ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ, 2020, том 54, № 5, с. 554–564

УДК 66.02:519.711.3

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗДЕЛЕНИЯ ЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО КРУПНОСТИ НА СИТОВЫХ КЛАССИФИКАТОРАХ

© 2020 г. Ф. Г. Ахмадиев[a], *, Р. Ф. Гиззятов[a]

[a]*Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань, Россия*

**e-mail: Akhmadiev@kgasu.ru*

Поступила в редакцию 30.03.2020 г.
После доработки 06.05.2020 г.
Принята к публикации 15.05.2020 г.

Изучен процесс разделения зернистых материалов на определенные фракции по размерам на ситовых классификаторах на основе пуассоновских процессов, которые относятся к разрывным марковским процессам с дискретными состояниями. Пребывание частиц определенной фракции на поверхности сит определяется как некоторые состояния и точки перехода из одного состояния в другое состояние (просеивание) рассматриваются как случайный процесс. Для определения вероятностей состояний строится система стохастических дифференциальных уравнений, коэффициенты которых вычисляются в зависимости от вероятности просеивания частиц в ячейки сит. Полученные решения позволяют рассчитать коэффициент извлечения и дать оценку эффективности разделения. Проведен вычислительный эксперимент с целью изучения основных характеристик процесса.

Ключевые слова: стохастическое моделирование, зернистый материал, разделение, вероятность просеивания

DOI: 10.31857/S0040357120050024

ВВЕДЕНИЕ

Разделение зернистых материалов по крупности, форме и другим признакам является распространенным технологическим процессом в различных отраслях промышленности, в частности, химической технологии. Существуют различные конструкции аппаратов, позволяющих разделять зернистый материал по крупности, наиболее эффективным видом технологического оборудования для этого являются ситовые устройства [1–3]. Математические модели процессов, происходящих при этом, являются основой для их оптимального оформления и проведения технологического расчета.

В работе [3] математическое моделирование процессов разделения зернистых материалов на многокаскадных классификаторах проводится на основе пуассоновских процессов, которые относятся к разрывным марковским процессам с дискретными состояниями. Исследованию кинетики процессов разделения на ситовых классификаторах посвящен целый ряд работ, например, [4–7]. В работах [4, 5] для описания процесса разделения предлагается использовать теорию марковских процессов, что позволяет определить функцию распределения частиц по размерам в аппарате. При этом в работе [4] процесс разделения представляется как диффузионный процесс с поглощающим экраном, роль которого выполняет поверхность решета и описывается уравнением Колмогорова–Фоккера–Планка.

В работе [6] и в ряде других работ этих авторов для описания процесса разделения в виброожиженном слое сыпучей среды используются ячеечные модели и модели, основанные на теории цепей Маркова. Изучается стохастический процесс миграции мелких частиц в среде крупных в направлении к просеивающей поверхности. Изучению сегрегированных потоков при организации различных процессов переработки зернистых материалов посвящены работа [7] и другие работы этих авторов. В этих работах предлагается принцип организации технологических процессов с управляемыми сегрегированными потоками, образование которых присущи большинству тепломассообменных и гидромеханических процессов переработки дисперсных материалов, связанных с взаимным перемещением частиц. В работе [8] для описания процесса разделения сыпучих материалов на виброгрохотах также используются марковские цепи. Авторы рассматривают процесс сегрегации мелких частиц в виброожижен-

ном слое, их проникновение через отверстие сита и процесс транспортирования всего сыпучего материала по просеивающей поверхности грохота. Моделированию вероятности просеивания методом Монте-Карло посвящены работы [9, 10].

Изучению вероятности просеивания частиц в ячейки сит посвящены работы [2, 5]. Эта вероятность может быть определена в зависимости от геометрических размеров и формы частиц и отверстий ячеек сит, а также скорости вибрационного движения. В работе [1] и в ряде других работ этих авторов изучено движение частиц в колеблющейся среде, рассмотрены различные модели вибрационного движения и получены зависимости для средней скорости, скорости сегрегации. В зависимости от гидродинамических свойств разделяемого материала, гранулометрического состава, формы отдельных частиц, наличия специфических свойств и т.д. движение зернистых материалов по вибрирующей поверхности можно моделировать как в приближении одиночной материальной точки, так и на основе методов механики гетерогенных сред [11–16].

В работе [17] построена математическая модель процесса разделения зернистых материалов на многоярусных ситовых классификаторах на основе теории марковских процессов. В качестве случайного процесса рассмотрено изменение концентрации частиц выделяемых продуктов вдоль сит для каждого яруса и построена система стохастических дифференциальных уравнений относительно ее плотности распределения, определение которой позволяет найти все интересующие характеристики процесса. Однако, такой подход дает возможность описать процессы разделения зернистых материалов только на небольшое количество фракций при относительно малом количестве ярусов классификатора. Это связано с трудностями решения системы уравнений Колмогорова–Фоккера–Планка большой размерности относительно плотности распределения случайного процесса.

Математические модели процессов, возникающих при разделении зернистых материалов, являются основой для оптимального проектирования и технологического расчета ситового классификатора. Оптимальные значения режимных и конструктивных параметров классификатора определяются из решения определенных конкретных задач оптимизации в однокритериальной или многокритериальной постановке [18, 19]. В качестве критериев оптимизации могут быть рассмотрены производительность оборудования, эффективность разделения, другие экономические показатели.

Таким образом, для моделирования процесса разделения зернистых материалов на определенные фракции по размерам можно использовать различные подходы, однако с учетом случайного характера процесса в целом наиболее предпочтительным является стохастический подход [3–11, 20].

Несмотря на очевидные достижения в области количественного описания процессов разделения зернистых материалов, чему способствовало развитие математического моделирования и широкое применение вычислительной техники на основе теории стохастических процессов и методов механики гетерогенных сред, описание этих процессов с учетом дискретности, стохастичности и оптимальное их оформление являются недостаточно полными. Также следует отметить, что мало публикаций, связанных с оптимизацией процессов разделения, особенно в многокритериальной постановке. Поэтому математическое моделирование процессов разделения зернистых материалов по различным признакам с учетом стохастичности, разработка методики расчета и их оптимальное оформление представляют собой актуальную задачу химической технологии и смежных отраслей промышленности.

Целью данной работы являются математическое моделирование процессов выделения целевых продуктов по размерам из зернистого материала на ситовых классификаторах на основе пуассоновских процессов и проведение вычислительного эксперимента по построенным математическим моделям.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рассматривается процесс разделения зернистых материалов на определенные фракции по размерам на многоярусном ситовом классификаторе, который представляет собой набор просеивающих поверхностей, выполненных в виде сита или решета и расположенных одна над другой, образуя ярусы. Исходный зернистый материал, который характеризуется некоторой функцией распределения по размерам, подается на начало верхнего яруса и в процессе вибрационного движения делится на проходовую и сходовую части. При этом первая по крупности фракция снимается с первого сверху яруса, а продуктом для разделения на следующем i-м ярусе является зернистый материал, просеянный с верхнего $i-1$-го яруса.

Обозначим через ΔX_i^j – расстояние, которое частицы j-й фракции проходят при движении по поверхности i-го сита классификатора ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,m+1}$), и назовем случайным событием или скачком – просеивание частицы в ячейку сита, а интенсивностью событий λ – число событий на единицу длины. Каждое событие можно представить точкой на оси координат, поэтому рассмотрим некоторое случайное размещение точек на оси Ox (последовательность событий). Пребывание выбранных частиц на поверхности i-го сита

классификатора определим как состояние E_i. Тогда, попадая на начало верхнего сита с вероятностью, равной единице, частицы в процессе вибрационного движения с некоторыми вероятностями проходят сквозь отверстия сит классификатора и тем самым проходят через последовательность состояний $E_1 \to E_2 \to \ldots$. Физическая картина процесса требует также, чтобы скачок обязательно приводил из состояния E_i только в соседнее состояние E_{i+1}, так что сумма $S_i^j = \Delta X_1^j + \ldots + \Delta X_i^j$ является точкой перехода из состояния E_i в состояние E_{i+1}. Таким образом, точки перехода из состояния в состояние рассматриваются как пуассоновский процесс, который можно отнести к разрывным марковским процессам с дискретными состояниями. Подобные процессы однозначно определяются начальным состоянием и вероятностями перехода [21]. Для описания системы с конечным числом состояний E_i необходимо задать m пуассоновских потоков, которые однозначно определяются параметрами интенсивности событий на ситах $\lambda_i(x)$, $i = \overline{1,m}$.

Изменения концентрации проходовых частиц, условий стесненности, толщины слоя движущегося зернистого материала по длине сит и ряда других факторов, могут привести к изменениям интенсивности просеивания по длине сит также и условий протекания процесса. Поэтому описание процесса проводится на основе как однородного, так и неоднородного по координате пуассоновского процесса (по аналогии со стационарными и нестационарными процессами) [22]. Для однородного процесса параметр интенсивности событий на ситах определяется как постоянная величина, а для неоднородного процесса его значение будет зависеть от положения по длине сита.

Однородный процесс. Параметры интенсивности событий на ситах λ_i зависят от среднего значения расстояния ΔX_i^j, которое для отдельной частицы j-й фракции, скользящей по вибрирующей поверхности сита в направлении движения, можно рассматривать как дискретную случайную величину с геометрическим распределением со значениями $\delta_i, 2\delta_i, 3\delta_i, \ldots$, где $\delta_i = 2a_i$ — шаг i-го сита. Следовательно, расстояние ΔX_i^j рассматривается как интервал ожидания скачка (успеха) в последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании p_i, где p_i — вероятность просеивания частицы в ячейку i-го сита. Вычисление вероятностей p_i для частиц и ячеек сит различных геометрических форм и размеров в зависимости от относительной скорости вибрационного движения рассмотрено в работе [5].

Определим математическое ожидание величины ΔX_i^j:

$$M\left[\Delta X_i^j\right] = \delta_i p_i + 2\delta_i p_i q_i + 3\delta_i p_i q_i^2 + \ldots + r\delta_i p_i q_i^{r-1} + \ldots = \delta_i p_i (1 + 2q_i + 3q_i^2 + \ldots),$$

где $q_i = 1 - p_i$. Сумма, стоящая в скобках, является результатом дифференцирования геометрической прогрессии $q_i + q_i^2 + q_i^3 + \ldots = q_i/(1 - q_i)$ по параметру q_i. Поэтому эту сумму можно вычислить следующим образом:

$$1 + 2q_i + 3q_i^2 + \ldots = \frac{d}{dq_i}\left(q_i/(1 - q_i)\right) = 1/(1 - q_i)^2.$$

В итоге математическое ожидание расстояния ΔX_i^j между случайными точками S_{i-1} и S_i пуассоновского процесса определяется по выражению $M\left[\Delta X_i^j\right] = \delta_i p_i/(1 - q_i)^2 = \delta_i/p_i = 2a_i/p_i$. Тогда интенсивность скачков можно найти по формуле $\lambda_i = 1/M\left[\Delta X_i^j\right] = p_i/2a_i$.

Предложенная модель описывает интервал ожидания скачков ΔX_i^j для отдельных частиц как геометрически распределенную дискретную случайную величину, которая при малых значениях вероятностей p_i приближается к показательному распределению:

$$P\left\{\Delta X_i^j > x\right\} = (1 - p_i)^{x/2a_i} = (1 - p_i)^{(-1/p_i)(-p_i x/2a_i)} \approx \exp(-\lambda_i x),$$

$$P\left\{\Delta X_i^j \le x\right\} = F_i(x) = 1 - \exp(-\lambda_i x).$$

Таким образом, интервал ΔX_i^j пребывания отдельной частицы в состоянии E_i для точечного пуассоновского процесса рассматривается как показательное распределение с плотностью $\dfrac{dF_i(x)}{dx} = f_i(x) = \lambda_i \exp(-\lambda_i x)$.

Обозначим через $P_i^j(x)$ вероятность того, что в точке x частицы j-й фракции находятся в состоянии E_i.

Для определения вероятностей $P_i^j(x)$ составим систему разностных уравнений. Рассмотрим участок первого сита по направлению движения частицы $(x; x + \Delta x)$, где интервал Δx является коротким, и определим вероятность того, что на этом интервале не появится ни одно событие, т.е. частица останется в состоянии E_1, если она в точке x находилась в том же состоянии. Тогда для верхнего (первого) сита разностное уравнение можно записать в виде: $P_1^j(x + \Delta x) = P_1^j(x) P\left\{\Delta X_1^j > \Delta x\right\}$,

где $P\left\{\Delta X_1^j > \Delta x\right\}$ определяет вероятность того, что в интервале Δx по направлению движения частицы не появится ни одно событие.

Для остальных сит, начиная со второго, разностные уравнения запишутся в виде:

$$P_i^j(x+\Delta x) = P_i^j(x)P\left\{\Delta X_i^j > \Delta x\right\} + \\ + P_{i-1}^j(x)P\left\{\Delta X_{i-1}^j \le \Delta x\right\}, \quad i = \overline{2,m}.$$

Приведенные разностные уравнения следует понимать следующим образом. В точке $x + \Delta x$ частица может находиться в состоянии E_i, если она до этого в точке x находилась в состоянии E_i и на участке $(x; x + \Delta x)$ не перешла в состояние E_{i+1}, либо она в точке x находилась в состоянии E_{i-1} и на участке $(x; x + \Delta x)$ перешла в состояние E_i.

С учетом того, что за малый промежуток Δx частица может перейти из состояния E_i только в соседнее состояние E_{i+1}, система разностных уравнений представляется в виде:

$$P_1^j(x+\Delta x) = P_1^j(x)(1-\lambda_1^j\Delta x) + o(\Delta x) \quad \text{и}$$

$$P_i^j(x+\Delta x) = P_i^j(x)(1-\lambda_i^j\Delta x) + \\ + P_{i-1}^j(x)\lambda_{i-1}^j\Delta x + o(\Delta x), \quad i = \overline{2,m}.$$

В итоге, для определения вероятностей $P_i^j(x)$, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим систему стохастических дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\frac{dP_1^j(x)}{dx} = -\lambda_1^j P_1^j(x), \quad P_1^j(0) = 1, \\ \frac{dP_i^j(x)}{dx} = -\lambda_i^j P_i^j(x) + \lambda_{i-1}^j P_{i-1}^j(x), \\ P_i^j(0) = 0, \quad i = \overline{2,m}. \tag{1}$$

Решение задачи Коши для первого дифференциального уравнения системы имеет следующий вид:

$$P_1^j(x) = \exp(-\lambda_1^j x). \tag{2.1}$$

Решение второго дифференциального уравнения системы, с учетом полученного решения для первого, имеет вид

$$P_2^j(x) = \lambda_1^j \frac{\exp(-\lambda_1^j x) - \exp(-\lambda_2^j x)}{\lambda_2^j - \lambda_1^j} = \\ = \lambda_1^j\left[\Psi_{1,2}^j \exp(-\lambda_1^j x) + \Psi_{2,2}^j \exp(-\lambda_2^j x)\right], \tag{2.2}$$

где $\Psi_{1,2}^j = 1\big/(\lambda_2^j - \lambda_1^j)$ и $\Psi_{2,2}^j = 1\big/(\lambda_1^j - \lambda_2^j)$.

Решение третьего дифференциального уравнения системы, с учетом решений первого и второго уравнений, представляется в следующей форме:

$$P_3^j(x) = \frac{\lambda_1^j\lambda_2^j}{\left(\lambda_2^j - \lambda_1^j\right)}\left[\frac{\exp(-\lambda_1^j x) - \exp(-\lambda_3^j x)}{\lambda_3^j - \lambda_1^j} - \right. \\ \left. - \frac{\exp(-\lambda_2^j x) - \exp(-\lambda_3^j x)}{\lambda_3^j - \lambda_2^j}\right] = \lambda_1^j\lambda_2^j\left[\Psi_{1,3}^j \exp(-\lambda_1^j x) + \right. \\ \left. + \Psi_{2,3}^j \exp(-\lambda_2^j x) + \Psi_{3,3}^j \exp(-\lambda_3^j x)\right], \tag{2.3}$$

где $\Psi_{1,3}^j = 1\Big/\left[(\lambda_2^j - \lambda_1^j)(\lambda_3^j - \lambda_1^j)\right]$, $\Psi_{2,3}^j = 1\Big/\left[(\lambda_1^j - \lambda_2^j)(\lambda_3^j - \lambda_2^j)\right]$, $\Psi_{3,3}^j = 1\Big/\left[(\lambda_1^j - \lambda_3^j)(\lambda_2^j - \lambda_3^j)\right]$.

С учетом вида предыдущих решений и используя метод математической индукции, решение для любого сита, начиная со второго, можно записать в виде

$$P_i^j(x) = \lambda_1^j \ldots \lambda_{i-1}^j\left[\Psi_{1,i}^j \exp(-\lambda_1^j x) + \right. \\ \left. + \Psi_{2,i}^j \exp(-\lambda_2^j x) + \ldots + \Psi_{i,i}^j \exp(-\lambda_i^j x)\right], \tag{3}$$

где $\Psi_{k,i}^j = 1\big/[(\lambda_1^j - \lambda_k^j)\ldots(\lambda_{k-1}^j - \lambda_k^j) \times (\lambda_{k+1}^j - \lambda_k^j)\ldots$ $\ldots(\lambda_i^j - \lambda_k^j)]$. Для первого сита $\Psi_{1,1}^j = 1$.

Вероятность $P_i^j(x)$ определяет вероятность пребывания частицы j-й фракции на поверхности i-го сита.

Отметим, что вероятности состояний $P_i^j(x)$ также можно найти из свойств суммы S_i^j: $P_i^j(x) = P\left\{S_i^j > x\right\} - P\left\{S_{i-1}^j > x\right\}$. Для этого определим функцию и плотность распределения суммы S_i^j. С учетом условия $\lambda_1^j \ldots \lambda_i^j \times \left[\Psi_{1,i}^j\big/\lambda_1^j + \ldots + \Psi_{i,i}^j\big/\lambda_i^j\right] = 1$ их можно представить в виде $F_i^j(x) = 1 - \lambda_1^j \ldots \lambda_i^j\left[\Psi_{1,i}^j \exp(-\lambda_1^j x)\big/\lambda_1^j + \right.$ $\left. + \ldots + \Psi_{i,i}^j \exp(-\lambda_i^j x)\big/\lambda_i^j\right]$ – функция распределения и $\frac{d}{dx}F_i^j(x) = f_i^j(x) = \lambda_1^j \ldots \lambda_i^j \times [\Psi_{1,i}^j \exp(-\lambda_1^j x) + \ldots$ $\ldots + \Psi_{i,i}^j \exp(-\lambda_i^j x)]$ – плотность распределения. С учетом условий $P\left\{S_i^j > x\right\} = 1 - F_i^j(x)$ и $P\left\{S_{i-1}^j > x\right\} = 1 - F_{i-1}^j(x)$, которым удовлетворяют функции распределения сумм, вероятности состояний можно представить в виде

$$P_i^j(x) = \lambda_1^j \ldots \lambda_i^j \times \\ \times\left[\Psi_{1,i}^j \exp(-\lambda_1^j x)\big/\lambda_1^j + \ldots + \Psi_{i,i}^j \exp(-\lambda_i^j x)\big/\lambda_i^j\right] - \\ - \lambda_1^j \ldots \lambda_{i-1}^j\left[\Psi_{1,i-1}^j \exp(-\lambda_1^j x)\big/\lambda_1^j + \right. \\ \left. + \ldots + \Psi_{i-1,i-1}^j \exp(-\lambda_{i-1}^j x)\big/\lambda_{i-1}^j\right] = \\ = \lambda_1^j \ldots \lambda_{i-1}^j\left[\Psi_{1,i}^j \exp(-\lambda_1^j x) + \ldots + \Psi_{i,i}^j \exp(-\lambda_i^j x)\right],$$

где принято во внимание условие $\Psi^j_{k,i-1} = (\lambda^j_i - \lambda^j_k)\Psi^j_{k,i}$.

Вероятность $P^j_i(x)$ в точке $x \geq 0$ определяет долю частиц j-й фракции на поверхности i-го сита и удовлетворяет условию $\sum_{i=1}^{\infty} P^j_i(x) = 1$ [23]. При конечном значении количества сит m выполняется условие $\sum_{i=1}^{m} P^j_i(x) \leq 1$. В этом случае сумму можно интерпретировать как вероятность того, что на расстоянии x имело место лишь конечное число скачков.

Параметры интенсивности λ_i в выражениях для вероятностей состояний (3) вычисляются в зависимости от вероятностей просеивания p_i. Вероятность просеивания в ячейку рассматривается как сложное событие [2]: $p = p_\Gamma p_v$, где p_Γ – вероятность, которая зависит от размеров и формы ячейки сита и частиц разделяемого материала и p_v – вероятность, которая зависит от относительной скорости движения частицы по вибрирующей поверхности. Вероятность от скорости определяется по формулам [5]

$$p_v = 2 - (\Phi(z) + \Phi(z_0)), \quad z = (V_a - V_k)/\sigma,$$
$$z_0 = V_k/\sigma,$$

где V_a – амплитуда скорости частицы относительно сита, $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения, V_k, σ – параметры нормального закона, которые определяются в процессе идентификации построенных моделей. Для этого расчетные значения коэффициента извлечения сравнивают с экспериментальными значениями, полученными при некоторых вполне определенных скоростных режимах работы аппарата.

Вибрационное движение сыпучих сред достаточно подробно изучено в [1], вычисление средней скорости, амплитуды относительной скорости для некоторых режимов вибрационного движения приведены в [5]. Например, относительную скорость для регулярного режима с мгновенными остановками без подбрасывания, который часто применяется в сепарирующих машинах при относительно небольшой толщине слоя движущегося материала, можно записать в виде

$$v_\pm(\tau) = \frac{a_{a_\pm}}{\omega}\left[\frac{1}{1+k_0^2}\{(k_0\sin\tau - \cos\tau) - \right.$$
$$- (k_0\sin\tau_\pm - \cos\tau_\pm)\exp(-k_0(\tau - \tau_\pm))\} -$$
$$\left. - \frac{z_\pm}{k_0}(1 - \exp(-k_0(\tau - \tau_\pm)))\right],$$

где $a_\pm = A\omega^2\frac{\cos(\beta \mp \gamma)}{\cos\gamma}$, $z_\pm = \frac{g}{A\omega^2}\frac{\sin(\alpha \pm \gamma)}{\cos(\beta \mp \gamma)}$, $k_0 = k_{\text{ср}}/\omega$, $\tau = \omega t$, где параметры A и ω – амплитуда и частота колебаний, α и β – углы наклона и вибрации сита, γ – угол трения скольжения, $k_{\text{ср}}$ – коэффициент сопротивления движению частицы в среде. Верхний знак соответствует движению вперед, нижний – назад, а точки перехода $\tau_\pm$ определяются из совместного решения нелинейных уравнений: $v_+(\tau_-) = 0$ и $v_-(\tau_+ + 2\pi) = 0$.

На рис. 1 приведены результаты расчетов вероятностей $P^j_i(x)$ для первых двух сит, $i = \overline{1,2}$, которые позволяют для выбранных фракций оценить коэффициент извлечения и эффективность разделения.

Расчеты показали, что разделение зернистого материала на фракции основано на различной вероятности прохождения через отверстия сит зерен различных форм и геометрических размеров. При этом, длина интервала между скачками в пуассоновском потоке крупных частиц в среднем больше чем в потоке мелких частиц, т.е. $M\left[\Delta X^j_i\right] > M\left[\Delta X^{j+1}_i\right]$, где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$. Вероятность просеивания в ячейку является основным параметром, с помощью которого достигается эффект разделения. Форма и размеры ячеек, параметры скоростного режима, длина сит подбираются таким образом, чтобы доля частиц i-й фракции на поверхности i-го сита в точке $x = L$ значительно превышала сумму всех ее долей на оставшихся ситах, т.е. $P^i_i(L) > \sum_{k=1,k\neq i}^{m} P^i_k(L)$. Первая по крупности фракция снимается с первого сита (кривая *1*), а остальные, более мелкие фракции с первого сита просеиваются (кривые *2–4*). При этом на первом сите остается незначительная доля второй фракции (кривая *2*). Со второго сита снимается вторая по крупности фракция (кривая *2*), а остальные, более мелкие фракции со второго сита просеиваются (кривые *3, 4*). Таким образом, результаты расчетов показали их соответствие реальному процессу.

Важно отметить, что решения (3), полученные на основе однородного пуассоновского процесса, совпадают с решениями, которые в работе [11] получены для тонкослойной классификации, если только средняя скорость вибрационного движения зернистого материала одинакова на всех ситах классификатора. Следовательно, при относительно небольшой толщине слоя движущегося материала описание процесса разделения можно проводить на основе однородного пуассоновского процесса. При этом решения на основе пуассоновских процессов определяются без особых трудностей вычислительного характера.

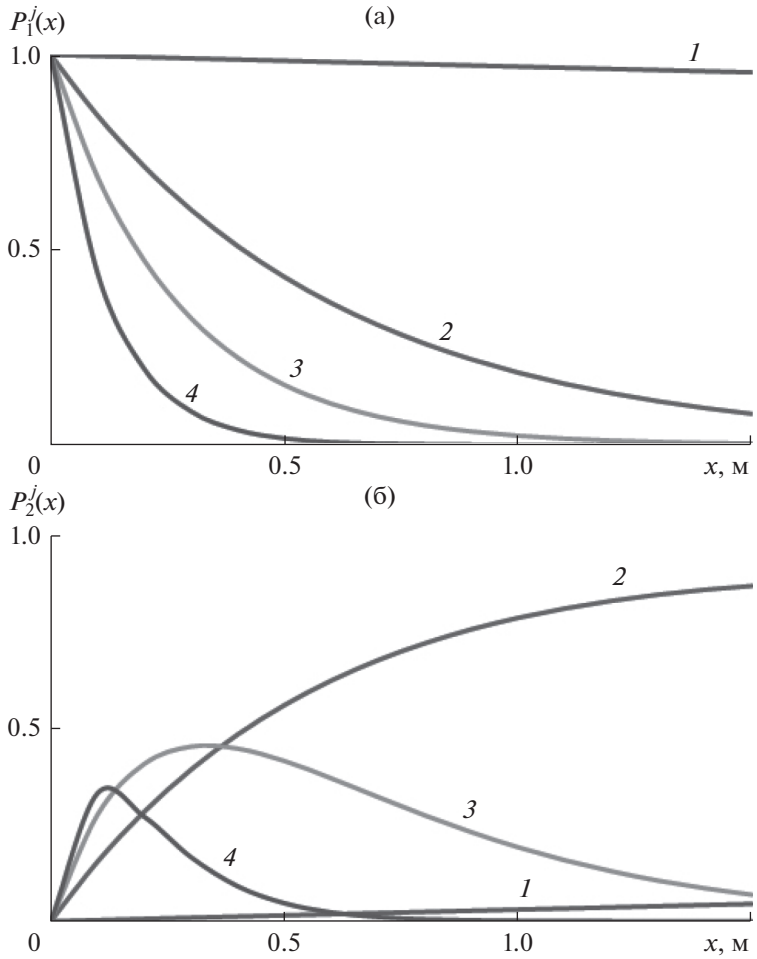

Рис. 1. Вероятности положения частиц выбранных фракций на первом (а) и втором (б) ярусах классификатора для однородного пуассоновского процесса в зависимости от параметров интенсивности (а): *1* – $\lambda_1^1 = 3.08$E-2; *2* – $\lambda_1^2 = 1.68$; *3* – $\lambda_1^3 = 3.74$; *4* – $\lambda_1^4 = 7.16$ (м$^{-1}$); (б): *1* – $\lambda_2^1 = 1.11$E-2; *2* – $\lambda_2^2 = 5.54$E-2; *3* – $\lambda_2^3 = 2.36$; *4* – $\lambda_2^4 = 9.86$ (м$^{-1}$).

Неоднородный процесс. Изменение условий протекания процесса по длине сита вследствие изменения, например, концентрации проходовых частиц, условий стесненности и т.д. может привести к изменению по длине сита интенсивности просеивания, параметра интенсивности λ_i. Поэтому в общем случае просеивание частиц вдоль сит классификатора необходимо рассматривать как неоднородный по координате пуассоновский процесс, i-е состояние которого E_i в точке x будет определяться мгновенной плотностью событий $\mu_i(x)$. Предполагается, что математическое ожидание числа частиц, прошедших сквозь сито, зависит не только от длины участка, но и от его положения по длине сита. В этом случае распределение интервала между соседними скачками ΔX_i^j уже не будет показательным, вид его будет зависеть от координаты первого скачка и вида функции $\mu_i(x)$. Также можно предположить, что первое событие произойдет в точке $x = 0$, когда частицы разделяемого материала из загрузочного бункера попадают на начало первого сита. В точке x мгновенную плотность (интенсивность) событий для i-го состояния можно определить, например, в виде линейной функции $\mu_i(x) = \mu_0 x \big/ M\left[\Delta X_i^j\right]$, μ_0 – интенсивность поступления выбранных частиц на рассматриваемый участок [3]. Тогда мгновенную плотность можно найти по выражению $\mu_i(x) = C_i x$, где параметр $C_i = \mu_0 \lambda_i$, а параметр интенсивности λ_i вычисляется по выражению [3]:

$$\lambda_i = \left(\int_{l_1}^{l_2} f(l) p_i(l) dl\right) \Bigg/ \left(2a_i \int_{l_1}^{l_2} f(l) dl\right), \qquad (4)$$

где $f(l)$ – плотность распределения частиц по размерам в исходном материале с учетом нормировки $\int_{l_{\min}}^{l_{\max}} f(l)dl = 1$, $p_i(l)$ – вероятность просеивания частиц в ячейки i-го сита для выбранной фракции с линейными размерами $(l_1; l_2) \in (l_{\min}; l_{\max})$. Вычисление вероятностей $p_i(l)$ для частиц и ячеек различных форм и размеров рассмотрено в [5].

Для неоднородного по координате пуассоновского процесса построим разностное уравнение для вероятности состояния E_1. С учетом отсутствия последействия для пуассоновского процесса вероятность $P_1^j(x)$ должна удовлетворять условию: $P_1^j(x+\Delta x) = P_1^j(x)P_1^j(\Delta x)$, где интервал $(0; x)$ является длинным, Δx – коротким. В первом приближении вероятность отсутствия событий в интервале Δx при условии, что в интервале $(0; x)$ частицы находились на поверхности первого сита, т.е. в состоянии E_1, можно оценить по выражению $P_1^j(\Delta x) = 1 - C_1^j x\Delta x$, где $C_1^j = \mu_0^j \lambda_1^j$.

Тогда разностное уравнение для вероятности $P_1^j(x)$ имеет следующий вид:

$$P_1^j(x+\Delta x) = P_1^j(x)(1 - C_1^j x\Delta x) + o(\Delta x).$$

Систему разностных уравнений относительно вероятностей состояний $P_i^j(x)$ для неоднородного по координате пуассоновского процесса можно записать в виде

$$P_i^j(x+\Delta x) = P_i^j(x)(1 - C_i^j x\Delta x) + \\ + P_{i-1}^j(x)C_{i-1}^j x\Delta x + o(\Delta x), \quad i = \overline{2, m}.$$

После перехода к пределу при $\Delta x \to 0$, система стохастических дифференциальных уравнений относительно вероятностей состояний имеет следующий вид:

$$\frac{dP_1^j(x)}{dx} = -C_1^j x P_1^j(x), \quad P_1^j(0) = 1, \\ \frac{dP_i^j(x)}{dx} = -C_i^j x P_i^j(x) + C_{i-1}^j x P_{i-1}^j(x), \\ P_i^j(0) = 0, \quad i = \overline{2, m}. \tag{5}$$

Решение первого уравнения системы (5) относительно вероятностей состояний можно представить в виде

$$P_1^j(x) = \exp(-C_1^j x^2/2). \tag{6.1}$$

Решение второго уравнения системы (5), с учетом полученного решения для первого, имеет следующий вид:

$$P_2^j(x) = \\ = C_1^j\left[\Psi_{1,2}^j \exp(-C_1^j x^2/2) + \Psi_{2,2}^j \exp(-C_2^j x^2/2)\right], \tag{6.2}$$

где $\Psi_{1,2}^j = 1/(C_2^j - C_1^j)$ и $\Psi_{2,2}^j = 1/(C_1^j - C_2^j)$.

Решение третьего дифференциального уравнения системы (5), с учетом решений первого и второго уравнений, представляется в следующей форме:

$$P_3^j(x) = C_1^j C_2^j\left[\Psi_{1,3}^j \exp(-C_1^j x^2/2) + \\ + \Psi_{2,3}^j \exp(-C_2^j x^2/2) + \Psi_{3,3}^j \exp(-C_3^j x^2/2)\right], \tag{6.3}$$

где $\Psi_{1,3}^j = 1/\left[(C_2^j - C_1^j)(C_3^j - C_1^j)\right]$, $\Psi_{2,3}^j = 1/\left[(C_1^j - C_2^j)(C_3^j - C_2^j)\right]$, $\Psi_{3,3}^j = 1/[(C_1^j - C_3^j) \times (C_2^j - C_3^j)]$.

С учетом вида предыдущих решений и используя метод математической индукции, решение для любого сита, начиная со второго, может быть представлено в виде

$$P_i^j(x) = C_1^j \ldots C_{i-1}^j\left[\Psi_{1,i}^j \exp(-C_1^j x^2/2) + \\ + \Psi_{2,i}^j \exp(-C_2^j x^2/2) + \ldots + \Psi_{i,i}^j \exp(-C_i^j x^2/2)\right], \tag{7}$$

где $\Psi_{k,i}^j = [1/(C_1^j - C_k^j)\ldots(C_{k-1}^j - C_k^j) \times (C_{k+1}^j - C_k^j)\ldots(C_i^j - C_k^j)]$.

Для неоднородного по координате пуассоновского процесса функцию и плотность распределения сумм S_i^j, которые определяют координаты точек перехода частиц от верхнего сита к нижнему, можно записать в виде $F_i^j(x) = 1 - C_1^j \ldots C_i^j\left[\Psi_{1,i}^j \exp(-C_1^j x^2/2)/C_1^j + \ldots + \Psi_{i,i}^j \exp(-C_i^j x^2/2)/C_i^j\right]$ – функция распределения и $\frac{d}{dx}F_i^j(x) = f_i^j(x) = C_1^j \ldots C_i^j x\left[\Psi_{1,i}^j \exp(-C_1^j x^2/2) + \ldots + \Psi_{i,i}^j \exp(-C_i^j x^2/2)\right]$ – плотность распределения. Зная законы распределения сумм S_i^j можно построить траекторию движения выбранных частиц по поверхностям сит.

Результаты расчетов вероятностей состояний $P_i^j(x)$ для неоднородного по координате пуассоновского процесса приведены на рис. 2, которые позволяют рассчитать для выбранных фракций коэффициент извлечения и эффективность разделения.

Расчеты показывают, что для неоднородного пуассоновского процесса закон распределения случайной величины ΔX_i^j близок нормальному

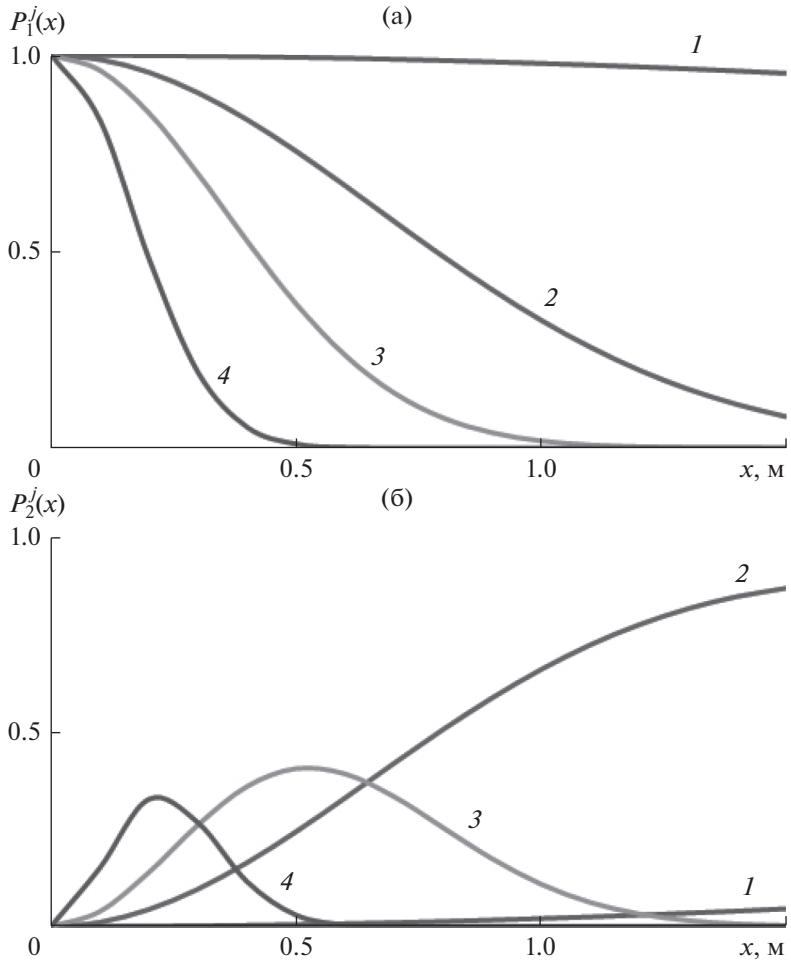

Рис. 2. Вероятности положения частиц выбранных фракций на первом (а) и втором (б) ярусах классификатора для неоднородного пуассоновского процесса в зависимости от мгновенной плотности $\mu_i^j(x) = C_i^j x$ (а): *1* – C_1^1 = 4.19E-2; *2* – C_1^2 = 2.256; *3* – C_1^3 = 7.34; *4* – C_1^4 = 3.16E+1 (м$^{-2}$); (б): *1* – C_2^1 = 1.51E-2; *2* – C_2^2 = 7.39E-2; *3* – C_2^3 = 6.50; *4* – C_2^4 = = 4.45E+1 (м$^{-2}$).

закону. Ее числовые характеристики определяются в зависимости от вероятности просеивания в ячейку и интенсивности входящего потока выбранных частиц μ_0. Поэтому, зная числовые характеристики случайной величины ΔX_i^j, ее плотность распределения $f_i^j(x)$ можно аппроксимировать плотностью нормального закона и использовать при проведении расчетов хорошо разработанный математический аппарат для нормального распределения. Для пуассоновского процесса эффективность процесса разделения в целом мало зависит от вида закона распределения ΔX_i^j, а зависит главным образом от параметра интенсивности $C_i^j = \lambda_i^j \mu_0^j$. С увеличением параметра C_i^j просеивание фракций на каждом сите увеличивается.

Извлечение i-го целевого продукта происходит с i-го сита, коэффициент извлечения определяется по выражению: $\eta_i = P_i^i(L_i)$. При этом вероятности $P_i^i(L_i)$ определяются из решений (3) или (7), $i = \overline{1,m}$. Процесс разделения будет тем эффективнее, чем больше удастся получить извлечение и меньше "загрязнять" продукты: $\eta_i \geq \eta_i^{1*}$, $0 < R_i \leq \eta_i^{2*}$, $i = \overline{1,m}$, где $R_i = P_i^{i-1}(L_i) + P_i^{i+1}(L_i)$ совместная доля $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой фракций, которые попали в i-й продукт и рассматриваются в нем как "загрязнение". При этом $R_1 = P_1^2(L_1)$ и $R_m = P_m^{m-1}(L_m)$. Значения η_i^{1*}, η_i^{2*} выбираются с учетом требований на конечные продукты разделения, например, на извлечение и чистоту. Тогда

эффективность разделения на i-м сите определяется по зависимости

$$Ef_i = \eta_i(1 - R_i) \times 100\%, \quad i = \overline{1, m}. \tag{8}$$

Коэффициент извлечения используется для определения длины сита, а эффективность разделения – для подбора формы и размеров отверстий ячеек. Форма отверстия и его размер выбираются с учетом максимальной эффективности из нескольких видов форм, например, круглого, прямоугольного и т.д. Эти вопросы рассмотрены в [5].

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА РАЗДЕЛЕНИЯ

Для оценки эффективности классификации в научной литературе существует большое количество критериев [18]. Это связано с тем, что результаты классификации можно характеризовать различными показателями, такими как извлечение, загрязнение, концентрация и т.д. Однако, отсутствие единства в вопросе выбора способа оценки и оптимизации процесса в целом создают ситуацию неопределенности при выборе самих классификаторов и оценке их работы. Поэтому в большинстве случаев проектирование нового оборудования и оптимизация действующих производятся на основе предыдущего опыта эксплуатации родственного оборудования. На практике качество разделения наиболее полно оценивается двумя показателями – степенью извлечения из исходного материала требуемой фракции и ее загрязнением.

Для установления оптимальных параметров многоярусного классификатора задачу оптимизации сформулируем в многокритериальной постановке [19]. В качестве критериев выберем производительность аппарата и коэффициент эффективности разделения на ситах (8):

$$\begin{gathered} \max Q(A, \omega, \alpha, \beta, h, B) = \rho_c h B V_{\text{ср}}, \\ \max Ef_i(A, \omega, \alpha, \beta, D_i, L_i, r_i) = \eta_i(1 - R_i) \times 100\%, \\ i = \overline{1, m}, \\ \text{при условиях: } x_j^{\min} \le x_j \le x_j^{\max}, \\ \varphi_k^{\min} \le \varphi_k(A, \omega, \alpha, \beta) \le \varphi_k^{\max}, \end{gathered} \tag{9}$$

где $x_j^{\min}$, $x_j^{\max}$ – наименьшее и наибольшее значение компонента вектора $\bar{x} = (A, \omega, \alpha, \beta, D, L, h, r)$, φ_k – функциональные ограничения, связанные с выбранным скоростным режимом; ρ_c – сыпучая плотность, B – ширина сита, $V_{\text{ср}}$ – средняя скорость перемещения зернистого материала на первом сите, h – толщина слоя зернистого материала в начале первого сита, r_i – требования на продукты разделения, например, $R_i < r_i$. В постановке оптимизации (9) в качестве критерия оптимизации приведенные затраты не рассмотрены.

Оптимизация на многокритериальной основе дает возможность выбора конструктивных и режимных параметров оборудования с учетом нескольких необходимых для производства критериев. Например, наряду с эффективностью необходимо учитывать и показатель производительности, а также и другие экономические показатели. Но важно понимать, что для процесса классификации эти показатели с определенного момента, по мере их приближения по отдельности к экстремальным значениям, вступают в противоречие. Это суть многокритериальных задач.

Многокритериальная задача (9) решается известными методами [5, 19, 24]. Для практической организации процесса классификации в зависимости от типа (формы) частиц, фракционного состава выбираются тип и размер отверстия ячейки, а длина сит, угол их наклона, амплитуда колебаний в результате соответствующих расчетов, приведенных в статье [5]. Оптимальные значения угла вибрации и частоты колебания определяются из решения оптимизационной задачи.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Вычислительный эксперимент проводился с использованием комплекса программ [25]. Рассматривался зернистый материал на полимерной основе с линейными размерами в диапазоне $(0.65–2.65) \times 10^{-3}$ м и одинаковыми диаметрами 1.5×10^{-3} м. Сыпучая плотность материала составила $\rho_c = 1160$ кг/м^3, пористость – 23%. Размеры первой фракции равны $(2.15–2.65) \times 10^{-3}$ м, второй – $(1.65–2.15) \times 10^{-3}$ м. Для выделения первой фракции выбрана решетка длиной $L = 1.5$ м и шириной $B = 1.0$ м с размерами ячеек $2a \times 2b = (3.2 \times 3.2) \times 10^{-3}$ м с круглым отверстием диаметра $D = 2 \times 10^{-3}$ м. Угол наклона сит α менялся в пределах 0°–5°, амплитуда колебаний A – в пределах $(3 - 5) \times 10^{-3}$ м, высота выходной щели загрузочного бункера $h = 4 \times 10^{-3}$ м, требование на чистоту разделения $r_1 \le 8\%$. В результате решения многокритериальной задачи получено компромиссное решение: $Ef_1 = 87.4\%$, $Q = 1320$ кг/ч. Оптимальные значения параметров: $\omega = 48.54$ с$^{-1}$ и $\beta = 10.06°$. Средняя скорость составила $V_{\text{ср}} = 7.94 \times 10^{-2}$ м/с, амплитуда относительной скорости $V_a = 0.285$ м/с, коэффициент извлечения первой фракции равен $\eta_1 = 0.95$. Таким образом, построенные математические модели позволяют определить все интересующие характеристики процесса разделения и на основе решения многокритериальной задачи установить оптимальные значения

конструктивных и режимных параметров многоярусного классификатора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория случайных процессов, в частности пуассоновских, с использованием экспериментальных значений для определения параметров моделей позволяет строить адекватные математические модели процессов разделения зернистых материалов на многоярусных ситовых классификаторах. Построенные модели используются в дальнейшем для компьютерного моделирования и являются основой для оптимизации и управления процессом разделения.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

A	амплитуда колебаний, м
B	ширина сита,
D	диаметр ячейки сита, м
Ef_i	эффективность разделения на i-м сите, %
h	толщина слоя зернистого материала, м
V_a	амплитуда относительной скорости частиц, м/с
$V_{ср}$	средняя скорость частиц, м/с
V_k, σ	параметры вероятности просеивания в ячейку, зависящей от скорости, м/с
ΔX_i^j	интервал пребывания частиц j-й фракции на поверхности i-го сита, м
α, β	углы наклона и вибрации, град
η_i	коэффициент извлечения i-го продукта, %
λ_i	параметр интенсивности на i-м сите, м$^{-1}$
ρ_c	сыпучая плотность зернистого материала, кг/м^3
ω	частота колебаний, с$^{-1}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайсберг Л.А., Иванов К.С., Мельников А.Е.* Совершенствование подходов к математическому моделированию процессов вибрационного грохочения // Обогащ. руд. 2013. № 2. С. 21.
2. *Гортинский В.В., Демский А.Б., Борискин М.А.* Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях. М.: Колос, 1973.
3. *Akhmadiev F.G., Gizzyatov R.F.* Modeling of Separation of Granular Materials on Multiple-Deck Classifiers Using the Theory of Stochastic Processes // Theor. Found. Chem. Eng. 2018. V. 52. № 3. P. 360. [*Ахмадиев Ф.Г., Гиззятов Р.Ф.* Моделирование разделения зернистых материалов на многокаскадных классификаторах на основе теории случайных процессов // Теор. осн. хим. технол. 2018. Т. 52. № 3. С. 306.]
4. *Непомнящий Е.А.* Кинетика некоторых процессов переработки дисперсных материалов // Теор. осн. хим. технол. 1973. Т. 7. № 5. С. 754.
5. *Akhmadiev F.G., Gizzyatov R.F., Nazipov I.T.* Hydrogasdynamics and Kinetics of Separation of Disperse Media on Sieve Classifiers // J. Eng. Phys. Thermophys. 2017. V. 90. № 5. P. 1077. [*Ахмадиев Ф. Г., Гиззятов Р.Ф., Назипов И.Т.* Гидрогазодинамика и кинетика разделения дисперсных сред на ситовых классификаторах // Инж.-физ. Журн. 2017. Т. 90. № 5. С. 1135.]
6. *Огурцов В.А., Федосов С.В., Мизонов В.Е.* Моделирование кинетики виброгрохочения на основе теории цепей Маркова // Строит. матер. 2008. № 5. С. 33.
7. *Долгунин В.Н., Уколов А.А., Иванов О.О.* Кинетические закономерности сегрегации при быстром гравитационном течении зернистых материалов // Теор. осн. хим. технол. 2006. Т. 40. № 4. С. 423.
8. *Надутый В.П., Лапшин Е.С.* Кинетика грохочения с переменным вибровозбуждением по длине просеивающей поверхности // Хим., хим. технол. экол. 2008. № 38. С. 11.
9. *Beeckmans J., Jutan A., Can J.* Monte Carlo simulation of a probability screen // Can. J. Chem. Eng. 1989. V. 67. № 2. P. 329.
10. *Pascoe R.D., Fitzpatrick R., Garratt J.R.* Prediction of automated sorter performance utilizing a Monte Carlo simulation of feed characteristics // Miner. Eng. 2015. V. 72. P. 101.
11. *Akhmadiev F.G., Gizzyatov R.F., Kiyatov K.G.* Mathematical modeling of thin-layer separation of granular materials on sieve classifiers // Theor. Found. Chem. Eng. 2013. V. 47. № 3. P. 254. [*Ахмадиев Ф.Г., Гиззятов Р.Ф., Киямов Х.Г.* Математическое моделирование процесса тонкослойного разделения зернистых материалов по размерам на ситовых классификаторах // Теор. осн. хим. технол. 2013. Т. 47. № 3. С. 309.]
12. *Генералов М.Б.* Механика твердых дисперсных сред в процессах химической технологии. Калуга: Изд-во Бочкаревой, 2002.
13. *Розенбаум Р.Б.* Силы сопротивления движению тел в псевдоожиженном слое и возможность применения понятия эффективной вязкости слоя // Теор. осн. хим. технол. 1979. Т. 13. № 4. С. 570.
14. *Рыжков А.Ф., Толмачев Е.М.* О выборе оптимальной высоты виброожиженного слоя // Теор. осн. хим. технол. 1983. Т. 17. № 2. С. 206.
15. *Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю.* Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964.
16. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
17. *Ахмадиев Ф.Г., Гиззятов Р.Ф., Назипов И.Т.* Математическое моделирование процессов классификации зернистых материалов на ситах // Соврем. наукоемк. технол. 2019. № 12-1. С. 30.
18. *Барский М.Д.* Оптимизация процессов разделения зернистых материалов. М.: Недра, 1978.
19. *Akhmadiev F.G.* Some problems of multicriteria process optimization // Theor. Found. Chem. Eng. 2014. V. 48. № 5. P. 518. [*Ахмадиев Ф.Г.* Некоторые задачи многокритериальной оптимизации технологических

процессов // Теор. осн. хим. технол. 2014. Т. 48. № 5. С. 574.]

20. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969.

21. *Казаков В.А.* Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. М.: Сов. Радио, 1973.

22. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. Радио, 1977.

23. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 1. М.: Мир, 1984.

24. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.

25. *Ахмадиев Ф.Г., Гиззятов Р.Ф., Назипов И.Т.* Компьютерное моделирование и оптимизация кинетики процесса обработки гетерогенных сред. Патент на программный комплекс. Авторское свидетельство 2016661926. 2016.