

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

УДК 551.511.6;532.526.4;533.723

АНСАМБЛЬ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ И СТОХАСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ “МЕДЛЕННЫХ” КОНВЕКТИВНЫХ ТЕРМИКОВ НА УРОВНЕ КОНВЕКЦИИ¹

© 2022 г. А. Н. Вульфсон^{a, b, *}, О. О. Бородин^{a, **}, Д. О. Дёмин^{b, ***}

^aИнститут водных проблем РАН, Москва, 119333 Россия

^bНациональный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,
Москва, 101000 Россия

*e-mail: vulfson@iwp.ru

**e-mail: borodin@iwp.ru

***e-mail: ddemin@hse.ru

Поступила в редакцию 29.07.2021 г.

После доработки 08.09.2021 г.

Принята к публикации 09.09.2021 г.

Рассмотрена система “медленных” конвективных термиков в окрестности уровня конвекции. Показано, что для описания движения системы сферических конвективных термиков фиксированного радиуса можно использовать стохастическое уравнение, практически идентичное уравнению Ланжевена ансамбля классических броуновских частиц. В рамках предложенного подхода показано, что средняя вертикальная скорость системы термиков на уровне конвекции равна нулю. Установлено, что для системы термиков существует кинетический аналог термодинамической температуры, соответствующий второму моменту вертикальной скорости. Более того, ассоциированное уравнение Фоккера–Планка для системы “медленных” конвективных термиков имеет стационарное решение, соответствующее обобщенному распределению Максвелла по вертикальному скоростям. Численные и натурные эксперименты убедительно демонстрируют соответствие обобщенного распределения Максвелла результатам вычислений и данным атмосферных измерений.

Ключевые слова: стохастический ансамбль конвективных термиков, уравнение Ланжевена, уравнение Фоккера–Планка, распределение Максвелла по скоростям в ансамбле конвективных термиков.

DOI: 10.31857/S0321059622020146

ВВЕДЕНИЕ

Классическая физическая кинетика изучает “термодинамические” стохастические ансамбли частиц, расположенных в термостате. Ансамбль броуновских частиц – наиболее известный стохастический ансамбль физической кинетики. Подробное описание ансамбля медленных броуновских частиц приведено, например, в монографиях [5, 27].

В гидродинамике хорошо известны также не “термодинамические” стохастические системы. Возможность распространения методов физической кинетики на турбулентные гидродинамические течения однородной жидкости обсуждается в монографии [20]. Попытка построения стохастических уравнений Ланжевена для элементарных вихрей турбулентного конвективного погра-

ничного слоя рассмотрена, например, в работах [10, 18].

Специальный подход к построению уравнений Ланжевена для задач турбулентной конвекции над горизонтальной нагретой поверхностью рассмотрен в работах [2–4, 28, 29]. Известно, что в условиях турбулентной конвекции над нагретой поверхностью возникает система изолированных плавучих вихрей (термиков), всплывающих в практически неподвижном окружении. Конвективные термики зарождаются в сравнительно тонком поверхностном слое вблизи нагретой поверхности. Существенно, что процесс возникновения термиков связан с неустойчивостью поверхностного слоя и является случайным, поэтому система термиков является стохастическим ансамблем.

В работах [2–4, 28, 29] рассмотрены различные модели систем конвективных термиков, построенные по аналогии с ансамблем броуновских частиц в термостате. Использование такой анало-

¹ Работа выполнена в рамках исследовательского проекта 0147-2019-0001 (государственная регистрация АААА-А18-118022090056-0).

гии позволяет найти для системы конвективных термикобобщенные распределения Максвелла и Больцмана, существование которых подтверждено данными измерений.

Уровнем конвекции в геофизической гидродинамике называют уровень, на котором средняя архимедова сила в термиках равна нулю. В настоящей работе предложена кинетическая модель системы медленных сферических конвективных термикоб фиксированного радиуса, использующая аналогию с классическим ансамблем броуновских частиц. Показано, что для описания системы термикоб в тонком слое, включающем в себя уровень конвекции, можно использовать кинетические уравнения, практически идентичные уравнениям классического броуновского движения. В рамках предложенного подхода установлено, что средняя скорость системы термикоб на уровне конвекции равна нулю. Предложенная аналогия обеспечивает строгое математическое обоснование модели системы термикоб в тонком слое, включающем уровень конвекции. Более того, аналогия с броуновскими частицами позволяет строго определить “кинетическую” температуру системы термикоб, а также установить существование распределения Максвелла по вертикальным скоростям. Приведено также сопоставление полученных результатов как с натурными, так и с численными экспериментами.

Настоящее исследование – продолжение и обоснование положений, изложенных в работах [2–4, 28, 29].

ВТОРОЙ МОМЕНТ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО КОНВЕКТИВНОГО СЛОЯ

Пусть t – время; x, y, z – декартова система координат, в которой оси x, y лежат на плоской нагретой подстилающей поверхности, а направление вертикальной оси z противоположно направлению ускорения силы тяжести g ; w – компонента вектора скорости вдоль оси z .

Рассмотрим неподвижный слой атмосферы, расположенный в поле силы тяжести и ограниченный снизу плоской горизонтальной подстилающей поверхностью $z = 0$. Допустим, что в начальный момент времени $t = 0$ на нижнюю границу неподвижной среды начинает поступать положительный поток тепла. В случае интенсивного прогрева среды над горизонтальной границей области формируется турбулентный конвективный слой высотой h .

Допустим, что $w = w(x, y, z, t)$, $\Theta = \Theta(x, y, z, t)$ – локальные значения вертикальной скорости и потенциальной температуры в турбулентном конвективном слое; $\Theta_0 = \text{const}$ – средняя фоновая потенциальная температура неподвиж-

ного статического слоя перемешивания; $\theta = (\Theta - \Theta_0)/\Theta_0 = \theta(x, y, z, t)$ – безразмерная пульсация потенциальной температуры [1, 19]. Величину $g\theta(x, y, z, t)$ будем называть локальной “адиабатической” плавучестью [26].

Усредняя по площади различные произведения плавучести $g\theta$ и вертикальной скорости w на произвольном уровне z , получим общий турбулентный момент Рейнольдса $(g\theta)^m w^n$. Здесь и далее знак черты “–” обозначает операцию усреднения по площади; $m \geq 0, n \geq 0$ – целые числа.

В частности, при $m = 1, n = 1$ получим выражение для потока плавучести $gS_\theta = \overline{g\theta w}$. Величину потока плавучести на подстилающей поверхности $z = 0$ будем обозначать символом $gS_\theta = \overline{g\theta w}|_{z=0}$, где $[gS_\theta] = m^2/c^3$ – размерность потока плавучести.

Существование параметров gS_θ и h позволяет определить параметры Дирдорффа w_D и $g\theta_D$ в следующей форме [8]:

$$w_D = h^{1/3} (gS_\theta)^{1/3}, \quad g\theta_D = h^{-1/3} (gS_\theta)^{2/3}, \quad (1)$$

$$g\theta_D w_D = gS_\theta.$$

С учетом параметров Дирдорффа (1) получим безразмерные выражения для потока плавучести и второго момента вертикальной скорости

$$\frac{\overline{g\theta w}}{g\theta_D w_D} = F_{\theta w}(z/h), \quad \frac{\overline{w^2}}{w_D^2} = F_{ww}(z/h), \quad (2)$$

где $F_{\theta w}(z/h), F_{ww}(z/h)$ – положительные безразмерные функции.

При описании кинетических свойств ансамбля конвективных термикоб особую роль играет второй момент вертикальной скорости $\overline{w^2}$.

Безразмерные вертикальные профили $\overline{w^2}/w_D^2$ получены:

- а) в лабораторных экспериментах [9, 12, 30];
- б) в численных экспериментах [22, 24];
- в) в экспериментах в ветровом канале [11];
- г) в натуральных атмосферных экспериментах Minnesota 1973 и AMTEX-1975 [7, 15].

Результаты измерений безразмерного второго момента вертикальной скорости, полученные в лабораторных экспериментах [9, 12, 30], а также в численных экспериментах [22], представлены на рис. 1а.

Значения безразмерного второго момента вертикальной скорости, полученные при измерениях в ветровом канале и в численных экспериментах [11], а также в натуральных экспериментах [7, 15], представлены на рис. 1б.

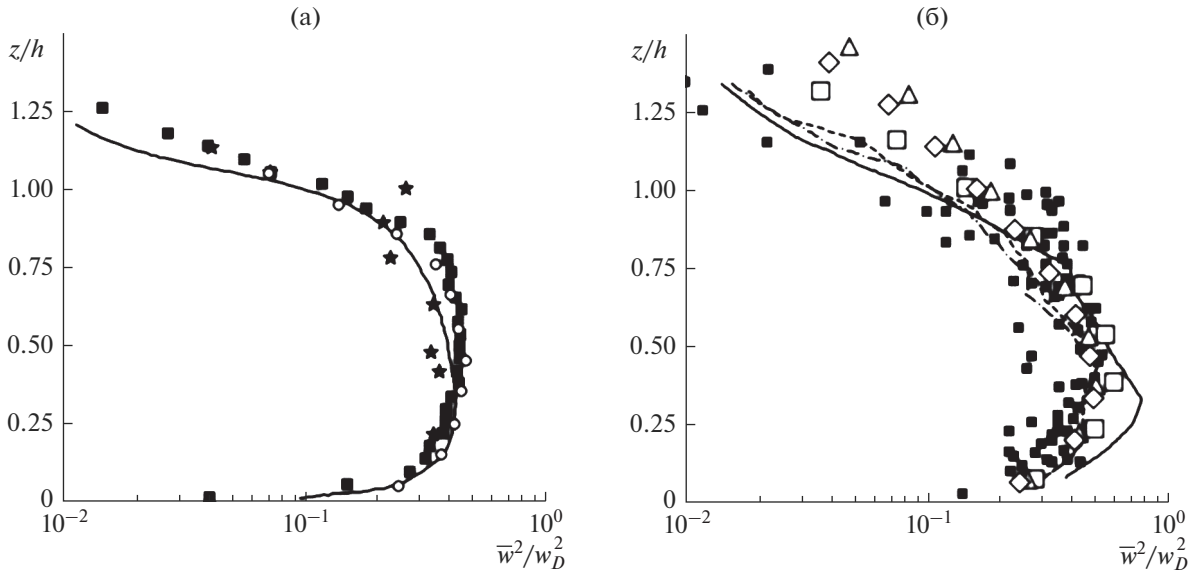


Рис. 1. а – лабораторные измерения безразмерного второго момента вертикальной скорости $\overline{w^2}/w_D^2$ и результаты численного моделирования. Измерения [12] представлены черными квадратами. Измерения [30] и [9] изображены кружками и звездочками соответственно. Сплошная линия соответствует результатам численного моделирования [22]. б – атмосферные измерения безразмерного второго момента вертикальной скорости $\overline{w^2}/w_D^2$, измерения в ветровом канале и результаты численного моделирования. Сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии соответствуют измерениям в ветровом канале в сечениях $x = 3.98$ м, $x = 5.63$ м и $x = 7.28$ м. Светлые геометрические фигуры соответствуют результатам численного моделирования [11] в соответствующих сечениях канала. Натурные эксперименты [7] и [15] изображены черными квадратами.

Результаты экспериментов, представленные на рис. 1а, 1б, показывают, что умеренный ветер практически не оказывает влияния на вертикальный профиль второго момента вертикальной скорости $\overline{w^2}/w_D^2$. В частности, согласно измерениям,

$$\overline{w^2} = 0.45w_D^2 \quad \text{при} \quad z/h = 1/2. \quad (3)$$

Соотношение (3) впервые установлено в [7].

КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕРМИКИ И ТОНКАЯ СТРУКТУРА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Конвективными термиками называют изолированные плавучие вихри, движение которых происходит в практически неподвижном окружении. Атмосферные термики зарождаются в сравнительно тонком поверхностном слое вблизи нагретой поверхности, а затем поднимаются вверх под действием архимедовой силы [23]. Существенно, что процесс возникновения термиков связан с неустойчивостью поверхностного слоя и является случайным. Взаимодействие конвективных вихрей друг с другом и своим окружением также является случайным процессом, поэтому система термиков является стохастическим ансамблем.

Наглядно получить представления о системе восходящих термиков можно на основе лабораторного моделирования, выполненного при высоких числах Рэлея [13, 25]. Возникновение атмосферных термиков при нагревании подстилающей поверхности наблюдается в многочисленных натуральных экспериментах [15]. Системы термиков возникают также и в пограничном слое океана при резком охлаждении его поверхности. Однако при этом хаотическое движение термиков имеет нисходящий характер [3, 4]. Результаты экспериментов [13], представленные на рис. 2, отчетливо демонстрируют хаотический характер нисходящего движения термиков.

Изолнии нулевой плавучести $g\theta = 0$ достаточно четко отделяют более теплый, восходящий термик от окружающей среды. Это обстоятельство позволяет рассматривать систему термиков как ансамбль частиц. Определим k -й конвективный термик как плавучий объем $V_{\theta k}$, ограниченный поверхностью $\Sigma_{\theta k}$ с нулевой плавучестью $g\theta = 0$. Тогда среднюю скорость \hat{w}_k и плавучесть $g\hat{\theta}_k$ для k -го термика можно представить в следующей форме:

$$\hat{w}_k = \frac{1}{V_{\theta k}} \int w dv, \quad g\hat{\theta}_k = \frac{1}{V_{\theta k}} \int g\theta_k dv. \quad (4)$$



Рис. 2. Ансамбль термиков в форме тяжелых солевых пальцев, опускающихся в водяном слое, согласно [13]. Нисходящее движение термиков визуализируется добавлением в соль флуоресцеина и освещением через щель.

Будем далее обозначать угловыми скобками $\langle \rangle$ усреднение по всем термикам ансамбля. С учетом соотношений (4) и принятого обозначения построим средние по ансамблю от вертикальной скорости $\langle \hat{w} \rangle$ и плавучести и $\langle g\hat{\theta} \rangle$. Для ансамбля атмосферных термиков средние $\langle \hat{w} \rangle$ и $\langle g\hat{\theta} \rangle$ определены в натурном эксперименте [15]. Измерения безразмерной средней плавучести ансамбля термиков $\langle g\hat{\theta} \rangle / g\theta_D$, полученные в [15], представлены на рис. 3.

Уровнем конвекции в геофизической гидродинамике называют уровень, на котором средняя плавучесть системы термиков равна нулю: $\langle g\hat{\theta} \rangle = 0$. Согласно экспериментальным результатам [15], представленным на рис. 3, уровень конвекции системы атмосферных конвективных термиков находится на уровне $z/h \approx 1/2$.

ДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕРМИКА В ОКРЕСТНОСТИ УРОВНЯ КОНВЕКЦИИ

Характерные размеры атмосферных термиков изменяются от нескольких десятых долей до сотни метров. Пусть R – средний радиус ансамбля термиков. Согласно измерениям [15], для величины среднего радиуса системы термиков справедлива аппроксимация $R/h = 0.08(z/h)^{1/3}$ (рис. 4).

Для описания движения системы термиков в тонком слое, включающем в себя уровень кон-

векции, используем простейшую модель, в рамках которой все термики представляют собой идентичные жесткие сферы фиксированного радиуса R . Средний радиус системы термиков R в окрестности уровня конвекции $z/h \approx 1/2$ можно определить, опираясь на данные измерений, представленные на рис. 4. При высоте атмосферного конвективного слоя $h \approx 1000$ м средний радиус атмосферных термиков $R \approx 60$ м. Кроме того, будем предполагать, что в окрестности уровня конвекции воздух сильно завихренный и обладает коэффициентом турбулентности $\nu \approx 10$ м²/с. Характерные значения скорости и положительные пульсации температуры атмосферных термиков имеют порядок 0.2 м/с и 0.3°C соответственно. Очевидно, что в окрестности уровня конвекции плавучесть термиков $g\hat{\theta}_k$ становится малой. Поэтому при построении гидродинамической модели будем считать, что движение термиков происходит достаточно медленно. В этих условиях при $\hat{w}_k \approx 0.2$ м/с, $R \approx 60$ м и $\nu \approx 10$ м²/с соответствующая оценка числа Рейнольдса примет вид: $Re = \hat{w}_k R / \nu \approx 0.12$.

В случае $Re \ll 1$ в уравнении движения термика можно использовать приближение Стокса, линейно зависящее от скорости. Тогда

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{w}_k(t) = g\hat{\theta}_k - \gamma_0 \hat{w}_k(t) \\ \hat{w}_k(0) = \hat{w}_k^0, \end{cases} \quad (5)$$

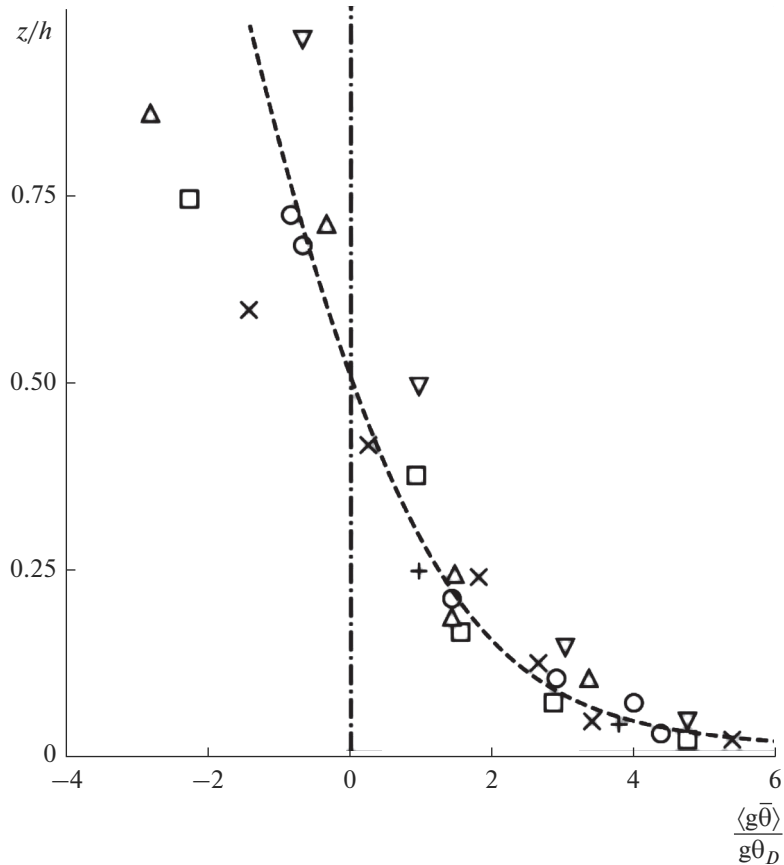


Рис. 3. Зависимость безразмерной средней плавучести ансамбля термиком $\langle g\hat{\theta} \rangle / g\theta_D$ от высоты z/h согласно [16]. Пунктирная кривая соответствует аппроксимации экспериментальных данных.

$\gamma_0 = (9/2)\nu R^{-2}$ – коэффициент подвижности, его размерность $[\gamma_0] = c^{-1}$.

Первое слагаемое в правой части динамического уравнения движения (5) соответствует силе плавучести Архимеда; второе слагаемое соответствует силе трения Стокса. Второе уравнение в системе (5) представляет начальное условие \hat{w}_k^0 . Модель сферического термика фиксированного радиуса R рассматривалась в работах [2, 15].

Пусть $\langle g\hat{\theta}_k \rangle$ – усредненная по ансамблю средняя плавучесть термиком; $g\hat{\theta}'_k = g\hat{\theta}_k - \langle g\hat{\theta}_k \rangle$ – флуктуация плавучести. С учетом принятого обозначения представим уравнение (5) в форме

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{w}_k(t) = -\gamma_0 \hat{w}_k(t) + g\hat{\theta}'_k + \langle g\hat{\theta}_k \rangle \\ \hat{w}_k(0) = \hat{w}_k^0. \end{cases} \quad (6)$$

Согласно [16], на уровне конвекции $z/h \approx 1/2$, средняя плавучесть термиком равна нулю, т. е. $\langle g\hat{\theta}_k \rangle = 0$. Поэтому в окрестности уровня конвек-

ции динамическое уравнение (6) можно упростить:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{w}_k(t) = -\gamma_0 \hat{w}_k(t) + g\hat{\theta}'_k \\ \hat{w}_k(0) = \hat{w}_k^0. \end{cases} \quad (7)$$

Будем рассматривать далее флуктуацию плавучести $g\hat{\theta}'_k$ в уравнении (7) как случайную силу. Опустив индекс k и символ крышки в уравнении движения (7), получим стохастическое уравнение движения системы термиком

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} w(t) = -\gamma_0 w(t) + g\theta' \\ w(0) = w^0. \end{cases} \quad (8)$$

Существенно, что статистическое среднее случайной силы $\langle g\theta' \rangle$ равно нулю, так как

$$\langle g\theta' \rangle = \langle g\theta - \langle g\theta \rangle \rangle = \langle g\theta \rangle - \langle \langle g\theta \rangle \rangle = 0. \quad (9)$$

Для сопоставления с классической теорией броуновского движения используем специальное обозначение для случайной силы, полагая, что

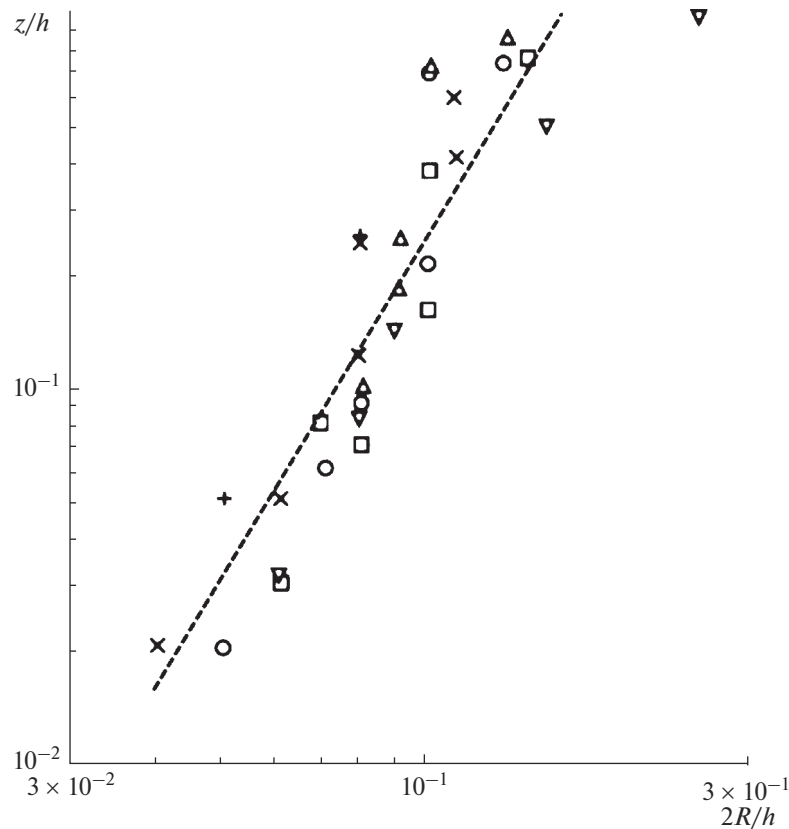


Рис. 4. Зависимость безразмерного среднего диаметра ансамбля термиков $2R/h$ от высоты z/h согласно [16]. Прямая пунктирная линия соответствует степенной аппроксимации экспериментальных данных $R/h = 0.08(z/h)^{1/3}$.

$$g\theta' = \frac{1}{m}q(t), \quad (10)$$

где $q(t)/m$ – обозначение случайной силы.

Подстановка (10) в (8) приводит к уравнению

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}w(t) = -\gamma_0 w(t) + \frac{1}{m}q(t) \\ w(0) = w^0. \end{cases} \quad (11)$$

Динамическое уравнение в форме (11) впервые использовалось для описания классического ансамбля идентичных броуновских частиц. При этом считалось, что m – масса частицы, $q(t)$ – случайная сила взаимодействия частицы со средой, такая что $\langle q(t) \rangle = 0$. Последнее условие означает, что среднее значение случайной силы $\langle q(t) \rangle$ не оказывает влияния на динамику системы частиц.

Для построения абстрактного стохастического уравнения Ланжевена ансамбля “медленных” конвективных термиков на основе (11) необходимо задать случайную силу $q(t)/m$.

УРАВНЕНИЕ ЛАНЖЕВЕНА ДЛЯ АНСАМБЛЯ “МЕДЛЕННЫХ” КОНВЕКТИВНЫХ ТЕРМИКОВ В ОКРЕСТНОСТИ УРОВНЯ КОНВЕКЦИИ И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

Пусть $W^2 > 0$ – некоторая постоянная, размерность которой соответствует квадрату скорости: $[W^2] = \text{м}^2/\text{с}^2$. Физический смысл постоянной W^2 будет установлен далее. Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{1}{m}q(t) = D_E^{1/2}\xi(t), \quad D_E = \gamma_0 W^2. \quad (12)$$

Здесь параметр D_E – коэффициент диффузии Эйнштейна, размерность $[D_E] = \text{м}^2/\text{с}^2$; $\xi(t)$ – произвольная функция времени, размерность $[\xi] = \text{с}^{-1/2}$.

С обозначениями (12) стохастическое уравнение (11) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}w(t) = -\gamma_0 w(t) + D_E^{1/2}\xi(t), \quad D_E = \gamma_0 W^2 \\ w(0) = w^0. \end{cases} \quad (13)$$

Заметим, что значение вертикальной скорости $w(t)$ в уравнении (13) может быть как положительным, так и отрицательным.

Интегрирование (13) приводит к уравнению Орнштейна:

$$w(t) = e^{-\gamma_0 t} w(0) + D_E^{1/2} \int_0^t e^{-\gamma_0(t-t')} \xi(t') dt'. \quad (14)$$

Будем предполагать далее, что случайная функция $\xi(t)$ в уравнениях (13), (14) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \quad \langle \xi(t) w(0) \rangle = 0, \\ \langle \xi(t) \xi(t') \rangle &= \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают усреднение по ансамблю; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

Первое соотношение (15) показывает, что средняя случайная сила не оказывает влияния на динамику ансамбля. Это соотношение уже обсуждалось ранее (уравнение (9)). Второе соотношение (15) означает отсутствие корреляции между случайной силой и случайным начальным условием. Третье соотношение (15) соответствует белому шуму Гаусса. Это уравнение указывает, что δ – коррелированность случайной силы $\xi(t)$ во времени.

Рассмотрим первое следствие динамического уравнения Орнштейна. Усреднение уравнения (14) по ансамблю приводит к равенству

$$\langle w(t) \rangle = e^{-\gamma_0 t} \langle w(0) \rangle + D_E^{1/2} \int_0^t e^{-\gamma_0(t-t')} \langle \xi(t') \rangle dt'. \quad (16)$$

Выполним в уравнении (16) предельный переход при $t \rightarrow \infty$. Тогда с учетом (15) найдем, что

$$\langle w(t) \rangle_{\text{eq}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle w(t) \rangle = 0. \quad (17)$$

Здесь $\langle w \rangle_{\text{eq}}$ соответствует равновесному значению средней по ансамблю скорости частиц. Равенство (17) показывает, что на уровне конвекции $\langle \mathbf{g} \hat{\theta} \rangle = 0$, средняя скорость системы термиков, совершающих как восходящее, так и нисходящее движение, равна нулю. В рамках принятой динамической модели (13), (15) этот результат – крайне правдоподобный.

Рассмотрим второе следствие динамического уравнения Орнштейна. Умножим уравнение (14) на $2D_E^{1/2} \xi(t)$, тогда

$$\begin{aligned} 2D_E^{1/2} \xi(t) w(t) &= 2D_E^{1/2} e^{-\gamma_0 t} \xi(t) w(0) + \\ &+ 2D_E \int_0^t e^{-\gamma_0(t-t')} \xi(t) \xi(t') dt'. \end{aligned} \quad (18)$$

Усреднение равенства (18) по ансамблю с учетом (15) и свойства дельта-функции Дирака приводит к равенству

$$\begin{aligned} 2D_E^{1/2} \langle \xi(t) w(t) \rangle &= 2D_E^{1/2} e^{-\gamma_0 t} \langle \xi(t) w(0) \rangle + \\ &+ 2D_E \int_0^t e^{-\gamma_0(t-t')} \langle \xi(t) \xi(t') \rangle dt' = 2D_E. \end{aligned} \quad (19)$$

Из соотношения (19) следует, что

$$\langle \xi(t) w(t) \rangle = D_E^{1/2} = \gamma_0^{1/2} W. \quad (20)$$

Уравнение (20) устанавливает связь коэффициента диффузии Эйнштейна D_E и усредненных по ансамблю случайных функций $\langle \xi(t) w(t) \rangle$. В известном смысле уравнение (20) – аналог выражения для коэффициента турбулентности в полуэмпирической теории Прандтля.

Рассмотрим третье следствие динамического уравнения Орнштейна. Умножим уравнение (13) на $2w(t) e^{2\gamma_0 t}$, тогда

$$\frac{d}{dt} e^{2\gamma_0 t} w^2(t) = 2D_E^{1/2} e^{2\gamma_0 t} \xi(t) w(t). \quad (21)$$

Усреднение (21) по ансамблю с учетом (19) приводит к равенству

$$\frac{d}{dt} e^{2\gamma_0 t} \langle w^2 \rangle = 2D_E e^{2\gamma_0 t}. \quad (22)$$

Проинтегрируем (22) по времени и тождественно преобразуем полученное соотношение, так что

$$\langle w^2(t) \rangle - e^{-2\gamma_0 t} \langle w^2(0) \rangle = \frac{D_E}{\gamma_0} (1 - e^{-2\gamma_0 t}). \quad (23)$$

Выполним в уравнении (23) предельный переход при $t \rightarrow \infty$. Тогда с учетом (12) найдем, что

$$\langle w^2 \rangle_{\text{eq}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle w^2(t) \rangle = \frac{D_E}{\gamma_0} = W^2. \quad (24)$$

Здесь $\langle w^2 \rangle_{\text{eq}}$ соответствует равновесному значению среднего по ансамблю от квадрата скорости частиц. Таким образом, согласно (24), в стохастической системе (13), (15) параметр W^2 формирует равновесное значение среднего $\langle w^2 \rangle_{\text{eq}}$ от квадрата вертикальной скорости элементов ансамбля.

Априорное задание величины W^2 следует выполнять так, чтобы равенство (24) могло обеспечить выполнение общих принципов неравновесной статистической механики для стохастического ансамбля.

Рассмотрим ансамбль сферических броуновских частиц, расположенных в термостате T . В этом случае следует считать, что $W^2 = k_B T / m$ (k_B – постоянная Больцмана). При этом соотно-

шение (24) реализует закон равномерного распределения энергии по степеням свободы. Этот способ задания величины W^2 использован для описания классического ансамбля броуновских частиц [5, 27].

Рассмотрим теперь не “термодинамические” ансамбли сферических элементов, для которых известны либо временные, либо пространственные средние. Для таких систем определены выражения $\overline{w^2}$, в которых знак черты сверху соответствует усреднению по времени или пространственному усреднению Рейнольдса. Положим $W^2 = \overline{w^2}$ в соотношении (24), тогда

$$\langle w^2 \rangle_{\text{eq}} = \overline{w^2}. \quad (25)$$

Равенство (25) следует интерпретировать как реализацию временной или пространственной формы гипотезы эргодичности. Этот подход использован для описания обобщенного ансамбля “медленных” конвективных термиков [4].

Преобразуем уравнения (13), (15) с учетом гипотезы эргодичности (25) и будем рассматривать полученное уравнение только в области $w > 0$, тогда

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} w(t) = -\gamma_0 w(t) + D_E^{1/2} \xi(t), & D_E = \gamma_0 \overline{w^2} \\ \langle \xi(t) \rangle = 0, & \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t'). \end{cases} \quad (26)$$

Полученное уравнение (26) будем называть далее уравнением Ланжевена для системы “медленных” конвективных термиков.

УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА–ПЛАНКА И ФУНКЦИЯ ГРИНА АНСАМБЛЯ “МЕДЛЕННЫХ” КОНВЕКТИВНЫХ ТЕРМИКОВ В ОКРЕСТНОСТИ УРОВНЯ КОНВЕКЦИИ

Так как (26) включает в себя случайную силу $D_E^{1/2} \xi(t)$, то величина вертикальной скорости w в уравнении Ланжевена – также случайная величина. Это обстоятельство приводит к необходимости вероятностного описания. Пусть $f_w = f_w(w, t)$ – функция плотности вероятности распределения конвективных термиков по скоростям, заданная на фазовом пространстве $\Omega_w^+ = \{w: 0 \leq w < \infty\}$. Тогда

$$f_w(w, t) \geq 0, \quad \int_0^{\infty} f_w(w, t) dw = 1. \quad (27)$$

Второе уравнение (27) будем называть далее условием нормировки.

В монографиях [5, 27] показано, что для ансамблей частиц, удовлетворяющих уравнениям Ланжевена, плотности вероятности $f_w(w, t)$ удо-

влетворяют ассоциированным уравнениям Фоккера–Планка. В случае уравнения Ланжевена (26) ассоциированное уравнение Фоккера–Планка имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_w = \frac{\partial}{\partial w} \left[\gamma_0 w f_w + D_E \frac{\partial}{\partial w} f_w \right]. \quad (28)$$

Решение кинетического уравнения Фоккера–Планка (28) предполагает задание начальных и краевых условий. В качестве начального условия можно использовать произвольную положительную функцию $f_w^0 = f_w^0(w)$ такую, что

$$f_w(w, 0) = f_w^0(w) > 0, \quad \int_0^{\infty} f_w^0(w) dw = 1. \quad (29)$$

В качестве краевых условий уравнения (28) примем следующие соотношения:

$$\begin{cases} \lim_{w \rightarrow \infty} \left[\gamma_0 w f_w + D_E \frac{\partial}{\partial w} f_w \right] = 0 \\ \lim_{w \rightarrow 0} \left[D_E \frac{\partial}{\partial w} f_w \right] = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Первая строка системы (30) означает, что функция $f_w(w, t)$ достаточно быстро убывает при $w \rightarrow \infty$. Вторая строка (30) соответствует предположению о существовании локального максимума функции $f_w(w, t)$ на границе фазового пространства скоростей при $w \rightarrow 0$. Краевые условия в формуле (30) могут рассматриваться как условие отсутствия полного диффузионного потока на границах фазового пространства.

Интегрирование уравнения Фоккера–Планка (28) по пространству скоростей Ω_w^+ с учетом краевых условий (30) приводит к равенству

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} f_w dw = -\gamma(w) w f_w|_0 = 0. \quad (31)$$

Следовательно, краевые условия (30) согласованы с условием нормировки (27).

Решение задачи (28), (30) можно выполнить с помощью метода Грина. Пусть w_0 – произвольная точка пространства Максвелла: $0 \leq w_0 < \infty$. Функцией Грина задачи (28), (30) будем называть фундаментальное решение $G(w, w_0, t)$, соответствующее начальному условию в форме дельта-функции Дирака: $f_w^0(w) = \delta(w - w_0)$. Следуя [27], можно показать, что функция Грина задачи (28), (30) имеет следующий вид:

$$G(w, w_0, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\overline{w^2})^{-1/2} \left[1 - e^{-2\gamma_0 t} \right]^{-1/2} \times \\ \times \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2w^2} \frac{(w - w_0 e^{-\gamma_0 t})^2}{1 - e^{-2\gamma_0 t}} - \frac{1}{2w^2} \frac{(w + w_0 e^{-\gamma_0 t})^2}{1 - e^{-2\gamma_0 t}} \right\}. \quad (32)$$

Поэтому в соответствии с методом Грина справедливо равенство

$$f_w(w, t) = \int_0^{\infty} G(w, w_0, t) f_w^0(w_0) dw_0. \quad (33)$$

$$f_w^{\infty}(w) dw = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\overline{w^2})^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{w^2}{\overline{w^2}}\right] dw, \quad (34)$$

$$0 \leq w < \infty.$$

Соотношение (33) представляет собой общую аналитическую форму нестационарного решения (28), (30), соответствующую произвольному начальному условию f_w^0 .

**ОБОБЩЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
МАКСВЕЛЛА ДЛЯ АНСАМБЛЯ
КОНВЕКТИВНЫХ ТЕРМИКОВ.
СОПОСТАВЛЕНИЕ**

С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Кинетическая форма уравнения Фоккера–Планка (28), (30) допускает стационарное решение в форме обобщенного одномерного распределения Максвелла

Классическое одномерное распределение Максвелла по скоростям для броуновских частиц или молекул идеального газа следует из распределения (34), если считать, что средний параметр $\overline{w^2}$ пропорционален температуре среды.

Заметим, что из соотношения (32) следует, что

$$f_w^{\infty}(w) = \lim_{t \rightarrow \infty} G(w, w_0, t). \quad (35)$$

Таким образом, согласно (35), распределение Максвелла (34) также является пределом функции Грина (32) при $t \rightarrow \infty$. Справедливо и более общее утверждение. Можно показать, что стационарное решение Максвелла (34) является пределом при $t \rightarrow \infty$ нестационарного решения (28), (30) при любых начальных условиях [4].

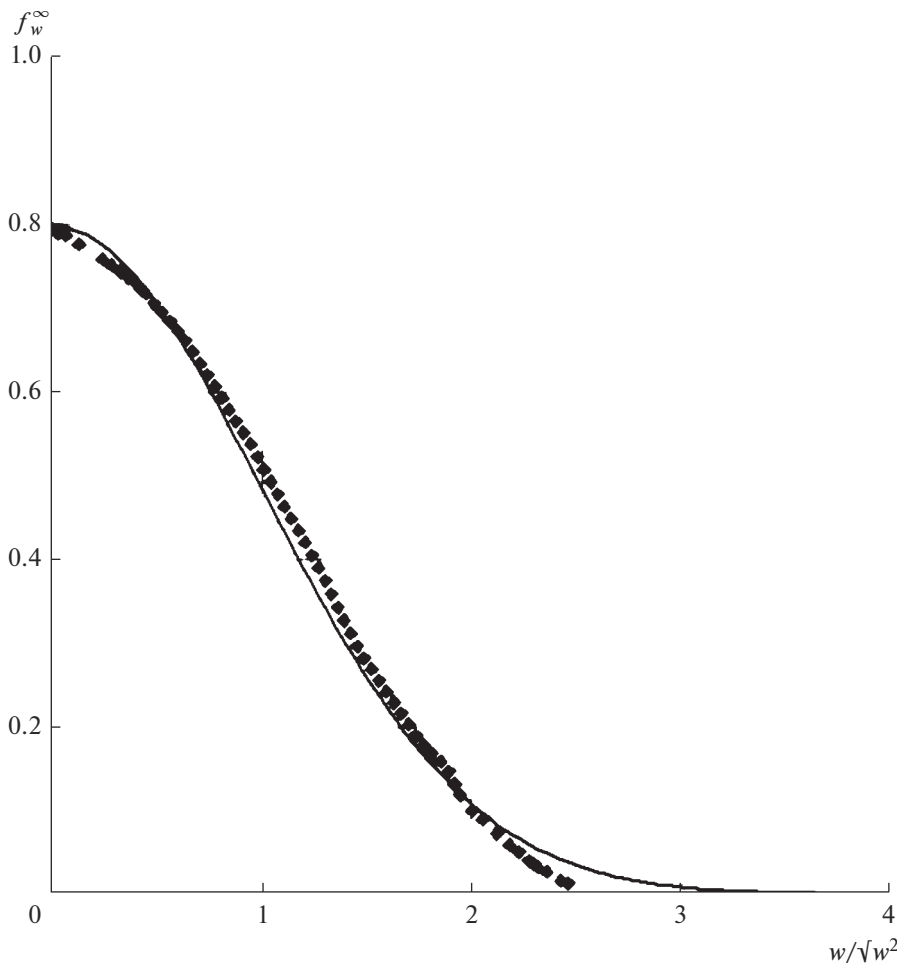


Рис. 5. Вычисленная плотность вероятности распределения вертикальной скорости согласно результатам численного моделирования [14]. Черные ромбы соответствуют расчетам на уровне $z/h = 0.5$. Обобщенное распределение Максвелла (34) изображено непрерывной линией.

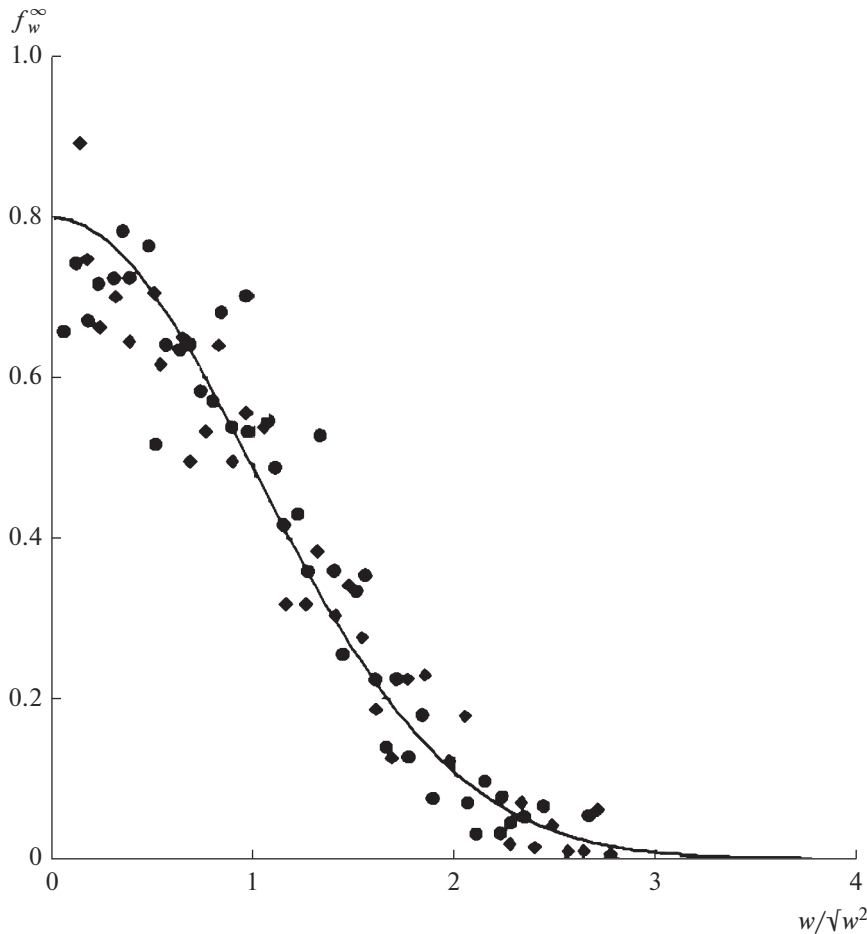


Рис. 6. Эмпирическая плотность вероятности распределения вертикальной скорости согласно экспериментальным данным [6]. Черные точки и черные ромбы соответствуют баллонным измерениям вдоль ветра на уровнях $z/h = 0.42$ и $z/h = 0.55$ соответственно. Обобщенное распределение Максвелла (34) изображено непрерывной кривой.

Сопоставим обобщенное распределение Максвелла (34) с известными данными численных и натуральных экспериментов. Численное моделирование турбулентной конвекции на основе уравнений Буссинеска выполнено в работе [14]. В этом исследовании, в частности, представлены численные эксперименты, позволяющие построить функцию плотности вероятности по нормированным скоростям w/w_D для ансамбля конвективных термиков на уровне $z/h = 0.5$. Результаты этих экспериментов удобно представить в зависимости от нормированной переменной $w/\sqrt{\overline{w^2}}$ ($\overline{w^2} = 0.45w_D^2$ в соответствии с (3)). Сопоставление обобщенного распределения Максвелла (34) с результатами [14] представлено на рис. 5.

Функции плотности вероятности по нормированным вертикальным скоростям w/w_D в системе термиком на уровнях $z/h = 0.42$ и $z/h = 0.55$ по-

строены в [6]. Результаты этих экспериментов удобно представить в зависимости от нормированной переменной $w/\sqrt{\overline{w^2}}$ ($\overline{w^2} = 0.45w_D^2$ в соответствии с (3)). Сопоставление обобщенного распределения Максвелла (34) с результатами баллонных измерений в [6] представлено на рис. 6.

Результаты численных и натуральных экспериментов, представленные на рис. 5 и 6, убедительно демонстрируют существование обобщенного распределения Максвелла в стохастической модели системы “медленных” конвективных термиком.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена математическая модель стохастической системы “медленных” сферических конвективных термиком фиксированного радиуса в тонком слое, включающем в себя уровень конвекции. Показано, что предложенная модель си-

стемы “медленных” конвективных термиком подобна классической модели ансамбля броуновских частиц, расположенных в термостате. Такая аналогия позволяет использовать для системы “медленных” конвективных термиком уравнение Ланжевена и сопутствующее уравнение Фоккера–Планка в формах, известных в физической кинетике для ансамбля броуновских частиц.

В рамках предложенной модели установлено, что на уровне конвекции средняя скорость системы “медленных” конвективных термиком равна нулю. Показано, что для системы термиком уровня конвекции существует кинетический аналог температуры, соответствующий второму моменту вертикальной скорости. Установлено, что сопутствующее уравнение Фоккера–Планка имеет стационарное решение, которое следует интерпретировать как обобщенное распределение Максвелла. Численные и натурные эксперименты на уровне конвекции убедительно демонстрируют соответствие обобщенного распределения Максвелла результатам вычислений и данным атмосферных измерений.

Это соответствие не только обеспечивает корректность модели системы “медленных” конвективных термиком, но и открывает возможность широкого использования методов физической кинетики для описания турбулентной конвекции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вульфсон А.Н. Уравнения глубокой конвекции в сухой атмосфере // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17. № 8. С. 873–876.
2. Вульфсон А.Н., Бородин О.О. Ансамбль конвективных термиком как обобщенный анализ броуновских частиц // Успехи физических наук. 2016. Т. 162. № 2. С. 113–124.
3. Вульфсон А.Н., Бородин О.О. Об устойчивости распределения Максвелла для системы термиком в турбулентных конвективных слоях пресных и соленых водоемов // Вод. ресурсы. 2016. Т. 43. № 1. С. 47–53.
4. Вульфсон А.Н., Бородин О.О. Уравнение Фоккера–Планка и статистические характеристики проникающей конвекции в верхнем слое океана // Докл. РАН. Сер. Геофизика. 2011. Т. 440. № 1. С. 120–123.
5. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995.
6. Caughey S.J., Kitchen M., Leighton J.R. Turbulence Structure in Convective Boundary Layers and Implications for Diffusion // Boundary-Layer Meteorol. 1983. V. 25. № 4. P. 345–352.
7. Caughey S.J., Palmer S.G. Some aspects of turbulence structure through the depth of the convective boundary layer // Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 1979. V. 105. P. 811–827.
8. Deardorff J.W. Convective velocity and temperature scales for the unstable planetary boundary layer and for Rayleigh convection // J. Atmos. Sci. 1970. V. 27. № 8. P. 1211–1212.
9. Deardorff J.W., Willis G.E. Further results from a laboratory model of the convective planetary boundary layer // Bound.-Layer Meteorol. 1985. V. 32. P. 205–236.
10. Du S., Wilson J.D., Yee E. On moments approximation method for constructing a Lagrangian stochastic model // Boundary-Layer Meteorol. 1994. V. 40. P. 2739–292.
11. Fedorovich E., Nieuwstadt F.T.M., Kaiser R. Transition regimes and development of the mixed layer. Pt I // J. Atmos. Sci. 2001. V. 58. P. 70–86.
12. Hibberd M.F., Sawford B.L. A Saline Laboratory Model of the Planetary Convective Boundary Layer // Boundary-Layer Meteorol. 1994. V. 67. P. 229–250.
13. Huppert H.E., Turner J.S. Double-diffusive convection // J. Fluid Mech. 1981. V. 106. P. 299–329.
14. Lamb R.G. Diffusion in the convective boundary layer. // Atmospheric Turbulence and Air Modelling / Eds F.T.M. Nieuwstadt, H. van Dop D. Boston: Reidel Publication Company, 1982. P. 159–229.
15. Lenschow D.H., Stephens P.L. The role of thermals in the convective boundary layer // Boundary-Layer Meteorol. 1980. V. 19. № 4. P. 509–532.
16. Lenschow D.H., Wyngaard J.C., Pennell W.T. Mean field and second-moment budgets in a baroclinic, convective boundary layer // J. Atmos. Sci. 1980. V. 37. № 6. P. 1313–1326.
17. Levine J. Spherical vortex theory of bubble-like motion cumulus clouds // J. Meteor. 1959. V. 16. № 6. P. 653–662.
18. Luhar A.K., Britter R.E. A random walk model for dispersion in inhomogeneous turbulence in a convective boundary layer // Atm. Environ. 1989. V. 23. P. 1911–1924.
19. Ogura Y., Phillips N.A. Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere // J. Atmos. Sci. V. 32. № 2. P. 173–179.
20. Pope S.B. Turbulent Flows. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
21. Priestly C.H.B. Turbulent transfer in the lower atmosphere // Chicago: Univ. Chicago Press, 1959. 130 p.
22. Schmidt H., Schumann U. Coherent structure of the convective boundary layer derived from large-eddy simulations // J. Fluid. Mech. 1989. V. 200. P. 511–562.
23. Scorer R.S., Ludlam F.H. Bubble theory of penetrative convection // Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 1953. V. 79. P. 94–106.
24. Shin H.H., Hong S.-Y., Noh Y. Derivation of Turbulent Kinetic Energy from a First-Order Nonlocal Planetary Boundary Layer Parameterization // J. Atmos. Sci. 2013. V. 70. P. 1795–1805.
25. Sparow E.M., Husar R.B., Goldstein R.J. Observation and other characteristics of thermals // J. Fluid Mech. 1970. V. 41. № 4. P. 793–800.

26. *Turner J.S.* Buoyancy effects in fluids // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979. 367 p
27. *van Kampen N.G.* Stochastic Processes in Physics and Chemistry. Amsterdam, North Holland: Elsevier, 2007. 464 p.
28. *Vulfson A.N., Borodin O.O.* Brownian ensemble of random-radius buoyancy vortices and Maxwell velocity distribution in a turbulent convective mixed-layer // Physics of Fluids. 2018. V. 30. 095103. <https://doi.org/10.1063/1.5042676>
29. *Vulfson A.N., Borodin O.O.* Maxwell Velocity Distribution for a Stochastic Ensemble of Thermals in a Turbulent Convective Mixed-Layer // Kinetic Approach Procedia IUTAM. 2013. V. 8. P. 238–247.
30. *Willis G.E., Deardorff J.W.* A Laboratory Model of the Unstable Planetary Boundary Layer // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31. P. 1297–1307.