ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ, 2021, том 55, № 5, с. 652–660

УДК 532.685

ПОСТУПАТЕЛЬНО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПОРИСТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТВЕРДЫМ НЕПРОНИЦАЕМЫМ ЯДРОМ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

О. А. Базаркина[a], *, Н. Г. Тактаров[a], **

[a]Мордовский государственный педагогический университет им. М.Е. Евсевьева, Саранск, Россия

**e-mail: o.a.bazarkina@mail.ru*

***e-mail: n.g.taktarov@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.01.2021 г.
После доработки 16.03.2021 г.
Принята к публикации 23.03.2021 г.

Получены аналитические решения нестационарного уравнения Бринкмана, описывающего течение жидкости внутри погруженной в нее пористой сферической оболочки с твердым непроницаемым ядром, совершающей поступательно-колебательные движения, и уравнения Навье–Стокса в приближении Стокса – вне оболочки. Определены поля скоростей фильтрации в пористой среде и скоростей свободной жидкости вне пористой оболочки. Определена сила, действующая на контрольную сферическую поверхность вокруг пористой оболочки. Приведен анализ полученных решений. Рассмотрены различные частные случаи, в том числе случай равномерного движения пористой оболочки в вязкой жидкости.

Ключевые слова: пористая сферическая оболочка, твердое непроницаемое ядро, поступательно-колебательное движение, вязкая жидкость, уравнение Бринкмана, уравнение Навье–Стокса

DOI: 10.31857/S0040357121040023

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, уравнения гидродинамики в общем виде не могут быть решены точно. В связи с этим представляет большой интерес поиск и исследование важнейших из тех случаев, когда уравнения движения жидкости имеют точные аналитические решения. Некоторые из таких точных решений уравнений гидродинамики получены и подробно исследованы в [1–4].

Аналогично обстоит дело и с уравнениями движения вязких жидкостей через пористые среды: эти уравнения в общем виде также не могут быть решены точно.

Теория движения жидкостей через пористые среды интенсивно развивается в последнее время в связи с разнообразными приложениями в моделировании технологических процессов, а также при изучении природных явлений. Многие технологические процессы в химической промышленности и инженерной практике тесно связаны с движением жидкостей через пористые среды. Движение жидкостей внутри и вне пористых тел определяется уравнениями гидродинамики. Гидродинамические закономерности определяют характер протекания процессов тепло- и массообмена с учетом химических реакций в масштабных промышленных аппаратах. Многочисленные приложения стимулируют исследование течений жидкости внутри и вне пористых тел, ограниченных различными поверхностями, простейшими среди которых являются плоскость, сферическая и цилиндрическая поверхности. Для них при специальных предположениях можно найти аналитические решения соответствующих краевых задач.

В [5] приведен обзор практических приложений гидродинамики при малых числах Рейнольдса для изучения природных явлений и технологических процессов.

В [6, 7] приведены решения задач о движении сплошных (непроницаемых) твердых тел в вязкой жидкости. В частности, в [6] рассмотрены внутренние поперечные волны, возникающие при движении сплошного твердого шара, погруженного в жидкость и совершающего вращательные и поступательные колебания. В [8] при использовании модели фильтрации Бринкмана решена задача об обтекании вязкой жидкостью пористого шара, находящегося в другой пористой среде. В [9, 10] с использованием уравнения фильтрации Дарси решены задачи об обтекании пористой сферической оболочки, ограниченной двумя концентрическими сферическими поверхностями. В [11] при использовании нестационарного уравнения Бринкмана определено движение вязкой жидкости, вызванное вращательным колебательным движением погруженного в нее пористого шара.

В [12] решена задача о поступательно-колебательном движении пористого шара в вязкой жидкости в рамках модели фильтрации Бринкмана.

В [13] определены течения вязкой жидкости, вызванные вращательными колебаниями погруженной в нее пористой сферической оболочки. В приближении Стокса получены аналитические решения нестационарного уравнения Бринкмана в области внутри пористой оболочки и уравнения Навье–Стокса – вне оболочки. Определен момент сил терния, действующих на контрольную сферическую поверхность вокруг пористого тела.

В [14] решена задача о колебательных течениях вязкой жидкости, контактирующей с плоским слоем пористой среды.

В [15–19] приведен вывод уравнений движения жидкости в пористой среде и анализ границ применимости этих уравнений. В [16, 20, 21] приведен вывод и анализ граничных условий на плоской неподвижной поверхности раздела пористой среды и свободной жидкости. В настоящей работе эти граничные условия обобщаются на случай подвижной сферической поверхности раздела пористой среды и жидкости.

Целью работы является исследование влияния поступательного колебательного движения пористой сферической оболочки с твердым непроницаемым ядром в вязкой жидкости на течение жидкости внутри и вне этой оболочки.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассматриваются течения вязкой жидкости при колебательном поступательном движении погруженной в нее пористой сферической оболочки с внутренним и внешним радиусами равными a и b соответственно ($a < b$). Радиус твердого непроницаемого ядра, неизменно связанного с пористой оболочкой, равен a. Пористая среда предполагается недеформируемой, однородной и изотропной. Предполагается, что пористая среда имеет достаточно большую пористость Γ, близкую к единице, и высокую проницаемость K. При таких условиях скорость жидкости в пористой матрице может заметно отличаться от скорости матрицы.

Скорость оболочки вместе с ядром запишем как гармоническую функцию от времени t^* вида $\boldsymbol{\upsilon}^* = \boldsymbol{\upsilon}_0 \exp(-i\omega t^*)$, где $\boldsymbol{\upsilon}_0$ – действительный вектор, ω – частота колебаний. Знаком "*" будем обозначать размерные переменные (но не параметры), чтобы отличать их от безразмерных, обозначаемых теми же символами. Поскольку все рассматриваемые в данной работе математические операции – линейные, взятие действительных частей от соответствующих комплексных выражений можно проделать в окончательных результатах. Величины, относящиеся к областям, занятым пористой оболочкой и свободной жидкостью вне оболочки, обозначаются индексами 1 и 2 соответственно.

Движение жидкости, неподвижной на бесконечности, рассматривается в неподвижной системе координат $Ox^*y^*z^*$, начало O которой в данный момент времени совпадает с геометрическим центром сферической оболочки. Ось z^* и вектор $\boldsymbol{\upsilon}_0 = \upsilon_0\mathbf{e}$ ($\upsilon_0 > 0$, $|\mathbf{e}| = 1$) параллельны.

Уравнения нестационарного движения жидкости в областях 1 и 2 запишем в приближении Стокса в виде [6, 15–18]

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial \mathbf{u}_1^*}{\partial t^*} = -\nabla^* p_1^* + \eta' \Delta^* \mathbf{u}_1^* - \frac{\eta}{K}\left(\mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}^*\right), \quad \nabla^* \mathbf{u}_1^* = 0,$$
$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}_2^*}{\partial t^*} = -\nabla^* p_2^* + \eta \Delta^* \mathbf{u}_2^*, \quad \nabla^* \mathbf{u}_2^* = 0. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u}_1^*$ – скорость фильтрации, Γ – пористость, p_1^* – давление в пористой среде, ρ – плотность жидкости, η' – величина с размерностью вязкости, η – вязкость свободной (вне пористого тела) жидкости, K – коэффициент проницаемости пористой среды, $\mathbf{u}^* = \Gamma\boldsymbol{\upsilon}^*$, $\mathbf{u}_2^*$ и p_2^* – скорость и давление свободной жидкости. Предполагая, что пористость близка к единице, примем далее $\eta' = \eta$ [15, 18].

В связи с симметрией задачи ее решение удобнее рассматривать в сферической системе координат r^*, θ, φ, полярная ось которой совмещена с осью z^*, от которой отсчитывается угол θ. Вследствие предполагаемой осевой симметрии от угла φ величины не зависят.

Граничные условия [16, 20, 21]:

на поверхности твердого ядра, при $r^* = a$:

$$u_{1r}^* - \Gamma\upsilon^*\cos\theta = 0 \quad (\upsilon^* = \upsilon_0\exp(-i\omega t^*)),$$
$$u_{1\theta}^* + \Gamma\upsilon^*\sin\theta = B\left(\frac{\partial u_{1\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{u_{1\theta}^*}{a} - \frac{\Gamma\upsilon^*\sin\theta}{a}\right), \tag{2}$$

на внешней поверхности сферической оболочки, при $r^* = b$:

$$u_{1r}^* - \Gamma\upsilon^*\cos\theta = u_{2r}^* - \upsilon^*\cos\theta,$$
$$u_{1\theta}^* + \Gamma\upsilon^*\sin\theta = u_{2\theta}^* + \upsilon^*\sin\theta, \quad p_1^* = p_2^*, \tag{3}$$
$$\Lambda\left(\frac{\partial u_{1\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{\partial u_{2\theta}^*}{\partial r^*}\right) = u_{1\theta}^* + \Gamma\upsilon^*\sin\theta.$$

Условия на бесконечности при $r^* \to \infty$: $u_{2r}^* = 0$, $u_{2\theta}^* = 0$. К этим граничным условиям следует добавить условия конечности величин всюду в областях их определения.

Первое граничное условие (2) выражает условие непротекания жидкости на подвижной твердой поверхности ядра. Второе – это условие скольжения жидкости в пористой среде вдоль твердой поверхности ядра [5]. Величина B носит название коэффициента трения скольжения. При $B = 0$ скольжение жидкости отсутствует. При $B \to \infty$ имеем случай отсутствия касательных напряжений (пузырек газа вместо твердого ядра).

Первые два условия (3) выражают условия непрерывности скорости на поверхности раздела пористой среды и свободной жидкости. Третье условие выражает непрерывность давления на поверхности раздела. Постоянная Λ в четвертом условии (3) определяется равенством $\Lambda = \sqrt{K}/\tau$, где τ – безразмерный параметр, зависящий от свойств пористой матрицы [16, 21]. При $\Lambda = 0$ (что равносильно $K = 0$, т.е. пористая среда непроницаема для жидкости) четвертое условие (3) принимает вид $u_{1\theta}^* + \Gamma\upsilon^*\sin\theta = 0$. При $\Lambda \to \infty$ ($\tau \to 0$) четвертое условие принимает вид, формально аналогичный условию непрерывности касательных напряжений на поверхности раздела двух вязких жидкостей с одинаковой вязкостью.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Введем безразмерные переменные: $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*/b$, $t = \omega t^*$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*/\upsilon_0 = \mathbf{e}\Gamma\exp(-it)$, $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j^*/\upsilon_0$, $p_j = p_j^*(b/\eta\upsilon_0)$ ($j = 1, 2$).

Уравнения движения жидкости (1) в безразмерном виде

$$\frac{K\omega}{\nu\Gamma}\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t} = -\frac{K}{b^2}(\nabla p_1 - \Delta\mathbf{u}_1) - (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}),$$
$$\nabla\mathbf{u}_1 = 0, \quad (\alpha < r < 1); \tag{4}$$
$$\frac{\omega b^2}{\nu}\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial t} = -\nabla p_2 + \Delta\mathbf{u}_2, \quad \nabla\mathbf{u}_2 = 0, \quad (r > 1).$$

Здесь $\alpha = a/b$ ($\alpha < 1$), $\nu = \eta/\rho$.

Безразмерные граничные условия:

$$\text{при } r = \alpha: u_{1r} - \Gamma e^{-it}\cos\theta = 0,$$
$$u_{1\theta} + \Gamma e^{-it}\sin\theta = \beta\left(\frac{\partial u_{1\theta}}{\partial r} - \frac{u_{1\theta}}{\alpha} - \frac{\Gamma e^{-it}\sin\theta}{\alpha}\right);$$
$$\text{при } r = 1: u_{1r} - \Gamma e^{-it}\cos\theta = u_{2r} - e^{-it}\cos\theta, \tag{5}$$
$$u_{1\theta} + \Gamma e^{-it}\sin\theta = u_{2\theta} + e^{-it}\sin\theta, \quad p_1 = p_2,$$
$$\lambda\left(\frac{\partial u_{1\theta}}{\partial r} - \frac{\partial u_{2\theta}}{\partial r}\right) = u_{1\theta} + \Gamma e^{-it}\sin\theta;$$
$$\text{при } r \to \infty: u_{2r} \to 0, \ u_{2\theta} \to 0.$$

Здесь $\beta = B/b$, $\lambda = \Lambda/b$. К этим граничным условиям следует добавить также условия конечности всех величин всюду в областях их определения. В связи с осевой симметрией принимаем $u_{1\varphi} \equiv 0$, $u_{2\varphi} \equiv 0$.

Скорости жидкости будем искать в виде, пропорциональном e^{-it}, поэтому: $\partial\mathbf{u}_j/\partial t = -i\mathbf{u}_j$ ($j = 1, 2$).

Из уравнений непрерывности следует, что компоненты скоростей жидкости $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ можно выразить через функции тока ψ_1 и ψ_2 для осесимметричного течения, к которому, в частности, относится обтекание пористой сферической оболочки с твердым непроницаемым ядром. Выражения компонент скорости через функции тока в сферических координатах имеют вид [6]

$$u_{jr} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi_j}{\partial\theta}, \quad u_{j\theta} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_j}{\partial r},$$
$$u_{j\varphi} \equiv 0 \quad (j = 1, 2). \tag{6}$$

Безразмерные уравнения движения (4) в сферической системе координат имеют следующий вид:

в области 1 ($\alpha < r < 1$):

$$-\frac{iK\omega}{\nu\Gamma}u_{1r} = -\frac{K}{b^2}\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{K}{b^2}\left[\Delta u_{1r} - \frac{2u_{1r}}{r^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_{1\theta}\sin\theta)\right] - (u_{1r} - u_r),$$
$$-\frac{iK\omega}{\nu\Gamma}u_{1\theta} = -\frac{K}{b^2 r}\frac{\partial p_1}{\partial\theta} + \frac{K}{b^2}\left[\Delta u_{1\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_{1r}}{\partial\theta} - \right. \tag{7}$$
$$\left. - \frac{u_{1\theta}}{r^2\sin^2\theta}\right] - (u_{1\theta} - u_\theta);$$

в области 2 ($r > 1$):

$$-\frac{i\omega b^2}{\nu}u_{2r} = -\frac{\partial p_2}{\partial r} + \Delta u_{2r} - \frac{2u_{2r}}{r^2} -$$
$$- \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_{2\theta}\sin\theta), \tag{8}$$
$$-\frac{i\omega b^2}{\nu}u_{2\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p_2}{\partial\theta} + \Delta u_{2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_{2r}}{\partial\theta} - \frac{u_{2\theta}}{r^2\sin^2\theta}.$$

Здесь $\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$.

Исключая давления p_1 и p_2 из уравнений (7) и (8) соответственно и используя (6), находим дифференциальные уравнения для определения функций тока ψ_1 и ψ_2:

$$\left[E^2\left(E^2 + m_j^2\right)\right]\psi_j = 0 \quad (j = 1, 2). \tag{9}$$

Здесь $m_1^2 = \frac{2}{\Gamma}\left[i\left(\frac{b}{\delta_2}\right)^2 - \left(\frac{b}{\delta_1}\right)^2\right]$, $m_2^2 = 2i\left(\frac{b}{\delta_2}\right)^2$, $\delta_1 = \sqrt{\frac{2K}{\Gamma}}$, $\delta_2 = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$, $m_1 = \frac{b}{\sqrt{\Gamma}}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{i\delta}{\delta_2^2}\right)$, $\frac{1}{\delta^2} = -\frac{1}{\delta_1^2} + \sqrt{\frac{1}{\delta_1^4} + \frac{1}{\delta_2^4}}$, $m_2 = \frac{b}{\delta_2}(1+i)$,

$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ — дифференциальный оператор [5].

Для удовлетворения граничных условий (5) функции тока будем искать в виде: $\psi_j(r, \theta, t) = e^{-it} f_j(r)\sin^2\theta$ $(j = 1, 2)$.

Подставляя в уравнения (9) выражения для ψ_1 и ψ_2, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$.

Граничные условия к этим дифференциальным уравнениям имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\text{при } r = \alpha\text{: } \frac{2}{\alpha^2} f_1(r) - \Gamma = 0,\\
-\frac{1}{\alpha} f_1'(r) + \Gamma = \beta\left(\frac{2}{\alpha^2} f_1'(r) - \frac{1}{\alpha} f_1''(r) - \frac{\Gamma}{\alpha}\right);\\
\text{при } r = 1\text{: } 2f_1(r) - \Gamma = 2f_2(r) - 1,\\
-f_1'(r) + \Gamma = -f_2'(r) + 1, \qquad (10)\\
f_1'''(r) + f_1'(r)\left(m_1^2 - 2\right) + 4f_1(r) + m_2^2 - m_1^2\Gamma =\\
= f_2'''(r) + f_2'(r)\left(m_2^2 - 2\right) + 4f_2(r),\\
\lambda\left(f_1'(r) - f_1''(r) - f_2'(r) + f_2''(r)\right) = -f_1'(r) + \Gamma.
\end{gathered}
$$

Сюда добавляется также условие конечности решений в областях их определения.

Уравнение для $f_1(r)$ имеет вид

$$
f_1^{IV}(r) - \frac{4}{r^2} f_1''(r) + \frac{8}{r^3} f_1'(r) - \frac{8}{r^4} f_1(r) + m_1^2 \times \left(f_1''(r) - \frac{2}{r^2} f_1(r)\right) = 0. \qquad (11)
$$

С помощью подстановки $f_1''(r) - \frac{2}{r^2} f_1(r) = \sqrt{r} g_1(r)$ обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка (11) сводится к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$
r^2 g_1''(r) + r g_1'(r) + \left[m_1^2 r^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] g_1(r) = 0, \qquad (12)
$$

общее решение которого имеет следующий вид:

$$
g_1(r) = A_1 J_{3/2}(m_1 r) + B_1 Y_{3/2}(m_1 r).
$$

Здесь $J_{3/2}$ — функция Бесселя первого рода, $Y_{3/2}$ — функция Бесселя второго рода [22]; A_1, B_1 — неопределенные коэффициенты.

Таким образом, получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка для определения функции $f_1(r)$:

$$
f_1''(r) - \frac{2}{r^2} f_1(r) = \sqrt{r}\left[A_1 J_{3/2}(m_1 r) + B_1 Y_{3/2}(m_1 r)\right]. \qquad (13)
$$

Общее решение уравнения (13):

$$
f_1(r) = C_1 r^2 + \frac{D_1}{r} - \frac{\sqrt{r}}{m_1^2}\left[A_1 J_{3/2}(m_1 r) + B_1 Y_{3/2}(m_1 r)\right],
$$

где C_1 и D_1 — неопределенные коэффициенты.

Согласно [22] функции Бесселя $J_{3/2}$ и $Y_{3/2}$ могут быть записаны в виде

$$
\begin{gathered}
J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\left(\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}\right),\\
Y_{3/2} = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\left(-\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}\right).
\end{gathered} \qquad (14)
$$

С учетом равенств (14) общее решение уравнения (13) примет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
f_1(r) = C_1 r^2 + \frac{D_1}{r} - \frac{1}{m_1^{7/2} r}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \times\\
\times\left[A_1(\sin m_1 r - m_1 r\cos m_1 r) -\right.\\
\left. - B_1(\cos m_1 r + m_1 r \sin m_1 r)\right].
\end{gathered} \qquad (15)
$$

Уравнение для $f_2(r)$ имеет вид

$$
f_2^{IV}(r) - \frac{4}{r^2} f_2''(r) + \frac{8}{r^3} f_2'(r) - \frac{8}{r^4} f_2(r) + m_2^2 \times \left(f_2''(r) - \frac{2}{r^2} f_2(r)\right) = 0. \qquad (16)
$$

Аналогично общее решение уравнения (16):

$$
f_2(r) = C_2 r^2 + \frac{D_2}{r} - \frac{\sqrt{r}}{m_2^2}\left[A_2 J_{3/2}(m_2 r) + B_2 Y_{3/2}(m_2 r)\right].
$$

Здесь A_2, B_2, C_2, D_2 — неопределенные коэффициенты.

Решение уравнения (16), конечное при $r \to \infty$ и с учетом равенств (14):

$$
f_2(r) = \frac{D_2}{r} + \frac{1}{m_2^{7/2} r}\sqrt{\frac{2}{\pi}} A_2 e^{i m_2 r}(i + m_2 r). \qquad (17)
$$

Подставляя выражения (15) и (17) в граничные условия (10), получим систему шести алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, D_2. Ввиду громоздкости этих коэффициентов в настоящей статье мы их не приводим.

Компоненты скорости фильтрации и скорости свободной жидкости вне пористой среды имеют следующий вид:

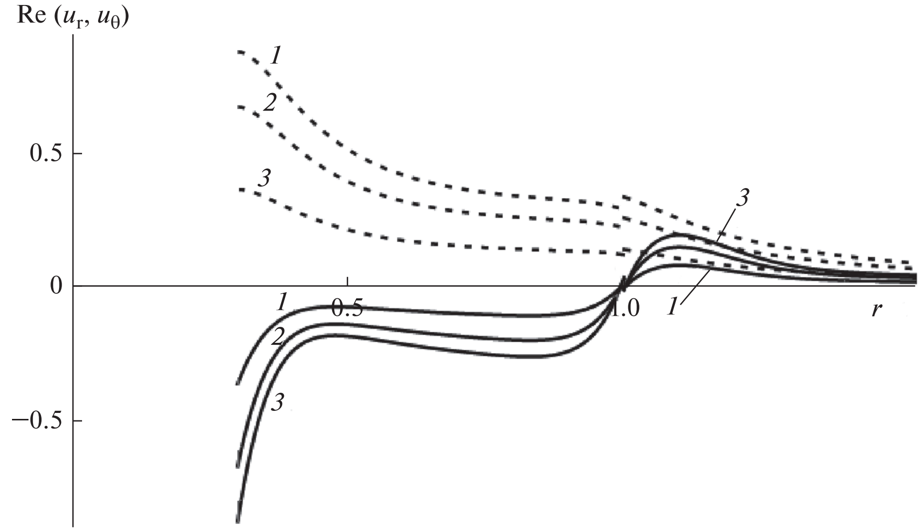

Рис. 1. Зависимость Re u_r (штриховые линии) и Re u_θ (сплошные линии) от r: $t = 0$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0$, $\lambda = 1$, $\Gamma = 0.95$, $b/\delta_1 = 10$, $b/\delta_2 = 10$, $\theta = \pi/8$ (*1*), $\pi/4$ (*2*) и $3\pi/8$ (*3*).

$$u_{1r} = \frac{2e^{-it}\cos\theta}{r^2}\left(C_1 r^2 + \frac{D_1}{r} - \frac{1}{m_1^{7/2} r}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\right.$$
$$\times\left[A_1(\sin m_1 r - m_1 r\cos m_1 r) -\right.$$
$$\left.\left. - B_1(\cos m_1 r + m_1 r \sin m_1 r)\right]\right), \quad u_{1\theta} = -\frac{e^{-it}\sin\theta}{r}\times$$
$$\times\left(2C_1 r - \frac{D_1}{r^2} + \frac{1}{m_1^{7/2} r^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\right.$$
$$\times\Big[A_1\left(\sin m_1 r - m_1 r\cos m_1 r - m_1^2 r^2 \sin m_1 r\right) -$$
$$\left. - B_1\left(\cos m_1 r + m_1 r \sin m_1 r - m_1^2 r^2\cos m_1 r\right)\Big]\right),$$
$$u_{2r} = \frac{2e^{-it}\cos\theta}{r^2}\left[\frac{D_2}{r} + \frac{1}{m_2^{7/2} r}\sqrt{\frac{2}{\pi}} A_2 e^{im_2 r}(i + m_2 r)\right],$$
$$u_{2\theta} = -\frac{e^{-it}\sin\theta}{r}\times$$
$$\times\left[-\frac{D_2}{r^2} - \frac{1}{m_2^{7/2} r^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} A_2 e^{im_2 r}\left(i + m_2 r - i m_2^2 r^2\right)\right].$$

В частном случае при $\alpha \to 0$ из полученных результатов получается решение задачи о течении вязкой жидкости, вызванного поступательно-колебательным движением пористого шара [12]. Из этого решения, в свою очередь, следует (при $K \to 0$, $\lambda \to 0$) решение задачи о течении вязкой жидкости, вызванном поступательно-колебательным движением твердого непроницаемого шара [6, §24].

Движение жидкости является нестационарным. В связи с этим поля скоростей фильтрации и скоростей свободной жидкости во внутренней и внешней областях пористой сферической оболочки с твёрдым непроницаемым ядром непрерывно изменяются со временем. На рис. 1 показаны профили скоростей фильтрации и свободной жидкости в областях 1 и 2 в момент времени $t = 0$.

На рис. 1 приведены графики зависимости Re u_{jr} и Re $u_{j\theta}$ ($j = 1, 2$) от r для трех значений угла θ ($\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$) при $\alpha = 0.3$, $\beta = 0$, $\lambda = 1$, $\Gamma = 0.95$, $b/\delta_1 = 10$, $b/\delta_2 = 10$.

Из рис. 1 видно, что Re $u_{jr} > 0$ ($j = 1, 2$). Величины Re u_{1r} и Re u_{2r} в областях 1 и 2 монотонно убывают. Величины Re $u_{1\theta} < 0$ и Re $u_{2\theta} > 0$ и немонотонны в областях внутри и вне пористой сферической оболочки. С увеличением значений угла θ скорости Re u_{jr} ($j = 1, 2$) и Re $u_{1\theta}$ уменьшаются при каждом заданном значении r; скорости Re $u_{2\theta}$ при этом возрастают.

На рис. 2, 3 приведены картины линий тока в момент времени $t = 0$. Линии тока во внутренней и внешней областях пористой сферической оболочки с твердым непроницаемым ядром представляют собой семейство кривых: $\psi_1 = \text{const}$ и $\psi_2 = \text{const}$.

Уравнения линий тока в областях 1 и 2 (при $t = 0$):

$$\operatorname{Re}\psi_j(r,\theta) = \operatorname{Re} f_j(r)\sin^2\theta = \text{const}$$
$$(j = 1, 2;\ 0 < \theta < \pi).$$

На рис. 2 приведены линии тока, построенные при $\alpha = 0.3$, $\beta = 0$, $\lambda = 1$, $\Gamma = 0.95$, $b/\delta_1 = 10$, $b/\delta_2 = 10$, const = 0.001, 0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.1, 0.13, 0.15 (*1*–*8*)

На рис. 3 линии тока построены при $\alpha = 0.5$, $\beta = 0$, $\lambda = 1$, $\Gamma = 0.95$, $b/\delta_1 = 50$, $b/\delta_2 = 20$, const = = 0.001, 0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4 (*1*–*11*).

Наличие разрывов графиков на границе пористой среды и свободной жидкости связано с тем, что скорость фильтрации не является скоростью

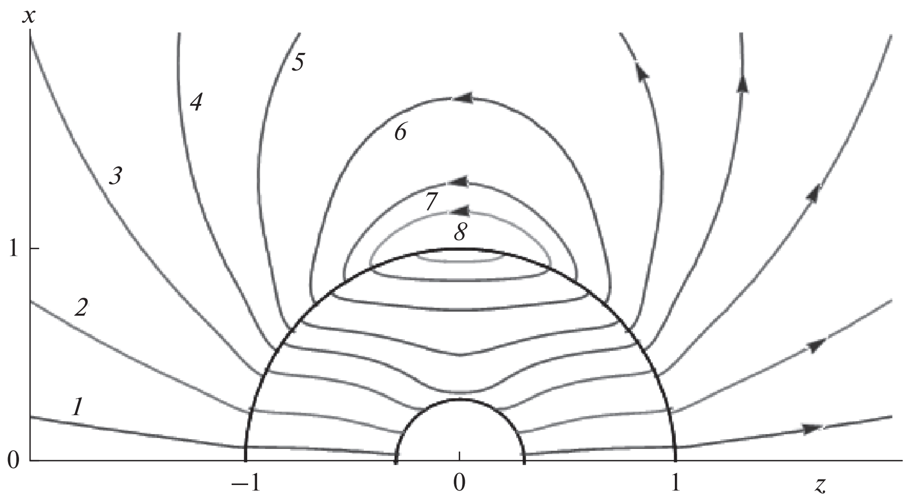

Рис. 2. Линии тока: $t = 0$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0$, $\lambda = 1$, $\Gamma = 0.95$, $b/\delta_1 = 10$, $b/\delta_2 = 10$, const = 0.001 (*1*), 0.01 (*2*), 0.03 (*3*), 0.05 (*4*), 0.07 (*5*), 0.1 (*6*), 0.13 (*7*), 0.15 (*8*).

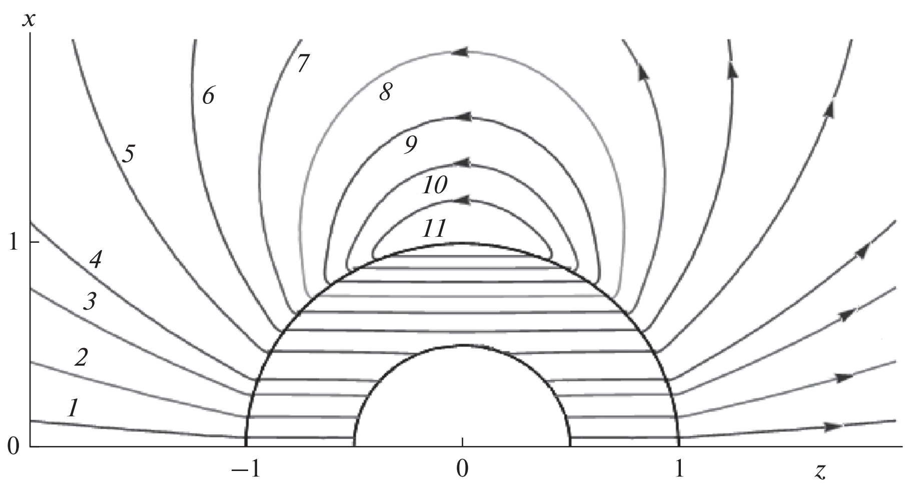

Рис. 3. Линии тока: $t = 0$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0$, $\lambda = 1$, $\Gamma = 0.95$, $b/\delta_1 = 50$, $b/\delta_2 = 20$, const = 0.001 (*1*), 0.01 (*2*), 0.03 (*3*), 0.05 (*4*), 0.1 (*5*), 0.15 (*6*), 0.2 (*7*), 0.25 (*8*), 0.3 (*9*), 0.35 (*10*), 0.4 (*11*).

частиц жидкости. При $\Gamma \to 1$ эти разрывы исчезают.

СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Безразмерная сила, действующая со стороны свободной жидкости на контрольную сферическую поверхность, охватывающую внешнюю поверхность пористой оболочки с твердым непроницаемым ядром, совершающей поступательно-колебательное движение в вязкой жидкости, определяется равенством:

$$F_z = \iint \left(-p_2\cos\theta + \sigma'_{2rr}\cos\theta - \sigma'_{2r\theta}\sin\theta\right)dS,$$

$$\sigma'_{2rr} = 2\frac{\partial u_{2r}}{\partial r},\quad \sigma'_{2r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_{2r}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{2\theta}}{\partial r} - \frac{u_{2\theta}}{r}.$$

Здесь $dS = 2\pi\sin\theta\, d\theta$ – элемент площади, интегрирование проводится по всей поверхности сферы $r = 1$ $(0 \le \theta \le \pi)$, σ'_{2rr} и $\sigma'_{2r\theta}$ – безразмерные тензоры вязких напряжений во внешней области. Величина F_z представляет собой силу, действующую на пористую оболочку с содержащейся в ней жидкостью.

Выражение для F_z принимает вид

$$F_z = \frac{8\pi}{3} e^{-it} \left[\frac{m_2^2 D_2}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A_2 e^{im_2}(i + m_2)}{m_2^{3/2}} \right]$$

или

$$F_z = \frac{2\pi e^{-it}}{3} \times \\ \times \left[\frac{Q_1 + Q_2 m_1 \cos(m_1 - \alpha m_1) + Q_3 \sin(m_1 - \alpha m_1)}{Q_4 + Q_5 m_1 \cos(m_1 - \alpha m_1) + Q_6 \sin(m_1 - \alpha m_1)} \right], \quad (18)$$

где

$$Q_1 = 6\alpha m_1 m_2^2 \left(2 - 2im_2 - 2m_2^2 + \lambda\left(-5m_1^2 + 5im_1^2 m_2 + \right.\right. \\ \left.\left. + 2m_2^2 - 2im_2^3\right)\right), \quad Q_2 = Q_7 + 3\alpha^2 Q_8 - 2m_1^2 m_2^2 + \\ + 3\alpha m_2^2 + 27\alpha^2 - 27i\alpha^2 m_2 - \alpha^3 m_1^2 m_2^2 + \\ + \lambda\left(Q_9 + Q_{10} + Q_{11} + 3i\alpha^2 m_1^2 m_2^3 + 6i\alpha^2 m_2^5\right),$$

$$Q_3 = -Q_7 + 3\alpha Q_8 + m_1^4(\alpha^3 + 2)\left(9 - 9im_2 - m_2^2\right) + \\ + 2m_1^2 m_2^3 (1 - \alpha^3)(i + m_2) + 3\alpha m_1^2 \left(-9 + 9im_2 - \alpha m_2^2\right) + \\ + \lambda\left(-Q_9 - im_2 Q_{10} + m_1^2 Q_{11} + 3\alpha^2 m_1^4 m_2^2 + 6\alpha^2 m_1^2 m_2^4\right),$$

$$Q_4 = 6\alpha m_1 \left(-1 + im_2 + m_2^2 + \lambda\left(m_1^2 - im_1^2 m_2 - m_2^2 + im_2^3\right)\right),$$

$$Q_5 = Q_{12} - 2m_1^2 + 3\alpha - 3i\alpha^2 m_2 - 3\alpha^2 m_2^2 - \alpha^3 m_1^2 + \\ + \lambda\left(Q_{13} + Q_{14} + 3i\alpha^2 m_1^2 m_2 - 3i\alpha^2 m_2^3 + \alpha^3 m_1^4 - \alpha^3 m_1^2 m_2^2\right),$$

$$Q_6 = -Q_{12} + 3m_1^2 - 2m_1^4 - im_1^2 m_2 - m_1^2 m_2^2 + 3\alpha m_1^2 - \\ - 3i\alpha m_2 - 3\alpha m_2^2 - \alpha^3 m_1^4 + i\alpha^3 m_1^2 m_2 + \alpha^3 m_1^2 m_2^2 + \\ + \lambda(-Q_{13} - im_2 Q_{14} + 3\alpha^2 m_1^4 - 3\alpha^2 m_1^2 m_2^2 - \\ - i\alpha^3 m_1^4 m_2 + i\alpha^3 m_1^2 m_2^3), \quad Q_7 = 18m_1^2 - 18im_1^2 m_2 - \\ - 6m_2^2 + 6im_2^3 + 6m_2^4 - 27\alpha + 27i\alpha m_2 - 27\alpha^2 m_1^2 + \\ + 27i\alpha^2 m_1^2 m_2 + 9\alpha^3 m_1^2 - 9i\alpha^3 m_1^2 m_2,$$

$$Q_8 = m_2^2(-3 + m_1^2 + 2im_2 + 2m_2^2),$$

$$Q_9 = -18m_1^4 + 18im_1^4 m_2 + 24m_1^2 m_2^2 - 24im_1^2 m_2^3 - \\ - 6m_2^4 + 6im_2^5 + 27\alpha m_1^2 - 27i\alpha m_1^2 m_2 - 27\alpha m_2^2 + \\ + 27i\alpha m_2^3 - 9\alpha^3 m_1^4 + 9i\alpha^3 m_1^4 m_2 + 9\alpha^3 m_1^2 m_2^2 - 9i\alpha^3 m_1^2 m_2^3,$$

$$Q_{10} = 2m_1^4 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^4 - 3\alpha m_1^2 m_2^2 - 6\alpha m_2^4 + \\ + \alpha m_1^4 m_2^2 + 2\alpha^3 m_1^2 m_2^4, \quad Q_{11} = -27\alpha^2 m_1^2 + \\ + 27i\alpha^2 m_1^2 m_2 + 27\alpha^2 m_2^2 - 27i\alpha^2 m_2^3,$$

$$Q_{12} = 3 - 3im_2 - 3m_2^2 + 3\alpha m_1^2,$$

$$Q_{13} = -3m_1^2 + 3im_1^2 m_2 + 3m_2^2 - 3im_2^3,$$

$$Q_{14} = 2m_1^4 + m_1^2 m_2^2 - 3\alpha m_1^2 + 3\alpha m_2^2.$$

Коэффициенты $Q_1, \ldots, Q_{14}$ определены при $\beta = 0$.

Размерная сила равна $F_z^* = \eta \upsilon_0 b F_z$.

Перейдя в выражении (18) для F_z к пределу $\lambda \to 0$ ($K \to 0$), $\alpha \to 0$, $m_1 \to \infty$ (m_2 – любое), получим силу, действующую на сплошной твердый шар (без пор), совершающий поступательно-колебательное движение в вязкой жидкости:

$$F_z = \frac{2\pi}{3} e^{-it} \left(m_2^2 + 9im_2 - 9\right).$$

В размерном виде это выражение совпадает с приведенным в [6, §24].

При $m_2 = 0$ ($\omega = 0$) формула (18) (без множителя e^{-it}) дает выражение для силы, действующей на контрольную поверхность пористой сферической оболочки с твердым непроницаемым ядром, движущейся равномерно и прямолинейно:

$$F_z = -6\pi\left[\frac{T_1 m_1 \cos(m_1 - \alpha m_1) - T_2 \sin(m_1 - \alpha m_1)}{6\alpha m_1\left(-1 + \lambda m_1^2\right) + T_3 m_1 \cos(m_1 - \alpha m_1) + T_4 \sin(m_1 - \alpha m_1)}\right], \tag{19}$$

где

$$T_1 = T_5 - 3\alpha^2 + \lambda\left(T_6 + 3\alpha^2 m_1^2\right),\quad T_2 = T_5 + 2m_1^4 - 3\alpha m_1^2 + \alpha^3 m_1^4 + \lambda\left(T_6 - 3\alpha^2 m_1^4\right),$$
$$T_3 = 3 - 2m_1^2 + 3\alpha + 3\alpha^2 m_1^2 - \alpha^3 m_1^2 + \lambda\left(-3m_1^2 + 2m_1^4 - 3\alpha m_1^2 + \alpha^3 m_1^4\right),$$
$$T_4 = -3 + 3m_1^2 - 2m_1^4 + 3\alpha m_1^2 - 3\alpha^2 m_1^2 - \alpha^3 m_1^4 + \lambda\left(3m_1^2 + 3\alpha^2 m_1^4\right),\quad T_5 = -2m_1^2 + 3\alpha +$$
$$+ 3\alpha^2 m_1^2 - \alpha^3 m_1^2,\quad T_6 = 2m_1^4 - 3\alpha m_1^2 + \alpha^3 m_1^4.$$

При $\alpha = 0$ выражение (19) принимает вид безразмерной силы, действующей на пористый шар, движущийся равномерно и прямолинейно в вязкой жидкости:

$$F_z = -12\pi\left[\frac{m_1^3\left(-1 + \lambda m_1^2\right)\cos m_1 + m_1^2\left(1 - m_1^2 - \lambda m_1^2\right)\sin m_1}{m_1\left(3 - 2m_1^2 + 2\lambda m_1^4 - 3\lambda m_1^2\right)\cos m_1 + \left(3m_1^2 - 3 - 2m_1^4 + 3\lambda m_1^2\right)\sin m_1}\right].$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано влияние поступательно-колебательного движения пористой сферической оболочки с твердым непроницаемым ядром, погруженной в вязкую жидкость, на движение этой жидкости внутри и вне пористого тела. В неподвижной сферической системе координат найдены аналитические решения нестационарного уравнения Бринкмана, описывающего движение жидкости в пористой среде, и уравнения Навье—Стокса, описывающего движение жидкости вне пористой среды. Приведен анализ решений полученных уравнений. Определены поля скоростей фильтрации и свободной жидкости внутри и вне пористого тела. Построены графики профилей скорости фильтрации и свободной жидкости, а также линии тока при разных значениях параметров. Определена сила, действующая на контрольную сферическую поверхность, охватывающую внешнюю поверхность пористой оболочки с твердым непроницаемым ядром, совершающую поступательно-колебательное движение.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

a, b	радиусы пористой оболочки, м
K	проницаемость, м^2
p^*	давление, Па
r^*, θ, φ	сферические координаты
t^*	время, с
u^*	скорость жидкости, м/с
u_{1r}^*, u_{2r}^*, $u_{1\theta}^*$, $u_{2\theta}^*$	компоненты скоростей
x^*, y^*, z^*	декартовы координаты, м
Γ	пористость
η	вязкость, кг/(м с)
η'	величина с размерностью вязкости
Λ	параметр с размерностью длины
ρ	плотность жидкости, кг/м^3
$\mathbf{v}^*$	скорость оболочки, м/с
$\mathbf{v}_0$	амплитуда скорости оболочки, м/с
ω	частота колебаний, с$^{-1}$

ИНДЕКСЫ

*	размерные величины
1	величины, относящиеся к пористой среде
2	величины, относящиеся к свободной жидкости
r, θ	компоненты векторов и тензоров в сферических координатах
j	номер области (внутри и вне оболочки — 1 и 2 соответственно)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А.* Химическая гидродинамика. Справочное пособие. М.: Квантум, 1996.
2. *Полянин А.Д., Аристов С.Н.* Новый метод построения точных решений трехмерных уравнений Навье–Стокса и Эйлера // Теор. осн. хим. технол. 2011. Т. 45. № 6. С. 696. [*Polyanin A.D., Aristov S.N.* A new method for constructing exact solutions to three-dimensional Navier–Stokes and Euler equations // Theor. Found. Chem. Eng. 2011. V. 45. № 6. P. 885.]
3. *Полянин А.Д., Вязьмин А.В.* Декомпозиция и точные решения трехмерных нестационарных линеаризованных уравнений вязкой жидкости // Теор. осн. хим. технол. 2013. Т. 47. № 2. С. 158. [*Polyanin A.D., Vyazmin A.V.* Decomposition and exact solutions of three-dimensional nonstationary linearized equations for a viscous fluid // Theor. Found. Chem. Eng. 2013. V. 47. № 2. P. 114.]
4. *Просвиряков Е.Ю., Спевак Л.Ф.* Пространственные неоднородные слоистые течения вязкой несжимаемой жидкости // Теор. осн. хим. технол. 2018. Т. 52. № 5. С. 483. [*Prosviryakov E.Y., Spevak L.F.* Layered three-dimensional nonuniform viscous incompressible flows // Theor. Found. Chem. Eng. 2018. V. 52. № 5. P. 765.]
5. *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds Number Hydrodynamics. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965. [*Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.]
6. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Theoretical Physics. V. 6. Fluid Mechanics. N.Y.: Pergamon Press, 2013. [*Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006.]
7. *Batchelor G.K.* An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. [*Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.]
8. *Grosan T., Postelnicu A., Pop I.* Brinkman flow of a viscous fluid through a spherical porous medium embedded in another porous medium // Transp. Porous Media. 2010. V. 81. P. 89.
9. *Jones I.P.* Low Reynolds number flow past a porous spherical shell // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1973. V. 73. № 1. P. 231.
10. *Rajvanshi S.C., Wasu S.* Slow extensional flow past a non-homogeneous porous spherical shell // Int. J. Appl. Mech. Eng. 2013. V. 18. № 2. P. 491.
11. *Taktarov N.G.* Viscous fluid flow induced by rotational-oscillatory motion of a porous sphere // Fluid Dyn. 2016. V. 51. № 5. P. 703. [*Тактаров Н.Г.* Движение вязкой жидкости, вызванное вращательно-колебательным движением пористого шара // Изв. Акад. наук. Мех. жидк. газа. 2016. № 5. С. 133.]
12. *Taktarov N.G., Khramova N.A.* Viscous fluid flows induced by translational-oscillatory motion of a submerged porous sphere // Fluid Dyn. 2018. V. 53. № 6. P. 843. [*Тактаров Н.Г., Храмова Н.А.* Течения вязкой жидкости при поступательно-колебательном движении погруженного пористого шара // Изв. Акад. наук. Мех. жидк. газа. 2018. № 6. С. 123.]
13. *Bazarkina O.A., Taktarov N.G.* Rotational oscillations of a porous spherical shell in viscous fluid // Fluid Dyn. 2020. V. 55. № 6. P. 98. [*Базаркина О.А., Тактаров Н.Г.* Вращательные колебания пористой сферической оболочки в вязкой жидкости // Изв. Акад. наук. Мех. жидк. газа. 2020. № 6. С. 98.]
14. *Kormilitsin A.A., Taktarov N.G.* Oscillatory motion of a viscous fluid in contact with a flat layer of a porous medium // Fluid Dyn. 2018. V. 53. № 1. P. 139. [*Кормилицин А.А., Тактаров Н.Г.* Колебательные движения вязкой жидкости, контактирующей с плоским слоем пористой среды // Изв. Акад. наук. Мех. жидк. газа. 2018. № 1. С. 139.]
15. *Brinkman H.C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Sci. Res. 1947. V. 1. № 1. P. 27.
16. *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. – I. Theoretical development // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. № 14. P. 2635.
17. *Whitaker S.* The Forchheimer equation: a theoretical development // Transp. Porous Media. 1996. V. 25. № 1. P. 27.
18. *Auriault J.-L.* On the domain of validity of Brinkmah's equation // Transp. Porous Media. 2009. V. 79. № 2. P. 215.
19. *Durlofsky L., Brady J.F.* Analysis of the Brinkman equation as a model for flow in porous media // Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 11. P. 3329.
20. *Le Bars M., Worster M.G.* Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium: implications for binary alloy solidification // J. Fluid Mech. 2006. V. 550. P. 149.
21. *Tilton N., Cortelezzi L.* Linear stability analysis of pressure-driven flows in channels with porous walls // J. Fluid Mech. 2008. V. 604. P. 411.
22. *Abramowitz M., Stegun. I.A.* Handbook of Mathematical Functions. Washington, DC: U. S. Government Printing Office, 1964. [*Абрамовиц М., Стиган И.А.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.]