

УДК 66.081.6

## ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НАНОФИЛЬТРАЦИОННОЙ ОЧИСТКИ ПРОМЫШЛЕННЫХ РАСТВОРОВ ОТ ИОНОВ МЕТАЛЛОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИЙ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ И ГИДРОДИНАМИКИ

© 2023 г. С. И. Лазарев<sup>а</sup>, Д. Н. Протасов<sup>а</sup>, О. А. Абоносимов<sup>а</sup>, Д. С. Лазарев<sup>а</sup>, К. В. Шестаков<sup>а, \*</sup><sup>а</sup>Тамбовский государственный технический университет, Тамбов, Россия

\*e-mail: kostyanshestakov@mail.ru

Поступила в редакцию 26.02.2023 г.

После доработки 24.03.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

В работе проанализировано состояние проблемы теоретического прогнозирования коэффициента задержания и удельного выходного потока для очистки или концентрирования промышленных растворов во всем в цикле наночистки или концентрирования промышленных растворов, содержащих ионы металлов. Для прогнозирования наночистки разработан математическая модель, основанная на решении уравнений конвективной диффузии, уравнения Навье–Стокса и уравнения неразрывности потока с применением полярной системы координат. Теоретические результаты, полученные в результате решения системы уравнений позволяют оценить качество и производительность наночистки, путем расчета концентраций в трактах пермеата и ретентата и объема пермеата. Оценка адекватности разработанного метода производилась путем сравнения рассчитанных по модели данных с экспериментальными, полученными на наночистке при разделении растворов, содержащих катионы  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Zn}^{2+}$ , с применением полупроницаемых мембран ОПМН-П и АМН-П.

**Ключевые слова:** наночистка, прогнозирование, мембрана, математическая модель, ионы металлов

DOI: 10.31857/S0040357123030090, EDN: RPFWXZ

### ВВЕДЕНИЕ

В гальванических и химических производствах образуется значительное количество промышленных растворов, которые необходимо очищать и утилизировать. С промышленными растворами, например, гальванических производств, безвозвратно уносится до 70% содержащихся в них металлов, которые являются дорогостоящими. В нашей стране общий уровень извлечения из отработанных промышленных растворов цветных металлов, по последним данным, не превышает 15% от возможного [1–4].

Среди множества методов очистки широкое распространение получили мембранные процессы, в частности, наночистка, где затраты энергии расходуются только на разрыв межмолекулярных связей [5–9]. Как и другие мембранные методы очистки промышленных растворов, наночистка имеет свои преимущества и недостатки. Существенное недостатком является невозможность теоретического прогнозирования коэффициента задержания и удельного выходного потока очистки или концентрирования промышленных растворов для всего цикла наночистки

или концентрирования. На процесс наночистки через полупроницаемую мембрану с течением времени оказывает влияние такие факторы как гидродинамика течения раствора в межмембранном канале и образование диффузионного пограничного слоя. Определяющими кинетическими характеристиками рассматриваемого процесса являются коэффициент задержания и удельный выходной поток наночистки. Таким образом, кинетические характеристики, получаемые в результате наночистки, зависят от концентрации, трансмембранного давления, диффузионных явлений в пограничном слое и гидродинамической обстановки:

$$R = f(D, \Delta C),$$

$$J = f(\Delta P, R_c).$$

где  $R$  – коэффициент задержания,  $J$  – удельный выходной поток  $\text{м}^3/\text{м}^2 \text{с}$ .

Теоретический расчет наночистки и аппаратов проводят, основываясь на явлениях массопереноса растворенного вещества через полупроницаемую мембрану. Авторы рабо-

ты [5] проанализировали некоторые методы теоретического описания эффектов асимметрии транспортных характеристик при использовании композиционных мембран и предложили новый метод расчета массопереноса через асимметричные мембраны, который будет учитывать физико-химические свойства отдельных слоев композиционных мембран и осуществляться в рамках модели однородной “тонкопористой мембраны”. В работе [10] рассмотрена возможность оценки селективной проницаемости мембран на основе данных по кажущемуся коэффициенту диффузии. Методами спектроскопии определяли характеристики коэффициента диффузии малых молекул растворителей в полимерных мембранах. Авторами работы [11] представлены результаты исследования активного слоя композиционных мембран, состоящего из неоднородной запутанной полимерной сетки, пронизанной извилистыми трансмембранными “туннелями” и нанопорами, заполненными водой. Авторами [12] показано использование керамической нанофильтрационной мембраны для контроля органических и неорганических загрязнений. Показано применение комбинированного раствора  $\text{NH}_4\text{HCO}_3$  и  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ , который обеспечивает удовлетворительную степень задерживания иона аммония на уровне 88.7%, что объясняется присутствием в данном растворе анионов более высокой валентности ( $\text{SO}_4^{2-}$ ). Авторами в [13] выполнены экспериментальные исследования по электрохимическим и транспортным параметрам на мембранах ОПМН-П, ОФМН-К при разделении растворов, содержащих нитрат аммония и сульфат калия, методом электронанофильтрации. Показано, что на электрохимические характеристики оказывают влияние дросселирование раствора в электрохимической ячейке и его разогрев. Исследования, проведенные в работе [14], позволили оценить степень влияния температуры, солесодержания и скорости циркуляции раствора на поток пермеата и его компонентный состав. Была выявлена зависимость производительности и времени ресурсной эксплуатации мембраны от концентрационной поляризации и осадкообразования. Кроме того, был исследован такой важный параметр, как чувствительность полимера, из которого изготовлена мембрана, к температурному воздействию при обработке растворов с температурой 20–40°C. Авторами работы [15], предложен усовершенствованный подход к определению кинетических характеристик электрохимического баромембранного разделения растворов, основанный на фрикционной теории Шпиглера с учетом суммарного воздействия химического и электрохи-

мического потенциалов. На примере процесса электрохимического баромембранного разделения водных растворов  $\text{CuSO}_4$ ,  $\text{Ni}(\text{NO}_3)_2$  и  $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$  с концентрациями  $1 \times 10^{-2}$ ,  $2 \times 10^{-3}$  и  $1 \times 10^{-5}$  моль/л соответственно с помощью мембран МГА-95 и МГА-100 получены численные величины фрикционных коэффициентов взаимодействия систем растворитель–мембрана  $f_{\text{ом}}$ , растворенное вещество (катионы)–мембрана  $f_{+m}$ , растворенное вещество (катионы)–растворитель  $f_{+w}$ , а также найдены эмпирические коэффициенты для определения аппроксимирующих кривых.

Проведенный анализ работ [1–15] по применению нанофильтрационного разделения и оценке селективных и проницаемых свойств полупроницаемых мембран физическими методами, позволил оценить влияние гидродинамики течения раствора и диффузии растворенных веществ на качество и производительность нанофильтрационного разделения растворов содержащих ионы тяжелых металлов. Поэтому, целью данной работы стало прогнозирование процесса нанофильтрационной очистки и концентрирования промышленных растворов от ионов металлов на полупроницаемых мембранах ОПМН-П и АМН-П типа на основе теории гидродинамики и конвективной диффузии.

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Большинство математических моделей, направленных на описание массопереноса в процессах баромембранного разделения, основаны на уравнениях гидродинамики движения раствора и конвективной диффузии вещества в мембранном канале [16–18]. При этом следует отметить, что создание математической модели рассматриваемого объекта аналитическим методом проходит в несколько стадий, включая выбор рассчитываемых характеристик, ввод допущений модели и ряд других этапов.

В качестве примера можно привести расчет нанофильтрационных аппаратов и установок. Перед их проектированием необходимо проанализировать сведения по основным характеристикам рассчитываемого модуля. Обычно особое внимание уделяется длине и ширине канала разделения в мембранном модуле, скорость потока растворителя вдоль и поперек (проницание через мембрану) данного канала, коэффициент задерживания, а также степень концентрирования или концентрацию растворенного вещества в ретентате на выходе из мембранного модуля.

Для более полного понимания массопереноса в плоском канале, представим его структурную схему на рис. 1. Канал с двух сторон ограничен

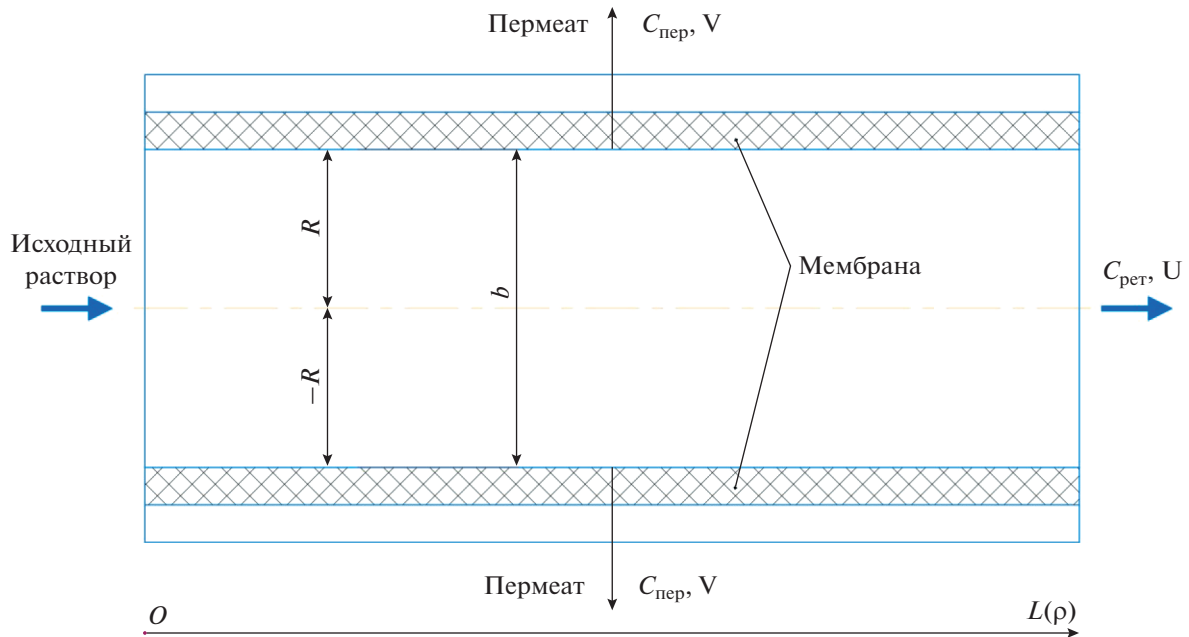


Рис. 1. Схема основных потоков в наночисточном аппарате трубчатого типа.

мембранами и рассматривается вместе с ними как одно звено.

Помимо структурной схемы необходимо ввести ряд допущений, которые облегчат процесс решения системы уравнений:

- в момент начала работы наночисточного аппарата концентрация на входе в межмембранный канал равна концентрации на выходе из него;
- поток жидкости стационарен, а режим течения — ламинарный;
- насос обеспечивает непрерывную подачу разделяемого раствора в межмембранный канал;
- силы трения между ионами и молекулами растворителя малы, что ими можно пренебречь.

Рассмотрим систему выражений, основанную на решении уравнений конвективной диффузии, уравнения Навье–Стокса и уравнения неразрывности потока, которые имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

$$U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Перейдем к полярной системе координат, тогда:

$$U(x, y) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \bar{u}(\varphi, \rho),$$

$$V(x, y) = v(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \bar{v}(\varphi, \rho),$$

$$C(x, y) = c(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \bar{c}(\varphi, \rho).$$

Математическая запись задачи примет вид:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{u} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho} \right) + \\ & + \bar{v} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) = \\ & = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial P}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho} \right) + \\ & + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} \right); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial \tau} + \bar{u} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho} \right) + \\ & + \bar{v} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) = \\ & = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial P}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) + \\ & + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \varphi^2} \right); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \bar{U} \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial \bar{c}}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho} \right) + \\ & + \bar{V} \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial \bar{c}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) = \\ & = \bar{D} \left( \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \rho^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \varphi \partial \rho} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \bar{c}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} - \frac{\partial \bar{c}}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Так как поток не вихревой, закручивания потока нет, то  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} = 0$ ,  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} = 0$ ,  $\frac{\partial \bar{c}}{\partial \varphi} = 0$  и уравнения (5)–(8) примут вид:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \sin \varphi = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \sin \varphi = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} \cos \varphi + v \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \cos \varphi + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \sin \varphi = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} \sin \varphi + v \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \bar{U} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \cos \varphi + \bar{V} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \sin \varphi = \\ & = \bar{D} \left( \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \rho^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Граничные условия для уравнений гидродинамики будут следующими:

$$\bar{U} \left( \frac{\pi}{2}, R \right) = 0, \quad \bar{U} \left( -\frac{\pi}{2}, R \right) = 0. \quad (13)$$

Аналитическим решением получены формулы для скорости фильтрации с учетом модифицированного выражения для уравнения конвективной диффузии и граничных условий, и которые можно рассчитать по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \left( \frac{1}{k_1 \varepsilon} - 1 \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{k_2}{D_0} - k_3 \right) \right] \right)^{-1} \times \\ & \times \bar{C}(\rho, \varphi) \bar{V}(\rho, \varphi) = D \frac{\partial \bar{C}(R, \varphi)}{\partial \rho} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \left( \frac{1}{k_1 \varepsilon} - 1 \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{k_2}{D_0} - k_3 \right) \right] \right)^{-1} \times \\ & \times \bar{C}(\rho, \varphi) \bar{V}(\rho, \varphi) = D \frac{\partial \bar{C}(-R, \varphi)}{\partial \rho} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим решения уравнений гидродинамики:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \sin \varphi = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} \cos \varphi + v \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \cos \varphi + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \sin \varphi = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} \sin \varphi + v \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \sin \varphi = 0. \quad (18)$$

С учетом того, что по введенным ранее допущениям рассматриваемый процесс является стационарным, то  $\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0$  и система уравнений (16)–(18) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} & \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \sin \varphi = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} \cos \varphi + v \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \cos \varphi + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \sin \varphi = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} \sin \varphi + v \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} \sin \varphi = 0. \quad (21)$$

По высоте в сечении канала давление не изменяется, тогда:

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0. \quad (22)$$

Уравнение гидродинамики  $v \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho}$  примет вид:

$$\bar{v} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \rho} \cos \varphi. \quad (23)$$

При граничных условиях:

$$U(x, R) = \bar{U}\left(\frac{\pi}{2}, R\right) = 0, \quad (24)$$

$$U(x, -R) = \bar{U}\left(-\frac{\pi}{2}, R\right) = 0.$$

Решать данное уравнение будем относительно  $P = f(x)$ , т.к. давление изменяется только вдоль канала.

Учитывая, что  $\mu = \nu\rho$ , получим следующие выражения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y + C_1, \quad (26)$$

$$U = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y^2 + C_1 y + C_2, \quad (27)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования.

Найдем  $C_1$  и  $C_2$  из условия (24):

$$U(x, R) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 + C_1 R + C_2, \quad (28)$$

$$U(x, R) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 + C_1 R + C_2 = 0, \quad (29)$$

$$U(x, -R) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 - C_1 R + C_2 = 0, \quad (30)$$

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 + 2C_2 = 0; \quad (31)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2, \quad (32)$$

$$-\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 + C_1 R = 0, \quad C_1 = 0. \quad (33)$$

Интегрируя по  $dy$  и подставляя значения граничных условий  $U(x, R) = 0$ ,  $U(x, -R) = 0$  получим решение данного дифференциального уравнения (27) в виде:

$$U(x, R) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y^2, \quad (34)$$

$$\text{или } U(x, R) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) (R^2 - y^2). \quad (35)$$

Далее определим расход жидкости через канал как:

$$Q = b \int_{-R}^R U(x, R) dy = -b \int_{-R}^R \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) (R^2 - y^2) dy =$$

$$= -\frac{b}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \int_{-R}^R (R^2 - y^2) dy, \quad (36)$$

$$Q = \frac{b}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \left( R^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-R}^{+R} =$$

$$= -\frac{b}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \left[ R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right], \quad (37)$$

$$Q = -\frac{2bR^3}{3\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right). \quad (38)$$

Рассматриваем дифференциальное уравнение для водопроницаемости с учетом осмотического потока, тогда:

$$J = k(\Delta P - \Delta\pi) = k(P_0 - P(x) - \Delta\pi). \quad (39)$$

Тогда дифференциальное уравнение для изменения расхода межмембранном канале с учетом осмотического потока:

$$Q_{x+dx} - Q_x = dQ = bJdx. \quad (40)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -bJ. \quad (41)$$

Приравняем уравнения для расходов (38) и (41) получим:

$$-\frac{2bR^3}{3\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) = -bJ. \quad (42)$$

Граничные условия:

$$\Delta P(0) = P_0, \quad (43)$$

$$\Delta P(L) = P_k. \quad (44)$$

Далее, обозначив  $3\mu/2R^3 = a$  и  $3\mu J/2R^3 = \varpi$ , получим дифференциальное уравнение для перепада давления в виде:

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial x} = \frac{\partial \Delta P}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \Delta P}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial \Delta P}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial \Delta P}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho},$$

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \rho^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial \Delta P}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} -$$

$$- \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \varphi \partial \rho} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} + \frac{\partial \Delta P}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial \Delta P}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \rho^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \varphi \partial \rho} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} +$$

$$+ 2 \frac{\partial \Delta P}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial \Delta P}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2}.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение для гидростатического давления, приведенное в работе [19]  $\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + a\Delta P + \overline{\omega} = 0$ , принимающее вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \rho^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \varphi \partial \rho} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} + \\ & + 2 \frac{\partial \Delta P}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial \Delta P}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} + \\ & + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} - a\Delta P + \overline{\omega} = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \rho^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial \Delta P}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} - a\Delta P + \overline{\omega} = 0, \\ & \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \Delta P}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho \cos^2 \varphi} - \frac{a\Delta P}{\cos^2 \varphi} = \frac{-\overline{\omega}}{\cos^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Решение данного дифференциального уравнения в общем виде будет:

$$\Delta P(\rho) = C_1 e^{\sqrt{a\rho} \cos \varphi} + C_2 e^{-\sqrt{a\rho} \cos \varphi} + \frac{\overline{\omega}}{a}. \quad (46)$$

Найдем постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  в начальный момент  $\Delta P\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = P_0$  и конечный момент  $\Delta P\left(\frac{\pi}{2}, L\right) = P_k$ :

$$P_0 = C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{\overline{\omega}}{a}, \quad (47)$$

$$P_0 = C_1 + C_2 + \frac{\overline{\omega}}{a}, \quad (48)$$

$$C_2 = P_0 - C_1 - \frac{\overline{\omega}}{a}, \quad (49)$$

$$P_k = C_1 e^{\sqrt{aL}} + C_2 e^{-\sqrt{aL}} + \frac{\overline{\omega}}{a}, \quad (50)$$

$$P_k = C_1 e^{\sqrt{aL}} + \left(P_0 - C_1 - \frac{\overline{\omega}}{a}\right) e^{-\sqrt{aL}} + \frac{\overline{\omega}}{a}, \quad (51)$$

$$C_1 = \frac{P_k - P_0 e^{-\sqrt{aL}} - \frac{\overline{\omega}}{a}}{e^{\sqrt{aL}} - e^{-\sqrt{aL}}}, \quad (52)$$

$$C_2 = P_0 - \frac{P_k - P_0 e^{\sqrt{aL}} + \frac{\overline{\omega}}{a} e^{-\sqrt{aL}}}{e^{\sqrt{aL}} - e^{-\sqrt{aL}}} - \frac{\overline{\omega}}{a}. \quad (53)$$

Подставим найденные  $C_1$  и  $C_2$  в (47) и получим выражение для расчета давления по длине канала:

$$\begin{aligned} & P \frac{P_k - P_0 e^{-\sqrt{aL}} - \frac{\overline{\omega}}{a}}{e^{\sqrt{aL}} - e^{-\sqrt{aL}}} e^{\sqrt{a\rho} \cos \varphi} + \\ & + \left( P_0 - \frac{P_k - P_0 e^{\sqrt{aL}} + \frac{\overline{\omega}}{a} e^{-\sqrt{aL}}}{e^{\sqrt{aL}} - e^{-\sqrt{aL}}} - \frac{\overline{\omega}}{a} \right) e^{-\sqrt{a\rho} \cos \varphi} + \frac{\overline{\omega}}{a}. \end{aligned} \quad (54)$$

Аналогично дифференциальное уравнение для электроосмотического давления  $\frac{\partial^2 \Delta \pi}{\partial x^2} + a\Delta \pi + \overline{\omega} = 0$ , приведенное в работе [19] и принимающее вид:

$$\frac{\partial^2 \Delta \pi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \Delta \pi}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho \cos^2 \varphi} - \frac{a\Delta \pi}{\cos^2 \varphi} = \frac{-\overline{\omega}}{\cos^2 \varphi}. \quad (55)$$

Решение данного дифференциального уравнения в общем виде будет:

$$\Delta \pi(\rho) = C_1 e^{\sqrt{a\rho} \cos \varphi} + C_2 e^{-\sqrt{a\rho} \cos \varphi} + \frac{\overline{\omega}}{a}. \quad (56)$$

Подставим найденные  $C_1$  и  $C_2$  из начального момента  $\Delta \pi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \pi_0$  и конечный момент  $\Delta \pi\left(\frac{\pi}{2}, L\right) = \pi_k$  условия в (56) и получим выражение для расчета электроосмотического давления по длине канала:

$$\begin{aligned} & \Delta \pi(\varphi, \rho) = \frac{\pi_k - \pi_0 e^{-\sqrt{aL}} - \frac{\overline{\omega}}{a}}{e^{\sqrt{aL}} - e^{-\sqrt{aL}}} e^{\sqrt{a\rho} \cos \varphi} + \\ & + \left( \pi_0 - \frac{\pi_k - \pi_0 e^{\sqrt{aL}} + \frac{\overline{\omega}}{a} e^{-\sqrt{aL}}}{e^{\sqrt{aL}} - e^{-\sqrt{aL}}} - \frac{\overline{\omega}}{a} \right) e^{-\sqrt{a\rho} \cos \varphi} + \frac{\overline{\omega}}{a}. \end{aligned} \quad (57)$$

После определения значений давления в межмембранном канале подставляем их в формулы для проницаемости мембран и определяем значение продольной составляющей скорости потока.

Подставим найденные значения  $P = f(x)$  (54) в уравнения для определения поперечного потока (39) и продольной скоростей (35), обозначив  $f_1(x) = k(\Delta P - \Delta \pi)$  и  $f_2(x, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (R^2 - y^2) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi (R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi)$ , перейдя в полярную систему координат, получим следующее уравнение, решением которой является распределение поля концентрации вещества в межмембранном канале:

$$\begin{aligned}
 f_2(x, y) \frac{\partial C}{\partial x} + f_1(x) \frac{\partial C}{\partial y} &= D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \\
 \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi (R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi) \times \\
 \times \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial \bar{c}}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho} \right) &+ k(\Delta P - \Delta \pi) \times \\
 \times \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial \bar{c}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) &= \quad (58) \\
 = \bar{D} \left( \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \rho^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \varphi \partial \rho} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho} - \right. \\
 - \frac{\partial \bar{c}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} + \\
 \left. + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} - \frac{\partial \bar{c}}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \right).
 \end{aligned}$$

Так как поток не вихревой, то  $\frac{\partial \bar{c}}{\partial \varphi} = 0$  и уравнение (58) примет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi (R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi) \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \cos \varphi + \\
 + k(\Delta P - \Delta \pi) \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \sin \varphi = \quad (59) \\
 = \bar{D} \left( \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \rho^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \right).
 \end{aligned}$$

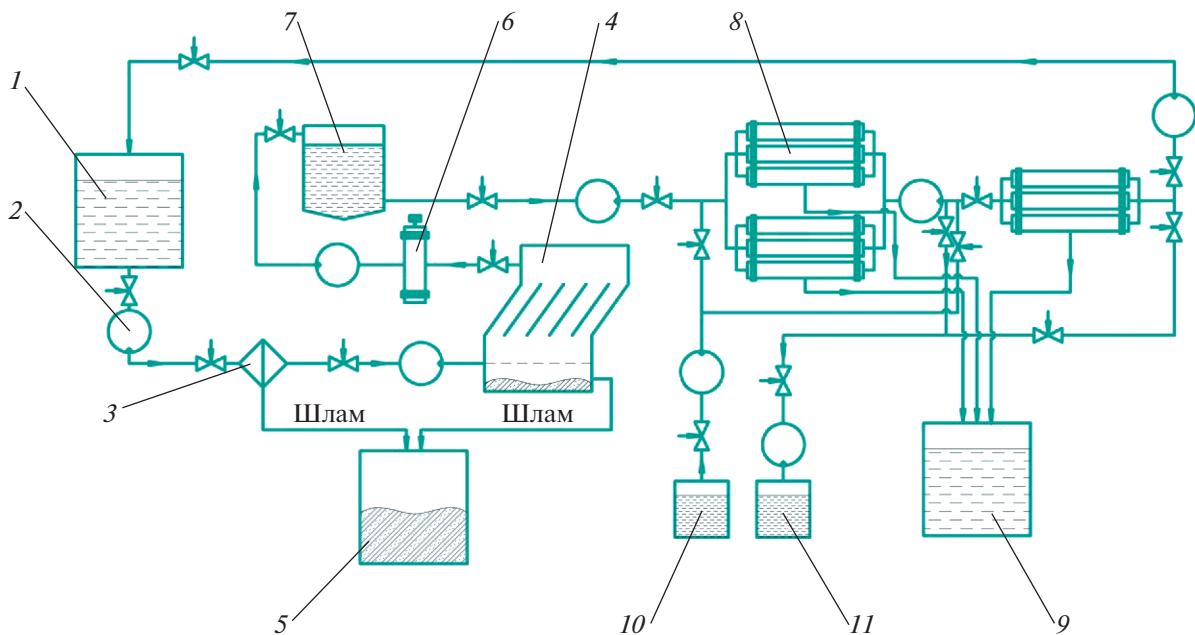
Учитывая начальные условия, имеющие вид  $C(0, y) = \bar{C}\left(\frac{\pi}{2}, \rho\right) = C_{исх}$ , концентрацию в межмембранном канале можно вычислить по формуле:

$$\bar{C}(\varphi, \rho) = C_{исх} \exp \left( \bar{V}(\varphi, \rho) \rho / D \sin \varphi \left( 1 + \left( \frac{1}{k_1 \varepsilon} - 1 \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{k_2}{D_0} - k_3 \right) \right] \right) \right). \quad (60)$$

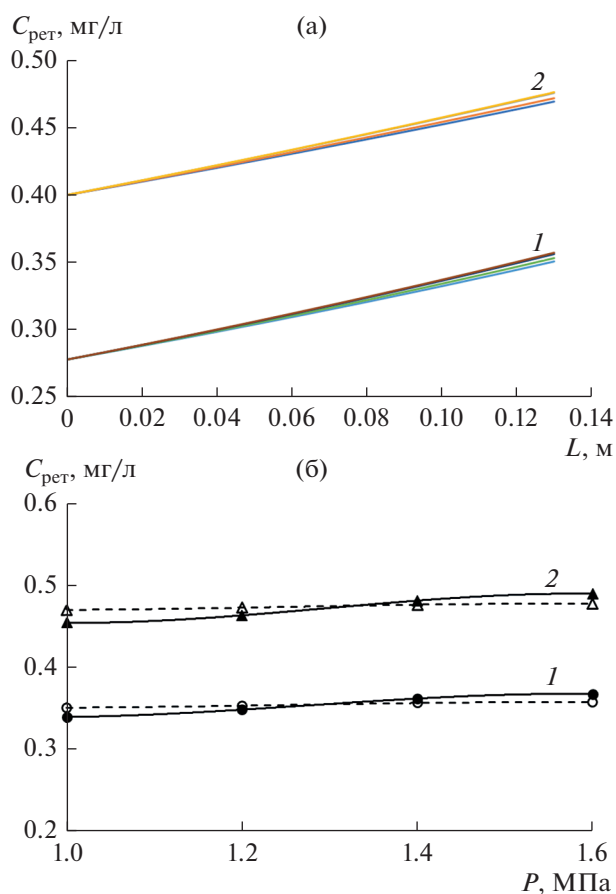
### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Один из этапов данного исследования был направлен на получение экспериментальных данных по очистке технологических растворов от катионов  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Zn}^{2+}$  на нанофильтрационной уста-

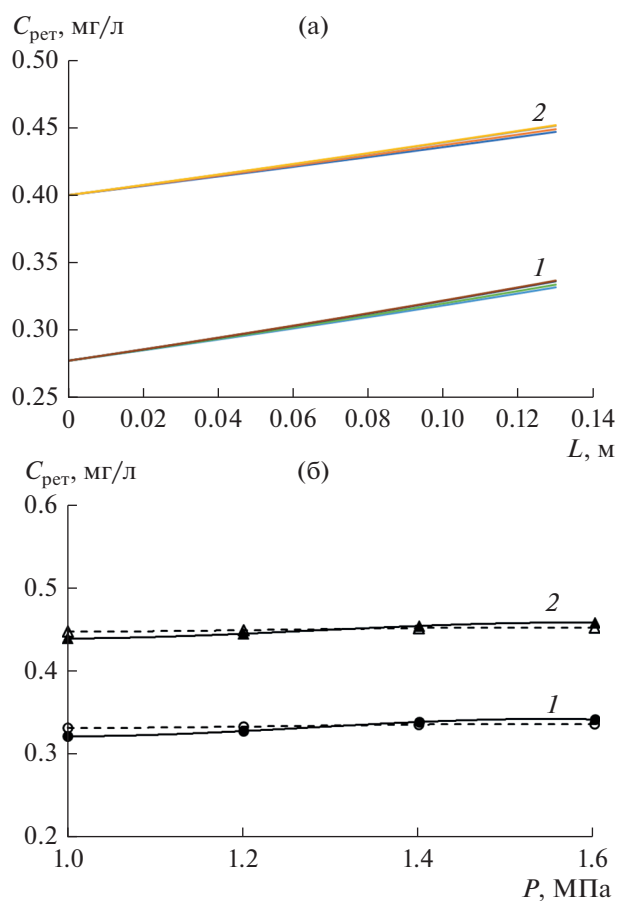
новке с применением мембран ОПМН-П и АМН-П. Исходная концентрация  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Zn}^{2+}$  в исследуемых технологических растворах составляла 0.278 и 0.4 мг/л соответственно. Рабочее давление нанофильтрационной установки варьиро-



**Рис. 2.** Технологическая схема очистки сточных вод методом нанофильтрации: 1 – исходная емкость со сточными водами; 2 – насос; 3 – фильтр грубой очистки; 4 – тонкослойный отстойник; 5 – шламосборник; 6 – установка коррективировки рН; 7 – накопитель осветленных вод; 8 – нанофильтрационный аппарат; 9 – емкость сбора фильтрата; 10 – емкость с чистящими реагентами; 11 – емкость сбора отработанных чистящих реагентов.



**Рис. 3.** Изменение концентрации ионов  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Zn}^{2+}$  в ретентате в зависимости от длины канала камеры разделения (а), величины трансмембранного давления  $P$  (б) при разделении мембраной ОПМН-П (на рис. 3б сплошная линия – эксперимент, пунктирная линия – расчет).



**Рис. 4.** Изменение концентрации ионов  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Zn}^{2+}$  в ретентате в зависимости от длины канала камеры разделения (а), величины трансмембранного давления  $P$  (б) при разделении мембраной АМН-П (на рис. 4б сплошная линия – эксперимент, пунктирная линия – расчет).

валось от 1 до 1.6 МПа. Время проведения каждого эксперимента – 5 ч. Габаритные размеры камеры разделения –  $0.13 \times 0.06 \times 0.06$  м.

На рис. 2 приведена технологическая схема очистки сточных вод гальванического производства с последующим сбросом очищенной воды в систему канализации, либо повторной подачей на установку нанофильтрационного вида при создании оборотного водоснабжения предприятия [20]. Данная система промышленной очистки воды рекомендуется для использования при проектировании новых очистных сооружений, либо реконструкции действующих систем очистки сточных вод для повышения их экологической безопасности и экономической эффективности.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Полученные экспериментальные данные по удельному потоку растворителя, коэффициенту задержания мембраны и другим кинетическим

характеристикам процесса разделения при нанофильтрационной очистке технологических растворов, содержащих катионы  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Zn}^{2+}$ , были использованы для теоретического расчета концентрации каждого вида катионов в ретентате в зависимости от длины канала камеры разделения и величины трансмембранного давления  $\Delta P$  при разделении мембранами ОПМН-П и АМН-П.

На рис. 3а представлены результаты расчета концентрации катионов  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Zn}^{2+}$  в ретентате в зависимости от длины канала в процессе нанофильтрации при использовании мембраны ОПМН-П. По полученным данным можно сделать вывод, что увеличение концентрации растворенного вещества в ретентате по мере движения по межмембранному каналу разделения происходит линейно для всех исследуемых значений трансмембранного давления  $\Delta P$  (от 1 до 1.6 МПа) и свойственно обоим видам катионов. Рассчитанное значение концентрации катионов  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Zn}^{2+}$



на выходе из канала разделения хорошо коррелируется с экспериментально полученными данными по концентрации катионов  $\text{Cr}^{3+}$  в ретентате после пятичасового процесса нанофильтрационного разделения [21]. Расхождение теоретически рассчитанных и экспериментальных данных не превышает 5%, что подтверждается представленным на рис. 3б графиком.

Данные по нанофильтрационной очистке технологического раствора от катионов  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Zn}^{2+}$  с применением мембраны АПМ-П (рис. 4а) аналогичны тем, что были получены с мембраной ОПМН-П. В данном случае так же зафиксировано увеличение концентрации растворенных веществ в ретентате. Однако значения концентрации катионов  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Zn}^{2+}$  в ретентате на выходе из канала разделения ниже, чем при использовании мембраны ОПМН-П. Это согласуется с экспериментальными данными [21]. Сравнение экспериментальных и расчетных данных, представленных на рис. 4б, позволяет сделать вывод, что они хорошо коррелируют между собой – расхождение так же не превышает 5%.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В работе математически описан процесс прогнозирования нанофильтрационного разделения растворов, содержащих катионы  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Zn}^{2+}$ , с применением мембран ОПМН-П и АПМ-П на основе решения уравнений конвективной диффузии, уравнения Навье–Стокса и уравнения неразрывности потока с применением полярной системы координат.

2. Выполнены экспериментальные исследования по нанофильтрационному разделению растворов, содержащих катионы  $\text{Cr}^{3+}$  и  $\text{Zn}^{2+}$ . По модели произведен расчет изменения концентрации в ретентате. Выполнена проверка адекватности предлагаемого метода путем сравнения экспериментальных и расчетных данных. Максимальное расхождение между расчетными и экспериментальными значениями не превышает 5%.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук № МК-4774.2022.4.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A$	эмпирический коэффициент, К
$b$	ширина канала, м
$C$	концентрация целевого вещества, $\text{кг}/\text{м}^3$

$C_1, C_2$	постоянные интегрирования
$D$	коэффициент диффузии в растворе, $\text{м}^2/\text{с}$
$D_0$	коэффициент диффузии в мембране, $\text{м}^2/\text{с}$
$J$	поток фильтрата через мембрану, $\text{м}^3/\text{с}$
$k, k_1, k_2, k_3$	эмпирические коэффициенты
$L$	длина канала, м
$\Delta P$	трансмембранное давление, Па
$R$	полувысота канала разделения, м
$t$	время, с
$U$	величина скорости потока растворителя вдоль межмембранного канала, м/с
$V$	величина скорости проникновения потока растворителя через мембрану, м/с
$\Delta V_p$	удельный поток растворителя за счет перепада давления до и после мембраны, $\text{м}^3/(\text{м}^2 \text{с})$
$\epsilon$	диэлектрическая постоянная, Ф/м
$\nu$	кинематическая вязкость раствора, $\text{м}^2/\text{с}$
$\Delta \pi$	осмотическое давление, Па;
$\rho$	радиус в полярной системе координат, м
$\phi$	угол в полярной системе координат, рад

## ИНДЕКС

0	начальное значение
к	конечное значение
исх	в исходном растворе
пер	в пермеате
рет	в ретентате
м	в мембране

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецова Е.Ю., Акулова А., Мотовилов А.В. Проблемы и решения переработки и утилизации сточных вод гальванических производств // Евразийский Союз Ученых. 2016. № 3–4(24). С. 109.
2. Мосталыгина Л.В., Костин А.В., Шерстобитов Г.С., Прокопьева Е.А., Мосталыгин А.Г., Бирюков М.Ф. Изучение качественного состава гальванического отхода от очистки гальванической ванны и возможностей его обезвреживания // Вестник КГУ. 2014. № 2(33). С. 88.
3. Белгородская М.Ю., Игнаткина Д.О., Юрьев Ю.Ю., Тимофеев А.Г., Нестерчук А.В. Повышение качества очистки сточных вод машиностроительных предприятий, использующих хромовый ангидрид // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. 2021. № 4(38). С. 33.
4. Первов А.Г., Спицов Д.В. Разделение высокоминерализованных стоков установок ионного обмена с применением нанофильтрационных мембран // Системные технологии. 2021. № 2(39). С. 34.

5. *Filippov A.N., Iksanov R.H., Kononenko N.A., Berezina N.P., Falina I.V.* Theoretical and experimental study of asymmetry of diffusion permeability of composite membranes // *Colloid. J.* 2010. 72(2). P. 243.
6. *Кисель А.В.* Опреснение морской воды черного, азовского и каспийского морей методами мембранных технологий // *Вестник науки.* 2019. № 2(11). С. 79.
7. *Бурдо О.Г., Терзиев С.Г., Мордынский В.П., Сиротюк И.В., Фатеева Я.А., Молчанов М.Ю.* Разработка низкотемпературной установки блочного типа для деминерализации морской воды // *Проблемы региональной энергетики.* 2022. № 2(54). С. 13.
8. *Винницкий В.А., Чугунов А.С., Ершов М.В.* Влияние расхода ретентата на мембранное разделение бинарных растворов хлоридов натрия, магния и кальция // *Изв. вузов. Химия и хим. технология.* 2021. № 10. С. 46.
9. *Антипова Л.В., Титов С.А., Жданов В.Н., Карпак А.Н.* Использование измерений внутреннего трения для исследования ультра- и нанофильтрации модифицированной творожной сыворотки // *Вестник ВГУИТ.* 2018. № 4(78). С. 298.
10. *Sloan J.M.* Following multicomponent diffusion in polymers by FT-IR-ATR. The Pittsburgh Conference on Analytical Chemistry and Applied Spectroscopy "Science for 21st Century", March 12–17, 2000. New Orleans, LA, 2000. P. 1784.
11. *Ridgway H.F., Orbell G., Gray S.* Molecular simulations of polyamide membrane materials used in desalination and water reuse applications: Recent developments and future prospects // *J. Membrane Science.* 2017. V. 524. P. 436.
12. *Cha M., Boo C., Park C.* Simultaneous retention of organic and inorganic contaminants by a ceramic nanofiltration membrane for the treatment of semiconductor wastewater // *Process Safety and Environmental Protection.* 2022. V. 159. P. 525.
13. *Лазарев С.И., Ковалев С.В., Коновалов Д.Н., Луа П.* Электрохимические и транспортные характеристики мембранных систем при электронанофильтрационном разделении растворов, содержащих нитрат аммония и сульфат калия // *Электрохимия.* 2021. Т. 57. № 6. С. 355. [*Lazarev S.I., Kovalev S.V., Konovalov D.N., Lua P.* Electrochemical and transport characteristics of membrane systems in the electronanofiltration separation of solutions containing ammonium nitrate and potassium sulfate // *Russian Journal of Electrochemistry.* 2021. V. 57. № 6. P. 607.]
14. *Goosen M.F.A., Sablani S.S., Al-Maskari S.S., Al-Belushi R.H., Wilf M.* Effect of feed temperature on permeate flux and mass transfer coefficient in spiral-wound reverse osmosis systems // *Desalination.* 2002. V. 144. № 1–3. P. 367.
15. *Шестаков К.В., Лазарев С.И., Хохлов П.А., Полянский К.К.* Прогнозирование процесса электрохимического баромембранного разделения промышленных растворов на основе фрикционной теории // *Теор. Основы Хим. Техн.* 2021. Т. 55. № 6. С. 754 [*Shestakov K.V., Lazarev S.I., Khokhlov P.A., Polyanskii K.K.* Predicting the electrochemical pressure-driven membrane separation of industrial solutions using friction theory // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering.* 2021. V. 55. № 6. P. 1221.]
16. *Байков В.И., Зновец П.К.* Ультрафильтрация в плоском канале с одной проницаемой поверхностью // *ИФЖ.* 1999. Т. 72. № 1. С. 32. [*Baikov V.I., Znovets P.K.* Ultrafiltration in a Plane Channel with One Permeable Surface // *Journal of engineering physics and thermophysics.* 1999. V. 72. № 1. P. 32.]
17. *Муравьев Л.Л.* Моделирование работы обратноосмотических установок с рулонными фильтрующими элементами // *Химия и технология воды.* 1989. Т. 11. № 1. С. 107.
18. *Абоносимов О.А., Лазарев С.И., Ковалев С.В., Рябинский М.А.* К вопросу математического моделирования массопереноса в баромембранных аппаратах рулонного типа // *Изв. вузов. Химия и хим. технология.* 2007. Т. 50. № 8. С. 64.
19. *Родионов Д.А., Лазарев С.И., Протасов Д.Н., Абоносимов О.А., Полянский К.К.* Математическая модель процесса ультрафильтрационного концентрирования вторичного молочного сырья в трубчатом мембранных аппаратах с фильтрующими элементами типа БТУ 05/2. // *Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий.* 2021. Т. 83. № 1(87). С. 36–43.
20. *Кругликов С.С., Архипов Е.А., Жирухин Д.А., Смирнов К.Н., Ваграмян Т.А., Колесников В.А., Филатова Е.А.* Повышение эффективности электро-мембранных процессов на участке электрохимического кадмирования // *Теор. основы хим. техн.* 2021. Т. 55. № 3. С. 286 [*Kruglikov S.S., Arkhipov E.A., Zhirukhin D.A., Smirnov K.N., Vagramyan T.A., Kolesnikov V.A., Filatova E.A.* Increasing the efficiency of electromembrane processes in the area of electrochemical cadmium plating // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering.* 2021. V. 55. № 3. P. 359].
21. *Лазарев С.И., Ковалева О.А., Попов Р.В., Ковалев С.В., Игнатов Н.Н.* Электро-мембранная очистка сточных вод химических производств от ионов  $\text{Cr}^{6+}$ ,  $\text{Zn}^{2+}$ ,  $\text{SO}_4^{2-}$ ,  $\text{Cl}^-$  // *Изв. вузов. Химия и хим. технология.* 2018. Т. 61. Вып. 4–5. С. 119–125.