt[4]{R/4}. \quad (15)$$

Интегрирование уравнений (12) дает

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 X + \frac{L^2 \gamma_T}{4\kappa} \sum_{j=1}^4 \frac{C_j}{q_j^2} \exp(q_j X),$$

$$S = S_0 + S_1 X + \frac{L^2 \gamma_s}{4\chi} \sum_{j=1}^4 \frac{C_j}{q_j^2} \exp(q_j X),$$

где $\theta_{0,1}$, $S_{0,1}$ – постоянные интегрирования. С уче-
том краевых условий, для постоянных интегри-
рования получаем уравнения

$$\sum_{j=1}^4 C_j \exp(\pm q_j) = 0, \quad S_1 + \frac{L^2 \gamma_s}{4\chi} \sum_{j=1}^4 \frac{C_j}{q_j} \exp(\pm q_j) = 0,$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \frac{L^2 \gamma_T}{4\kappa} \sum_{j=1}^4 \frac{C_j}{q_j^2} \exp(q_j) = 0,$$

$$\theta_0 - \theta_1 + \frac{L^2 \gamma_T}{4\kappa} \sum_{j=1}^4 \frac{C_j}{q_j^2} \exp(-q_j) = 0.$$

Еще одно соотношение следует из того, что раз-
ность $\alpha T - \beta s$ в правой части (2) не должна содер-
жать каких-либо слагаемых, помимо экспонент
(в противном случае они бы проявились в стащи-

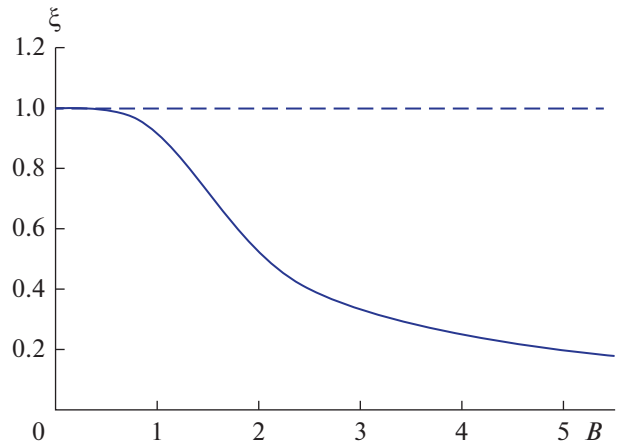


Рис. 1. Нейтральные кривые при отрицательных зна-
чениях коэффициента Соре (нижние границы обла-
сти неустойчивости; пояснено в тексте).

онарном решении для w). Следовательно, должно
выполняться соотношение

$$\alpha \theta_1 - \beta S_1 = 0.$$

Таким образом, имеем однородную линейную
систему из семи уравнений с семью неизвестны-
ми C_j , θ_0 , θ_1 , S_1 . Условие существования нетриви-
ального решения, соответствующего границе
устойчивости – обращение в ноль определителя
системы. Как показывают расчеты, это имеет ме-
сто при следующем соотношении между основ-
ными безразмерными параметрами:

$$\xi = \frac{F(B)}{B}, \quad (16)$$

$$F(B) = \frac{\exp(4B) - 2 \exp(2B) \cos(2B) + 1}{\exp(4B) + 2 \exp(2B) \sin(2B) - 1}.$$

На рис. 1 представлена нейтральная кривая
 $\xi = F(B)/B$ – нижняя граница области монотон-
ной неустойчивости, обусловленной термодиффу-
зией в сочетании с краевыми эффектами (сплош-
ная линия). Для сравнения штриховая прямая от-
вечает условию (9). Видно, что при достаточно
большой толщине L рассматриваемого слоя, когда
велики значения параметров R и B , неустойчи-
вость имеет место даже при малых положи-
тельных значениях ξ , т.е. даже при малых по абсолю-
тной величине отрицательных значениях коэффи-
циента Соре s_T и при сильной устойчивой
фоновой стратификации плотности (но следует
иметь в виду, что с ростом L увеличивается время
развития возмущений).

Проиллюстрируем это на численном примере,
отвечающем возможным лабораторным экспери-
ментам. В соленой воде при температурах, близких
к 0°C , коэффициент Соре s_T порядка $-10^{-3} (\text{°C})^{-1}$

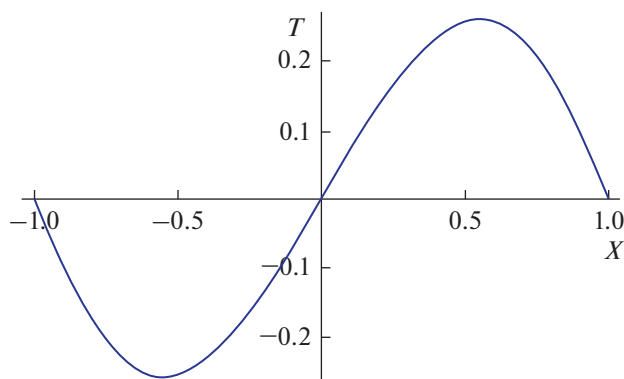


Рис. 2. Пример безразмерного горизонтального профиля температурного возмущения в задаче с притоком тепла от левой границы.

[4]. Пусть фоновая концентрация соли $\bar{\mu} = 0.05$, фоновая стратификация солености отсутствует, $\gamma_T = 0.1$ К/м, $L = 0.1$ м. Примем характерные для соленой морской воды значения $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\kappa = 1.4 \times 10^{-7}$ м²/с, $\chi = 1.5 \times 10^{-9}$ м²/с, $\alpha = 10^{-4}$ К⁻¹, $\beta = 8 \times 10^{-4}$ (‰)⁻¹. В этом случае $\xi = 0.38$, $R \approx 2750$, $B \approx 5.1$, $F(B)/B \approx 0.196$, $\gamma_s = 0.51 \times 10^{-4}$ ‰/м. Таким образом, при указанном наборе параметров имеет место неустойчивость, несмотря на устойчивую стратификацию плотности. Отметим, что в выражении (9) отношение коэффициентов обмена κ/χ в итоге сократилось, так что природа рассматриваемой неустойчивости принципиально отличается от известной неустойчивости, обусловленной различием скоростей диффузии тепла и примеси [1, 2]. К сожалению, мы не нашли в литературе экспериментальных данных с геометрией и набором параметров, отвечающих рассмотренной здесь идеализированной постановке задачи, допускающей аналитическое исследование. Для сопоставления теории с экспериментом требуются, с одной стороны, специально ориентированные эксперименты (известны жидкие среды с более сильно выраженным эффектом $Sore$, чем соленая вода). С другой стороны, реальные экспериментальные установки обычно не обладают такой идеальной симметрией, которая необходима для получения аналитических решений, так что, вероятно, потребуется и численное моделирование.

“ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ” СРЕДЫ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ТЕРМОДИФФУЗИЕЙ

Рассмотрим ситуацию, когда среда в области значений параметров ниже порога возникновения рассмотренной неустойчивости нагревается

от одной из боковых границ, т.е. одно из крайних условий (5) изменено:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -Q < 0 \text{ при } x = -L/2, \quad (17)$$

где $Q > 0$. На первый взгляд, приток тепла, очевидно, должен приводить к повышению температуры вблизи этой границы. Так и обстоит дело при отсутствии эффекта термодиффузии, в чем легко убедиться, например, из простого аналитического решения в предельном случае полуограниченной среды ($L \rightarrow \infty$). Правда, возникающие при нагреве восходящие течения приносят снизу более холодные объемы среды, но это лишь частично компенсирует нагрев от боковой границы. Но учет термодиффузии при отрицательном значении коэффициента $Sore$, как показано выше, эквивалентен существованию неустойчивой стратификации концентрации примеси, $\gamma_s > 0$. Это обстоятельство должно дополнительно усиливать восходящие движения в области притока тепла, т.е. усиливать приток холодных объемов среды снизу. Возникает вопрос, не может ли это в итоге приводить к понижению температуры в области притока тепла. На рис. 2 представлен пример стационарного горизонтального профиля отклонения температуры. Он получен численно из решения системы уравнений (12) совместно с

$$\frac{d^2 W}{dX^2} = \frac{gL^2}{4\nu} (-\alpha\theta + \beta S),$$

при $L = 0.052$ м и тех же, что и выше значениях остальных параметров. Меньшее, чем использованное ранее, значение L отвечает меньшим значениям безразмерных параметров R , B , которые, тем самым находятся несколько ниже порога устойчивости. Видно, что поступление тепла от левой границы действительно приводит к понижению температуры, т.е. проявление термодиффузии делает возможной эффективную “отрицательную теплоемкость” среды. Правее, где имеют место компенсационные нисходящие течения, последние приносят сверху более теплые объемы среды, так что отклонения температуры положительны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При отрицательных значениях коэффициента $Sore$ отклонения плавучести, вызванные температурными возмущениями, могут дополнительно усиливаться за счет отклонений концентрации примеси. Такие проявления термодиффузии, как показано выше, в некоторых отношениях эквивалентны наличию неустойчивой фоновой стратификации концентрации примеси. Гидротермодинамике двухкомпонентных сред, стратифицированных по обоим компонентам, присущ целый

ряд нетривиальных особенностей [8]. Выше показано, что даже относительно слабая термодиффузия в принципе может приводить к дестабилизации среды, сколь угодно устойчиво стратифицированной по плотности. В задаче с внешними источниками тепла представляется нетривиальной также возможность эффективной “отрицательной теплоемкости” – понижения температуры среды в области притоков тепла.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

B	безразмерный параметр
C_j	постоянные интегрирования, м/с
c	концентрация примеси, кг/м ³
\bar{c}	фоновая концентрация примеси, кг/м ³
c'	отклонение концентрации примеси, кг/м ³
e_z	безразмерный единичный вектор в направлении вертикальной оси z
F	безразмерная функция
g	ускорение свободного падения, м/с ²
L	ширина рассматриваемой области, м
l	наименьший из рассматриваемых пространственных масштабов возмущений, м
N_s	частота плавучести, обусловленная эффективной стратификацией концентрации примеси, с ⁻¹
N_T	частота плавучести, обусловленная температурной стратификацией, с ⁻¹
p	возмущение давления, Па
Q	нормированный поток тепла через боковую границу, К/м
q_j	безразмерные корни характеристического уравнения
R	безразмерный параметр
$S_{0,1}$	постоянные интегрирования, ‰
$S(x)$	амплитудная функция отклонения концентрации примеси, ‰;
s	отклонение концентрации примеси, ‰
s_T	коэффициент Соре, (°C) ⁻¹
T	отклонение температуры, К
t	время, с
v	вектор возмущения поля скорости, м/с
$W(x)$	амплитуда вертикальной скорости, м/с
w	вертикальная скорость, м/с

X	безразмерная горизонтальная координата
x	горизонтальная координата, м
z	вертикальная координата, м
α	термический коэффициент расширения среды, К ⁻¹
β	коэффициент, характеризующий влияние концентрации примеси на плотность среды (в случае соленой воды – коэффициент ее соленостного сжатия), (‰) ⁻¹
γ_s	эффективный вертикальный градиент концентрации примеси, ‰/м
γ_T	фоновый вертикальный градиент температуры, К/м
θ	амплитудная функция отклонения температуры, К
$\theta_{0,1}$	постоянные интегрирования, К
μ	массовая доля примеси
$\bar{\mu}$	фоновое значение массовой доли примеси
ν	кинематический коэффициент вязкости, м ² /с
ξ	безразмерный параметр
ρ	плотность среды, кг/м ³
ρ_0	средняя (отсчетная) плотность среды, кг/м ³
ρ'	отклонение плотности среды, кг/м ³
χ	коэффициент диффузии примеси, м ² /с
χ_T	коэффициент переноса, относящийся к термодиффузии, м ² /с
ω	инкремент возмущений, с ⁻¹

ИНДЕКСЫ

0	фоновое значение или номер постоянной интегрирования
j	номер постоянной интегрирования
s	относится к примеси
T	относится к температуре

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
2. Radko T. Double-Diffusive Convection. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
3. Рыжков И.И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск: СО РАН, 2013.

4. *Angeli C., Leonardi E.* The effect of thermodiffusion on the stability of a salinity gradient solar pond // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2005. V. 48. P. 4633.
5. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
6. *Berezhnoi A.N., Semenov A.V.* Thermal diffusion in the helium-xenon gas system // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2005. V. 39. № 2. P. 173. [*Бережной А.Н., Семенов А.В.* Термодиффузия в газовой смеси гелий–ксенон // *Теор. осн. хим. технол.* 2005. Т. 39. № 2. С. 186.]
7. *Ingel L.Kh.* Convective instability mechanism for a binary mixture at a vertical surface // *Tech. Phys.* 2009. V. 54. № 2. P. 204 [*Ингель Л.Х.* Механизм конвективной неустойчивости бинарной смеси у вертикальной поверхности // *Ж. тех. физ.* 2009. Т. 79. № 2. С. 43.]
8. *Ingel L.Kh., Kalashnik M.V.* Nontrivial features in the hydrodynamics of seawater and other stratified solutions // *Phys.-Usp.* 2012. V. 55. № 4. P. 356. [*Ингель Л.Х., Калашник М.В.* Нетривиальные особенности гидротермодинамики морской воды и других стратифицированных растворов // *Усп. физ. наук.* 2012. Т. 182. № 4. С. 379.]