ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 2, с. 264–276

УДК 517.958

ОЦЕНКИ В КЛАССАХ ГЁЛЬДЕРА РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

 В. Б. Андреев*, И. Г. Белухина**

(119992 Москва, Ленинские Горы, МГУ ВМК, Россия)

**e-mail: andreev@cs.msu.su*

***e-mail: belukh@cs.msu.su*

Поступила в редакцию 25.03.2018 г.
Переработанный вариант 03.09.2018 г.

В полуплоскости рассматривается неоднородная первая краевая задача для однородного сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии с постоянными коэффициентами и конвекцией, направленной ортогонально границе полуплоскости с направлением от границы. В предположении принадлежности граничной функции пространству $C^{2,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, получена неулучшаемая оценка ограниченного на бесконечности решения в соответствующей норме Гёльдера. Библ. 5.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, конвекция-диффузия, задача в полуплоскости, неулучшаемые априорные оценки, пространства Гёльдера.

DOI: 10.1134/S0044466919020030

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является получение $C^{2,\lambda}$-оценки решения заданного в полуплоскости однородного сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии с постоянными коэффициентами и направленной ортогонально от границы конвекцией через соответствующую норму правой части граничного условия Дирихле. Эта работа является продолжением исследований, начатых в [1], где рассматривалась та же задача, но для неоднородного уравнения с однородным граничным условием. Объединение этих результатов приводит к оценке полностью неоднородной задачи, что открывает короткий путь к получению оценок в $C^{k,\lambda}$, где $k > 2$. Более того, точность полученных оценок позволит их использовать для исследования уравнения с переменными коэффициентами, как это было сделано в [2] для одномерного случая (ср. с [3, гл. III]). Следует отметить, что ранее близкие оценки были получены в [4], но там оценивались коэффициенты Гёльдера только по направлению, задаваемому границей полуплоскости. Для получения этих оценок использовался аппарат преобразования Фурье по касательной переменной и соответствующая теорема о мультипликаторе. Эта красивая техника, к сожалению, не позволяет получить оценки коэффициентов Гёльдера по нормальному к границе направлению и тем самым не позволяет получить наш результат. С другой стороны, оценки из [4] не являются достаточными для исследования уравнения с переменными коэффициентами. Мы же для получения оценок используем аппарат функции Грина, который является более громоздким, однако позволяющим конструктивно получить оценки коэффициентов Гёльдера по любому направлению, т.е. с выписыванием при необходимости постоянных в этих оценках. Наша техника получения оценок предполагает раздельное оценивание коэффициентов Гёльдера по переменным x и y. В связи с тем, что оценки по касательному направлению (у нас это направление y) уже получены в [4], мы в работе приводим доказательство оценок коэффициентов Гёльдера только по направлению x, а для оценок по y формулируем результат и ссылаемся на [4].

Дальнейшее содержание работы таково. В разд. 2 дается постановка задачи и формулируется основной результат работы – теорема 1. В разд. 3 оцениваются коэффициенты Гёльдера по направлению x самого решения и его первых производных. В разд. 4 оцениваются вторые производные.

На протяжении всей статьи для обозначения постоянных, которые не зависят от решения и малого параметра ε, будем использовать строчные буквы c с индексом или без. Одной и той же буквой часто будем обозначать различные постоянные.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В правой полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ плоскости OXY ищется ограниченное решение задачи

$$-\varepsilon\Delta U + 2\alpha\frac{\partial U}{\partial X} + qU = 0, \quad (X,Y)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{2.1}$$

$$U(0,Y) = \mathcal{G}(Y), \quad -\infty < Y < \infty. \tag{2.2}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, $\varepsilon\in(0,1]$ – малый параметр, α и q – (постоянные, положительные) коэффициенты. Предполагается, что граничная функция $\mathcal{G}(Y)$ обладает некоторой (равномерной по ε) гладкостью. Требуется получить оценки коэффициентов Гёльдера решения $U(X,Y)$ и его производных.

Анализировать задачу (2.1), (2.2) удобнее в растянутых переменных

$$x = X/\varepsilon, \quad y = Y/\varepsilon. \tag{2.3}$$

Пусть $U(X,Y) = U(\varepsilon x,\varepsilon y) =: u(x,y)$, а $\mathcal{G}(Y) = \mathcal{G}(\varepsilon y) =: g(y)$. В новых переменных задача (2.1), (2.2) примет вид

$$Lu := -\Delta u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon qu = 0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{2.4}$$

$$u(0,y) = g(y), \quad -\infty < y < \infty. \tag{2.5}$$

При помощи функции Грина решение задачи (2.4), (2.5) представимо в виде

$$u(x,y) = -\frac{1}{\pi}e^{\alpha x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_0\left(a\sqrt{x^2+(\eta-y)^2}\right)}{\partial x}g(\eta)d\eta, \tag{2.6}$$

где $K_0(z)$ есть функция Макдональда нулевого порядка, а

$$a^2 = \alpha^2 + \varepsilon q. \tag{2.7}$$

Чтобы сформулировать основной результат работы, введем некоторые обозначения. Будем через $C^{k,\lambda}$ обозначать пространство k раз непрерывно дифференцируемых в $\mathbb{R}^2_+$ функций, k-е производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ. Если какой-либо индекс k или λ будет равен нулю, то будем его опускать и писать просто C^λ, C^k или C. Под полунормой $|\cdot|$ в пространстве C^k будем понимать сумму максимумов модулей ее k-х производных, а в $C^{k,\lambda}$ – сумму коэффициентов Гёльдера этих производных, т.е.

$$|f|_{C^k} = \sum_{l=0}^{k}\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^{k-l}\partial y^l}f(x,y)\right|,$$

$$|f|_{C^{k,\lambda}} = \sum_{l=0}^{k}\sup_{\substack{(x,y),(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{R}^2_+\\(x,y)\neq(\bar{x},\bar{y})}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^{k-l}\partial y^l}f(x,y) - \frac{\partial^k}{\partial\bar{x}^{k-l}\partial\bar{y}^l}f(\bar{x},\bar{y})\right|\Big/\left[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\right]^{\lambda/2}.$$

Наконец,

$$\|f\|_{C^{k,\lambda}} = |f|_{C^{k,\lambda}} + \sum_{l=0}^{k}|f|_{C^l}.$$

В процессе доказательств нам потребуются коэффициенты Гёльдера не по произвольному направлению, а по координатным. Будем их обозначать через $|f|_{C^\lambda_x}$ и $|f|_{C^\lambda_y}$. Оценки коэффициентов Гёльдера по произвольному направлению вытекают из них. Соответствующие нормы в одномерном случае описываются аналогично. Для краткости будем использовать в формулах также $|g|_0$, $|g|_\lambda$ вместо $|g|_C$ и $|g|_{C^\lambda}$ соответственно.

Теорема 1. *Для решения* $U(X,Y)$ *задачи* (1), (2) *справедливы априорные оценки*

$$\|U\|_{C^{k,\lambda}} \le c\|G\|_{C^{k,\lambda}}, \quad k = 0,1,2, \quad \lambda \in (0,1). \tag{2.8}$$

Доказательству этой теоремы посвящены остальные разделы работы.

3. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ И МЛАДШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Начнем со вспомогательного утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть положительные числа* a *и* α *связаны соотношением* (2.7), *а* $r > 0$, $0 \le \varphi \le \pi/2$. *Тогда при* $\delta \ge 0$, $\beta \ge 0$ *справедлива оценка*

$$f(r,\varphi) = (\sin\varphi)^\delta r^\beta e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r} \le c\left(1+\varepsilon^{\delta/2-\beta}\right). \tag{3.1}$$

Доказательство. Рассмотрим оцениваемую функцию $f(r,\varphi)$ как функцию, зависящую от r, считая φ параметром. При $\beta = 0$ очевидно максимум достигается при $r = 0$, поэтому

$$f(r,\varphi) \le 1.$$

При $\beta > 0$ функция $f(r,\varphi)$ неотрицательна, обращается в нуль при $r = 0$, экспоненциально убывает к нулю при $r \to \infty$ и поэтому имеет максимум по r в некоторой точке $r^*(\varphi)$. Этот максимум, зависящий от φ как от параметра, есть

$$\max_{0<r<\infty} f(r,\varphi) = 2^\delta\left[\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\delta/2}\left(\frac{\beta}{e}\right)^\beta\left[(a-\alpha)+2\alpha\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{-\beta}.$$

При $\delta/2 \ge \beta$ отсюда, с учетом (2.7), непосредственно следует ограниченность $f(r,\varphi)$. При $\delta/2 \le \beta$ исследование дополняется таким же рассмотрением зависимости найденной функции от $y = \sin^2\frac{\varphi}{2}$. В результате имеем оценку

$$f(r,\varphi) \le \frac{1}{e^\beta}\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\delta/2}(\beta-\delta/2)^{\beta-\delta/2}(a-\alpha)^{\delta/2-\beta}.$$

С учетом (2.7) это завершает доказательство (3.1). Лемма доказана.

Полезной во многих случаях в дальнейшем будет следующая формула:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+a\right)\frac{\partial K_0(ar)}{\partial x} = \frac{a\cos 2\varphi}{r}K_1(ar) - a^2\cos\varphi\left[K_1(ar)-K_0(ar)\right] - a^2\cos\varphi(1-\cos\varphi)K_0(ar), \tag{3.2}$$

где K_0, K_1 — функции Макдональда нулевого и первого порядков соответственно, $a > 0$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\sin\varphi = y/r$.

Перейдем к оценкам решения и его первых производных.

Лемма 3.2. *Для решения* $u(x,y)$ *задачи* (2.4), (2.5) *справедлива оценка*

$$|u|_{C_x^\lambda} \le \frac{c}{\lambda}\left\{\frac{1}{(1-\lambda)}|g|_\lambda + \varepsilon^\lambda|g|_0\right\}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Сначала несколько преобразуем представление (2.6) решения $u(x,y)$ задачи (2.4), (2.5), вычтя в подынтегральном выражении из функции $g(\eta)$ постоянное значение $g(y)$ и прибавив его снова. Получим

$$u(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha x}\frac{\partial K_0}{\partial x}[g(\eta)-g(y)]\,d\eta - \frac{1}{\pi}e^{\alpha x}g(y)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_0}{\partial x}\,d\eta. \tag{3.4}$$

Здесь $K_0 = K_0\left(a\sqrt{x^2+(\eta-y)^2}\right)$.

Последнее слагаемое теперь можно вычислить, учитывая четность по $(\eta - y)$ подынтегральной функции. После замены переменной интегрирования $\eta' = \eta - y$ и использования формулы $(\nu = 1,\ 2\mu + 1 = 0)$ последнее слагаемое в (3.4) принимает вид

$$-\frac{1}{\pi}e^{\alpha x}g(y)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_0}{\partial x}d\eta = e^{-(a-\alpha)x}g(y). \tag{3.5}$$

После замены в (3.4) переменной $\eta' = \eta - y$ при $\eta \geq y$ и $\eta'' = -\eta + y$ при $\eta \leq y$, опуская в дальнейшем штрихи у η, с учетом (3.5) и четности по η функции $\partial K_0/\partial x$, приходим к представлению

$$u(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{\alpha x}\frac{\partial K_0\left(a\sqrt{x^2+\eta^2}\right)}{\partial x}\delta_\eta^2 g(y)d\eta + g(y)e^{-(a-\alpha)x}, \tag{3.6}$$

где

$$\delta_\eta^2 g(y) = g(y+\eta) + g(y-\eta) - 2g(y). \tag{3.7}$$

Очевидно, что для оценки функции или ее производных в C^λ достаточно оценить их величины в C_x^λ и C_y^λ. Проведем оценки в C_x^λ. Пусть $\overline{x}$, x — две различные точки положительной полуоси Ox. Для определенности будем полагать, что $\overline{x} < x$, так что $x - \overline{x} = \Delta > 0$. Оценим разность значений решения $u(x,y)$ из (3.6) в точках x и $\overline{x}$

$$\begin{gathered} u(x,y) - u(\overline{x},y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[e^{\alpha x}\frac{\partial K_0\left(a\sqrt{x^2+\eta^2}\right)}{\partial x} - e^{\alpha\overline{x}}\frac{\partial K_0\left(a\sqrt{\overline{x}^2+\eta^2}\right)}{\partial\overline{x}}\right]\delta_\eta^2 g(y)d\eta + \\ + g(y)\left[e^{-(a-\alpha)x} - e^{-(a-\alpha)\overline{x}}\right] =: V_0(x,\overline{x},y) + V_{00}(x,\overline{x},y). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Начнем с оценки последнего слагаемого,

$$V_{00}(x,\overline{x},y) = g(y)\left[e^{-(a-\alpha)x} - e^{-(a-\alpha)\overline{x}}\right]. \tag{3.9}$$

Представив разность в квадратных скобках как интеграл по отрезку $[\overline{x},x]$ от производной функции $e^{-(a-\alpha)z}$, из (3.9) получим

$$\begin{gathered} |V_{00}(x,\overline{x},y)| = (a-\alpha)\left|g(y)e^{-(a-\alpha)\overline{x}}\int_0^{\Delta}e^{-(a-\alpha)z}dz\right| = (a-\alpha)\left|g(y)e^{-(a-\alpha)\overline{x}}\int_0^{\Delta}z^{-1+\lambda}\left(z^{1-\lambda}e^{-(a-\alpha)z}\right)dz\right| \leq \\ \leq |g|_0(a-\alpha)\left(\int_0^{\Delta}z^{-1+\lambda}dz\right)\max_{0\leq z<\infty}\left\{z^{1-\lambda}e^{-(a-\alpha)z}\right\}. \end{gathered}$$

Функция, стоящая под знаком $\max$, неотрицательна, обращается в нуль при $z = 0$ и при $z \to \infty$. Поэтому она имеет максимум. Найдя его, получим оценку

$$|V_{00}(x,\overline{x},y)| \leq \frac{c}{\lambda}\Delta^\lambda(a-\alpha)^\lambda|g|_0. \tag{3.10}$$

Теперь рассмотрим оставшуюся часть (3.8), $V_0(x,\overline{x},y)$. Для ее оценки, следуя [3, гл. III], разобьем интервал интегрирования $[0,\infty)$ на два интервала: $[0,\Delta]$ и $[\Delta,\infty)$. Далее, в интеграле по $[\Delta,\infty)$ разность выражений в квадратных скобках представим в виде интеграла по отрезку $[\overline{x},x]$ от соответствующей производной. Получим

$$V_0(x,\overline{x},y) = V_{01}(x,\overline{x},y) + V_{02}(x,\overline{x},y), \tag{3.11}$$

где

$$V_{01}(x,\overline{x},y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\Delta}\left[e^{\alpha x}\frac{\partial K_0}{\partial x} - e^{\alpha\overline{x}}\frac{\partial K_0}{\partial\overline{x}}\right]\delta_\eta^2 g(y)d\eta, \tag{3.12}$$

$$V_{02}(x,\bar{x},y) = -\frac{1}{\pi}\int_{\Delta}^{\infty}\delta_\eta^2 g(y)\int_{\bar{x}}^{x}\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\alpha z}\frac{\partial K_0}{\partial z}\right)dzd\eta. \tag{3.13}$$

Оценим $\delta_\eta^2 g(y)$ из (3.7) при $\eta \geq 0$

$$\left|\delta_\eta^2 g(y)\right| \leq 2\eta^\lambda |g|_\lambda. \tag{3.14}$$

Тогда из (3.12) будем иметь

$$|V_{01}(x,\bar{x},y)| \leq \frac{4}{\pi}|g|_\lambda\left(\int_0^\Delta \eta^{\lambda-1}d\eta\right)\max_{\substack{0\leq r<\infty\\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}}}\left|\eta e^{\alpha x}\frac{\partial K_0}{\partial x}\right|,$$

где $r = \sqrt{x^2+\eta^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\eta/x$. С учетом формулы (A.9) из работы [1], получим

$$|V_{01}(x,\bar{x},y)| \leq \frac{4}{\pi\lambda}|g|_\lambda\,\Delta^\lambda \times \max_{\substack{0\leq r<\infty\\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}}}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}ar\sin\varphi\left[\frac{1}{ar}+\frac{1}{\sqrt{ar}}\right]e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r}\right\}.$$

Используя теперь лемму 3.1 для каждого положительного слагаемого ($\delta = 1$, $\beta = 0$ в первом и $\delta = 1$, $\beta = 1/2$ во втором), придем к оценке

$$|V_{01}(x,\bar{x},y)| \leq \frac{c}{\lambda}\Delta^\lambda |g|_\lambda. \tag{3.15}$$

Перейдем к рассмотрению $V_{02}(x,\bar{x},y)$ из (3.13). Заметим, что

$$V_{02}(x,\bar{x},y) = -\frac{1}{\pi}\int_{\Delta}^{\infty}\delta_\eta^2 g(y)\int_{\bar{x}}^{x}e^{\alpha z}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)\frac{\partial K_0\left(a\sqrt{z^2+\eta^2}\right)}{\partial z}dzd\eta =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\Delta}^{\infty}\delta_\eta^2 g(y)\int_{\bar{x}}^{x}e^{\alpha z}\left(\frac{\partial}{\partial z}+a\right)\frac{\partial K_0}{\partial z}dzd\eta + \frac{(a-\alpha)}{\pi}\int_{\Delta}^{\infty}\delta_\eta^2 g(y)\int_{x}^{x}e^{\alpha z}\frac{\partial K_0}{\partial z}dzd\eta \equiv$$

$$\equiv V_{021}(x,\bar{x},y) + V_{022}(x,\bar{x},y).$$

Сначала рассмотрим интеграл $V_{022}(x,\bar{x},y)$. Применив к интегралу по отрезку $[\bar{x},x]$ теорему о среднем и учтя (3.14), получим

$$|V_{022}(\bar{x},x,y)| \leq \frac{2(a-\alpha)}{\pi}|g|_\lambda\left(\Delta\int_\Delta^\infty \eta^{-2+\lambda}d\eta\right)\times\max_{\substack{0\leq r<\infty\\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}}}\left(\left|\eta^2 e^{\alpha z}\frac{\partial K_0}{\partial z}\right|\right).$$

Для оценки максимума снова воспользуемся формулой (A9) из [1] и используем лемму 3.1 при ($\delta = 2$, $\beta = 1$) и ($\delta = 2$, $\beta = 3/2$). В результате имеем

$$|V_{022}(\bar{x},x,y)| \leq c\Delta^\lambda\frac{(a-\alpha)}{1-\lambda}\left[1+\varepsilon^{-1/2}\right]|g|_\lambda,$$

что вместе с (2.7) приводит к оценке

$$|V_{022}(\bar{x},x,y)| \leq c\frac{\Delta^\lambda}{(1-\lambda)}|g|_\lambda. \tag{3.16}$$

При оценке $V_{021}(x,\bar{x},y)$, поступая аналогично, получаем

$$|V_{021}(\bar{x},x,y)| \leq \frac{2}{\pi}\Delta|g|_\lambda\left(\int_\Delta^\infty \eta^{-2+\lambda}d\eta\right)\max_{\substack{0\leq r<\infty\\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}}}\left|\eta^2 e^{\alpha z}\left(\frac{\partial}{\partial z}+a\right)\frac{\partial K_0}{\partial z}\right|.$$

Далее выполним интегрирование по η и используем представление $\left(\frac{\partial}{\partial z}+a\right)\frac{\partial K_0}{\partial z}$ в полярных координатах формулой (3.2), а затем оценим величины $[K_1(r)-K_0(r)]$, $K_1(r)$, $K_0(r)$ при помощи формул из [1, ф. (A.6), (A.9), (A.10)]. После применения к каждому из слагаемых вида

$(\sin\varphi)^{\delta} r^{\beta} e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r}$ в полученном выражении леммы 3.1 при $(\delta = 2, \beta = 0)$, $(\delta = 2, , \beta = 1/2)$, $(\delta = 4$, $\beta = 3/2)$ соответственно будем иметь

$$|V_{021}(\bar{x}, x, y)| \le c\Delta^{\lambda} \frac{1}{(1-\lambda)} |g|_{\lambda}. \tag{3.17}$$

Теперь, принимая во внимание (3.11)–(3.13) и собирая вместе оценки (3.10), (3.15), (3.16), (3.17), а также учитывая (2.7) и произвольность x и $\bar{x}$, приходим к утверждению (3.3). Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Для производной* $\partial u/\partial x$ *решения задачи* (2.4), (2.5) *справедлива оценка*

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{C_x^{\lambda}} \le c\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{(1-\lambda)}|g|_{1,\lambda} + \varepsilon^{1+\lambda}|g|_0\right\}. \tag{3.18}$$

Доказательство. Используя представление (2.6) решения $u(x, y)$ задачи (2.4), (2.5), запишем выражение $\partial u/\partial x$ в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{\pi} e^{\alpha x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K_0}{\partial x} g(\eta) d\eta. \tag{3.19}$$

Проведем регуляризацию интеграла, для чего вычтем в подынтегральном выражении из $g(\eta)$ и прибавим к нему $S_g^1(\eta - y)$, где

$$S_g^1(z) = g(y) + zg'(y). \tag{3.20}$$

Теперь производную в (3.19) можно внести под знак интеграла, и, следовательно, представить $\partial u/\partial x$ в виде суммы

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) := I_{10}(x, y) + I_{11}(x, y), \tag{3.21}$$

где

$$\begin{aligned} I_{10}(x, y) &= -\frac{1}{\pi} e^{\alpha x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K_0}{\partial x}\left[S_g^1(\eta - y)\right] d\eta, \\ I_{11}(x, y) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\right)\frac{\partial K_0}{\partial x}\left[g(\eta) - S_g^1(\eta - y)\right] d\eta, \end{aligned} \tag{3.22}$$

а $K_0 = K_0(a\sqrt{x^2 + (\eta - y)^2})$.

Сделаем в интегралах (3.22) замену переменной $\eta' = \eta - y$. Заметим, что величина $I_{10}(x, y)$ с учетом (3.20) имеет вид

$$I_{10}(x, y) = -\frac{1}{\pi} e^{\alpha x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K_0}{\partial x}[g(y) + \eta g'(y)] d\eta,$$

где $K_0 = K_0\left(a\sqrt{x^2 + \eta^2}\right)$ и легко может быть вычислена. Так как $\eta\dfrac{\partial K_0}{\partial x}$ – функция нечетная по η, то интеграл от нее равен нулю. Оставшийся в $I_{10}(x, y)$ интеграл уже был ранее вычислен в (3.5). Поэтому, выполнив необходимое дифференцирование, будем иметь

$$I_{10}(x, y) = -(a - \alpha)e^{-(a-\alpha)x} g(y). \tag{3.23}$$

Теперь преобразуем $I_{11}(x, y)$. Для этого воспользуемся уравнением для $K_0\left(a\sqrt{x^2 + \eta^2}\right)$: $-\Delta K_0 + a^2 K_0 = 0$. Тогда $I_{11}(x, y)$ примет вид

$$I_{11}(x, y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x}\left[-\frac{\partial^2 K_0}{\partial \eta^2} + a^2 K_0 + \alpha\frac{\partial K_0}{\partial x}\right]\left[g(\eta + y) - S_g^1(\eta)\right] d\eta. \tag{3.24}$$

После интегрирования по частям в (3.24) слагаемого с производной по η получим

$$I_{11}(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x}\left\{\frac{\partial K_0}{\partial\eta}[g'(y+\eta)-g'(y)] + \left(\alpha\frac{\partial K_0}{\partial x} + a^2 K_0\right)\right\}[g(y+\eta)-g(y)-\eta g'(y)]\Bigg\}d\eta.$$

Так как функции $(\partial K_0/\partial\eta)$ и $\eta\left(\alpha\partial/\partial x + a^2\right)K_0$ – нечетные по η, то интеграл от них равен нулю. Принимая это во внимание и учитывая (3.7), после замены переменной η' = –η в интеграле по отрицательной полуоси придем к представлению

$$I_{11}(x,\bar{x},y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{e^{\alpha x}\frac{\partial K_0}{\partial\eta}[g'(y+\eta)-g'(y-\eta)] + \left(\alpha\frac{\partial K_0}{\partial x} + a^2K_0\right)\delta_\eta^2 g(y)\right\}d\eta. \tag{3.25}$$

Теперь можно переходить к оценке разности $\partial u/\partial x - \partial u/\partial\bar{x}$. С учетом (3.21) имеем

$$V(x,\bar{x},y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial\bar{x}}(\bar{x},y) = [I_{11}(x,y) - I_{11}(\bar{x},y)] + [I_{10}(x,y) - I_{10}(\bar{x},y)].$$

Обозначим

$$V_{1i}(x,\bar{x},y) = I_{1i}(x,y) - I_{1i}(\bar{x},y), \quad i = 0,1.$$

Тогда верно

$$V(x,\bar{x},y) := V_{10}(x,\bar{x},y) + V_{11}(x,\bar{x},y).$$

Оценим сначала $V_{10}(x,\bar{x},y)$. Как при оценке $|V_{00}(x,\bar{x},y)|$ (см. (3.9), (3.10), (3.23)), будем иметь

$$|V_{10}(x,\bar{x},y)| \le \frac{c}{\lambda}\Delta^\lambda(a-\alpha)^{1+\lambda}|g|_0. \tag{3.26}$$

Теперь рассмотрим $V_{11}(x,\bar{x},y)$ (см. (3.25)). Снова, следуя [3, гл. III], представим интеграл по η в виде суммы интегралов $V_{111}(x,\bar{x},y)$ и $V_{112}(x,\bar{x},y)$ по интервалам соответственно $[0,\Delta]$ и $[\Delta,\infty)$, затем в интеграле по интервалу $[\Delta,\infty)$, как и при рассмотрении $|u|_{C_x^\lambda}$, представим разность входящих туда выражений, зависящих от x и $\bar{x}$, в виде интеграла по отрезку $[\bar{x},x]$ от производной по соответствующей переменной. Получим

$$\begin{aligned} V_{111}(x,\bar{x},y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\Delta}\Bigg\{&\left[e^{\alpha x}\frac{\partial K_0}{\partial\eta} - e^{\alpha\bar{x}}\frac{\partial K_0}{\partial\eta}\right][g'(y+\eta)-g'(y-\eta)] + \\ &+\left[e^{\alpha x}\left(\alpha\frac{\partial K_0}{\partial x} + a^2K_0\right) - e^{\alpha\bar{x}}\left(\alpha\frac{\partial K_0}{\partial\bar{x}} + a^2K_0\right)\right]\delta_\eta^2 g(y)\Bigg\}d\eta, \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} V_{112}(x,\bar{x},y) = -\frac{1}{\pi}\int_\Delta^{\infty}d\eta\int_{\bar{x}}^{x}e^{\alpha z}\Bigg\{&\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)\frac{\partial K_0}{\partial\eta}\right][g'(y+\eta)-g'(y-\eta)] + \\ &+\left(\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)\left(\alpha\frac{\partial K_0}{\partial z} + a^2K_0\right)\delta_\eta^2 g(y)\Bigg\}dz. \end{aligned} \tag{3.28}$$

При рассмотрении интеграла в (3.27) учтем, что

$$|g'(y+\eta) - g'(y-\eta)| \le (2\eta)^\lambda|g|_{1,\lambda}, \quad |\delta_\eta^2 g(y)| \le 2^\lambda\eta^{1+\lambda}|g|_{1,\lambda}.$$

Будем иметь

$$|V_{111}(x,\bar{x},y)| \le \frac{2^{1+\lambda}}{\pi}|g|_{1,\lambda}\int_0^{\Delta}\eta^{-1+\lambda}d\eta\max_{\substack{0\le r\le\infty\\0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}\left\{e^{\alpha z}\left|\eta\frac{\partial K_0}{\partial\eta}\right| + \left|e^{\alpha z}\eta^2\left(\alpha\frac{\partial K_0}{\partial z} + a^2K_0\right)\right|\right\}, \tag{3.29}$$

где $r = \sqrt{z^2+\eta^2}$, $\eta = r\sin\varphi$.

При рассмотрении же интеграла в (3.28) (по $[\Delta,\infty)$) заменим внутренний интеграл по теореме о среднем. Получим для $V_{112}(x,\overline{x},y)$ оценку

$$\left|V_{112}(x,\overline{x},y)\right| \le \frac{2^{\lambda}}{\pi}|g|_{1,\lambda}\,\Delta\int_{\Delta}^{\infty}\eta^{-2+\lambda}d\eta\times$$
$$\times\max_{\substack{0\le r\le\infty\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}\left\{e^{\alpha z}\left|\eta^2\left(\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)\frac{\partial K_0}{\partial\eta}\right|+e^{\alpha z}\left|\eta^3\left(\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)\left(\alpha\frac{\partial K_0}{\partial z}+a^2K_0\right)\right|\right\}. \tag{3.30}$$

Дальнейший процесс доказательства схематично выглядит следующим образом. Выполним интегрирование по η в (3.29), затем найдем максимумы входящих величин. Для этого оценим максимум модуля суммы суммой максимумов модулей отдельных выражений, предварительно преобразованных к удобному для исследования виду, перейдем в них от декартовых координат к полярным, а затем воспользуемся полученными в [1] представлениями и оценками этих выражений и применим лемму 3.1 к каждому слагаемому вида $(\sin\varphi)^{\delta}r^{\beta}e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r}$.

Более подробно. Воспользовавшись формулами из [1, ф. (A.3), (A.9)] и леммой 3.1 при ($\delta = 2$, $\beta = 0$), ($\delta = 2$, $\beta = 1/2$) в первом слагаемом из (3.29), а затем, после преобразования второго слагаемого из той же формулы к виду

$$e^{\alpha z}\eta^2\left|a\left(\frac{\partial}{\partial z}+a\right)K_0-(a-\alpha)\frac{\partial K_0}{\partial z}\right|,$$

воспользовавшись формулами из [1, ф. (B.5), (A.6)] и леммой 3.1 при ($\delta = 2$, $\beta = 1/2$), ($\delta = 4$, $\beta = 3/2$) в его первом слагаемом и формулами из [1, ф. (A.3), (Ф.9)] и леммой 3.1 при ($\delta = 2$, $\beta = 1$), ($\delta = 2$, $\beta = 3/2$) во втором слагаемом, после выполнения интегрирования по η с учетом (2.7) придем к оценке

$$\left|V_{111}(x,\overline{x},y)\right| \le \frac{c}{\lambda}\Delta^{\lambda}|g|_{1,\lambda}. \tag{3.31}$$

Аналогично поступаем и при оценке $\left|V_{112}(x,\overline{x})\right|$ из (3.30), т.е. очевидным образом преобразуем оцениваемое выражение к виду

$$e^{\alpha z}\eta^2\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}+a\right)\frac{\partial K_0}{\partial\eta}-(a-\alpha)\frac{\partial K_0}{\partial\eta}\right|+e^{\alpha z}\eta^3\left|\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}+a\right)^2K_0+(a-\alpha)^2\frac{\partial K_0}{\partial z}\right|,$$

а затем, воспользовавшись формулой из [1, ф. (B.7)] для представления преобразованного выражения в полярных координатах и оценками из [1, ф. (A.6), (A.9), (A.10)] производной $\partial K_0(r)/\partial r$ и некоторых комбинаций производных, приходим к необходимости оценить величину

$$\left[\sin^3\varphi(r^0+r^{1/2})+\sin^2\varphi r^{3/2}\right]e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r}$$

в первом слагаемом. Во втором слагаемом после использования формул из [1, ф. (A.3), (A.9)] оказывается необходимым оценить величину

$$\left[(a-\alpha)\sin^3\varphi(r+r^{3/2})\right]e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r}.$$

В третьем слагаемом для представления в полярных координатах используем формулу из [1, ф. (B.6)], а для оценок необходимых комбинаций производных формулы из [1, ф. (A.7), (A.9), (A.10)], тогда становится необходимо оценить величину

$$\left[\sin^3\varphi r^{1/2}+\sin^5\varphi(r+r^{3/2})+\sin^7\varphi r^{5/2}\right]e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r}.$$

И, наконец, использование формул из [1, ф. (A.3), (A.9)] в четвертом слагаемом приводит к необходимости оценить величину

$$(a-\alpha)^2\sin^3\varphi\left[r^2+r^{5/2}\right]e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r}.$$

Теперь применим лемму 3.1 к каждому отдельному слагаемому при соответствующих значениях δ и β и выполним интегрирование по η. Тогда, принимая во внимание (2.7), получаем

$$\left|V_{112}(x,\bar{x},y)\right| \le \frac{c}{(1-\lambda)}\Delta^{\lambda}|g|_{1,\lambda}. \tag{3.32}$$

Объединяя (3.31) и (3.32), приходим к оценке

$$\left|V_{11}(x,\bar{x},y)\right| \le \frac{c}{\lambda(1-\lambda)}\Delta^{\lambda}|g|_{1,\lambda}. \tag{3.33}$$

Собирая вместе оценки (3.33), (3.26), с учетом (2.7) приходим к утверждаемой в лемме оценке (3.18). Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Для производной* $\partial u/\partial y$ *решения задачи* (2.4), (2.5) *справедлива оценка*

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{C_x^{\lambda}} \le c\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{(1-\lambda)}|g|_{1,\lambda} + \varepsilon^{\lambda}|g|_1\right\}. \tag{3.34}$$

Доказательство следует из оценки (3.3), если в последней заменить $g(y)$ на $g'(y)$, так как производная по y совпадает с решением той же задачи (2.4), (2.5), но с правой частью $g'(y)$ граничного условия (2.5) вместо $g(y)$.

4. ОЦЕНКИ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Продолжим изучение задачи (2.4), (2.5). В этом разделе будут получены необходимые оценки вторых производных в C_x^{λ}.

Лемма 4.1. *Для производной* $\partial^2 u/\partial x^2$ *решения задачи* (2.4), (2.5) *справедлива оценка*

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{C_x^{\lambda}} \le c\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{(1-\lambda)}|g|_{2,\lambda} + \varepsilon^{\lambda}|g|_2 + \varepsilon^{2+\lambda}|g|_0\right\}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Для того, чтобы выразить $\partial^2 u/\partial x^2$, снова используем представление (2.6) решения $u(x,y)$ задачи (2.4), (2.5). Имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{\pi}e^{\alpha x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_0}{\partial x}g(\eta)d\eta.$$

Так же, как и при доказательстве леммы 3.3, проведем регуляризацию интеграла, для чего вычтем в подынтегральном выражении из $g(\eta)$ и прибавим к нему величину $S_g^2(\eta - y)$, где

$$S_g^2(z) := g(y) + zg'(y) + \frac{z^2}{2}g''(y). \tag{4.2}$$

Теперь производную можно внести под знак интеграла и записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = I_{20}(x,y) + I_{21}(x,y), \quad \text{где}$$

$$I_{20}(x,y) = -\frac{1}{\pi}e^{\alpha x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_0}{\partial x}S_g^2(\eta - y)d\eta, \tag{4.3}$$

$$I_{21}(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\right)^2\frac{\partial K_0}{\partial x}\left[g(\eta) - S_g^2(\eta - y)\right]d\eta,$$

а $K_0 = K_0\left(a\sqrt{x^2 + (\eta - y)^2}\right)$.

Сделаем в (4.3) замену переменной интегрирования $\eta' = \eta - y$. Заметим, что с учетом (4.2) выражение $I_{20}(x,y)$ примет вид

$$I_{20}(x,y) = -\frac{1}{\pi}e^{\alpha x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_0}{\partial x}\left[g(y)+\eta g'(y)+\frac{\eta^2}{2}g''(y)\right]d\eta,$$

где $K_0 = K_0\left(a\sqrt{x^2+\eta^2}\right)$, и легко может быть вычислено. В силу нечетности функции $\eta\frac{\partial K_0}{\partial x}$ интеграл от нее равен нулю. Оставшийся в $I_{20}(x,y)$ интеграл уже был частично ранее вычислен в (3.5). Для вычисления последней его части, интеграла от $\eta^2\frac{\partial K_0}{\partial x}$, воспользуемся формулой из [5, ф. 6.596.3] при $\nu = 1$, $\mu = 1/2$. Получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta^2}{2}\frac{\partial K_0\left(a\sqrt{x^2+\eta^2}\right)}{\partial x}d\eta = -\frac{1}{2a}xe^{-ax}. \tag{4.4}$$

Выполнив в $I_{20}(x,y)$ необходимое дифференцирование, с учетом (4.4) будем иметь

$$I_{20}(x,y) = (a-\alpha)^2e^{-(a-\alpha)x}g(y) + \frac{1}{2a}\left[(a-\alpha)^2x - 2(a-\alpha)\right]e^{-(a-\alpha)x}g''(y). \tag{4.5}$$

Теперь преобразуем $I_{21}(x,y)$ (см. (4.3)). Для этого снова воспользуемся соотношением $\Delta K_0 - a^2K_0 = 0$. После двукратного интегрирования по частям в двух слагаемых, содержащих $\partial^2K_0/\partial\eta^2$, будем иметь

$$\begin{gathered}I_{21}(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha x}\left\{\left[\frac{\partial K_0}{\partial x}+2\alpha K_0\right]\left[g(\eta+y)-S_g^2(\eta)\right]'' - \right.\\ \left. -\left[(a-\alpha)^2\frac{\partial K_0}{\partial x}+2a\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}+a\right)K_0\right]\left[g(\eta+y)-S_g^2(\eta)\right]\right\}d\eta.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Далее, сделаем замену переменной $\eta' = -\eta$ при $\eta < 0$. Так как K_0 и ее производные по x как функции η – четные, то, будучи умноженными на η, становятся нечетными. Поэтому интеграл от каждой из них равен нулю. Отсюда с учетом (3.7), получим следующее представление $I_{21}(x,y)$ из (4.6)

$$I_{21}(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}e^{\alpha x}\left\{\mathfrak{F}_1(x,\eta)\delta_\eta^2g''(y) + \mathfrak{F}_2(x,\eta)\left[\delta_\eta^2g(y)-\eta^2g''(y)\right]\right\}d\eta, \tag{4.7}$$

где

$$\mathfrak{F}_1(z,\eta) = \frac{\partial K_0(z,\eta)}{\partial z}+2\alpha K_0(z,\eta), \quad \mathfrak{F}_2(z,\eta) = -(a-\alpha)^2\frac{\partial K_0}{\partial z}(z,\eta) - 2a\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}+a\right)K_0(z,\eta),$$

а $K_0(z,\eta) = K_0\left(a\sqrt{z^2+\eta^2}\right)$.

Теперь можно переходить к оценке разности

$$V(x,\bar{x},y) := \frac{\partial^2u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2u}{\partial\bar{x}^2}(\bar{x},y) = \left[I_{21}(x,y)-I_{21}(\bar{x},y)\right] + \left[I_{20}(x,y)-I_{20}(\bar{x},y)\right],$$

где x, $\bar{x}$ – две произвольные точки оси Ox, и так же, как раньше, $0 < \bar{x} < x$, а разность $x - \bar{x} = \Delta$. Обозначим

$$V_{2i}(x,\bar{x},y) = I_{2i}(x,y) - I_{2i}(\bar{x}), \quad i = 0,1.$$

Тогда

$$V(x,\bar{x},y) = V_{20}(x,\bar{x},y) + V_{21}(x,\bar{x},y). \tag{4.8}$$

Оценим сначала $V_{20}(x,\bar{x},y)$. Как при оценке $|V_{10}(x,\bar{x})|$ из (3.26), с учетом (4.5), будем иметь

$$|V_{20}(x,\bar{x},y)| \le \frac{c}{\lambda}\Delta^{\lambda}\left\{(a-\alpha)^{2+\lambda}|g|_0 + (a-\alpha)^{1+\lambda}|g|_2\right\}. \tag{4.9}$$

Рассмотрим теперь $V_{21}(x,\bar{x},y)$ (см. (4.7)). Снова, следуя [3, гл. III], представим интеграл по η в виде суммы интегралов по интервалам $[0,\Delta]$ и $[\Delta,\infty)$, затем в интеграле по интервалу $[\Delta,\infty)$, представим разность входящих туда выражений, зависящих от x и $\bar{x}$, в виде интеграла по отрезку $[\bar{x},x]$ от производной по соответствующей переменной. Будем иметь

$$\begin{gathered}
V_{21}(x,\bar{x},y) = V_{211}(x,\bar{x},y) + V_{212}(x,\bar{x},y),\\
V_{211}(x,\bar{x},y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\Delta}\Big\{\Big[e^{\alpha x}\mathfrak{F}_1(x,\eta) - e^{\alpha\bar{x}}\mathfrak{F}_1(\bar{x},\eta)\Big]\delta_\eta^2 g''(y) + \\
+\Big[e^{\alpha x}\mathfrak{F}_2(x,\eta) - e^{\alpha\bar{x}}\mathfrak{F}_2(\bar{x},\eta)\Big]\Big[\delta_\eta^2 g(y) - \eta^2 g''(y)\Big]\Big\}d\eta,\\
V_{212}(x,\bar{x},y) = \frac{1}{\pi}\int_{\Delta}^{\infty}d\eta\int_{\bar{x}}^{x}e^{\alpha z}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)\Big\{\mathfrak{F}_1(z,\eta)\delta_\eta^2 g''(y) + \mathfrak{F}_2(z,\eta)\Big[\delta_\eta^2 g(y) - \eta^2 g''(y)\Big]\Big\}dz.
\end{gathered} \tag{4.10}$$

Дальше поступим так же, как в лемме 3.3 при рассмотрении $V_{11}(x,\bar{x},y)$ (см. (3.27), (3.28)), т.е. для $V_{211}(x,\bar{x},y)$ воспользуемся очевидной оценкой (см. (3.14))

$$\left|\delta_\eta^2 g''(y)\right| \le 2\eta^{\lambda}|g|_{2,\lambda},$$

а для $V_{212}(x,\bar{x},y)$ — также очевидной оценкой

$$\left|\delta_\eta^2 g(y) - \eta^2 g''(y)\right| \le \eta^{2+\lambda}|g|_{2,\lambda}.$$

Получим

$$\begin{gathered}
|V_{211}(x,\bar{x},y)| \le \frac{2}{\pi}|g|_{2,\lambda}\left(\int_0^{\Delta}\eta^{-1+\lambda}d\eta\right)\max_{\substack{0\le r<\infty\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}\Big\{e^{\alpha z}\Big[\eta|\mathfrak{F}_1(z,\eta)| + \eta^3|\mathfrak{F}_2(z,\eta)|\Big]\Big\},\\
|V_{212}(x,\bar{x},y)| \le \frac{\Delta}{\pi}|g|_{2,\lambda}\left(\int_{\Delta}^{\infty}\eta^{-2+\lambda}d\eta\right)\max_{\substack{0\le r<\infty\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}\left\{e^{\alpha z}\left[\eta^2\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)\mathfrak{F}_1(z,\eta)\right| + \eta^4\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)\mathfrak{F}_2(z,\eta)\right|\right]\right\},\\
r = \sqrt{z^2+\eta^2},\quad \eta = r\sin\varphi.
\end{gathered} \tag{4.11}$$

Для вывода окончательных оценок осталось произвести интегрирование по η и оценить максимумы соответствующих функций, являющихся коэффициентами при этих интегралах:

$$\begin{gathered}
(1)\quad \max_{\substack{0\le r<\infty\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}\left|e^{\alpha z}\eta\frac{\partial K_0}{\partial z}\right|,\quad (2)\quad 2\alpha\max_{\substack{0\le r<\infty\eta\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}\eta K_0,\quad (3)\quad (a-\alpha)^2\max_{\substack{0\le r<\infty\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}\left|e^{\alpha z}\eta^3\frac{\partial K_0}{\partial z}\right|,\\
(4)\quad 2a\alpha\max_{\substack{0\le r<\infty\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}\left|e^{\alpha z}\eta^3\left(\frac{\partial}{\partial z}+a\right)K_0\right|,\quad (5)\quad \max_{\substack{0\le r<\infty\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}\left|e^{\alpha z}\eta^2\left(\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)\frac{\partial K_0}{\partial z}\right|,\quad (6)\quad 2\alpha\max_{\substack{0\le r<\infty\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}\left|e^{\alpha z}\eta^2\left(\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)K_0\right|,\\
(7)\quad (a-\alpha)^2\max_{\substack{0\le r<\infty\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}\left|e^{\alpha z}\eta^4\left(\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)\frac{\partial K_0}{\partial z}\right|,\quad (8)\quad 2a\alpha\max_{\substack{0\le r<\infty\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}\left|e^{\alpha z}\eta^4\left(\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}+a\right)K_0\right|.
\end{gathered}$$

Чтобы оценить эти коэффициенты, используем формулы, представляющие указанные выражения в полярных координатах, и оценки необходимых производных функции $K_0\left(a\sqrt{(z^2+\eta^2)}\right)$ или комбинаций этих производных, а затем применим к каждому выражению лемму 3.1 с соответствующими значениями параметров δ и β.

Точнее, при рассмотрении величин (1), (2) и (3) используем формулы из [1, ф. (A.9), (A.10)], содержащие оценки K_0 и ее производной в полярных координатах, что приводит к необходимости оценить выражения

$$\sin\varphi\Big[r^0 + r^{1/2}\Big]e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r},\quad (a-\alpha)^2\sin^3\varphi\Big[r^2 + r^{5/2}\Big]e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r}.$$

Применение леммы 3.1 при соответствующих значениях параметров δ, β доказывает ограниченность величин (1) и (2) постоянной, а выражение (3) оценивается величиной $(a-\alpha)^2\left[c_1\varepsilon^{-1/2}+c_2\varepsilon^{-1}\right]$.

Рассматривая величину (4), используем формулу из [1, ф. (B.5)], выражающую оцениваемую функцию в полярных координатах, а затем применяем оценки из [1, ф. (A.6), (A.10)]. Это приводит нас к необходимости оценить величину

$$\left[\sin^3\varphi r^{3/2}+\sin^5\varphi r^{5/2}\right]e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r},$$

что и достигается применением леммы 3.1 при соответствующих значениях параметров δ, β и доказывает ограниченность величины (4) постоянной.

Для оценки величины (5), после очевидного преобразования $\alpha = a-(a-\alpha)$, используем формулу (3.2), выражающую оцениваемую величину в полярных координатах, а затем применяем оценки из [1, ф. (A.3), (A.9), (A.6), (A.10)]. В результате приходим к необходимости оценить выражение

$$\left\{\sin^2\varphi\left[r^0+r^{1/2}+(a-\alpha)(r+r^{3/2})\right]+\sin^4\varphi r^{3/2}\right\}e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r}.$$

Применение леммы 3.1 при соответствующих δ, β дает оценку $\left[c_3+c_4(a-\alpha)\varepsilon^{-1}\right]$.

Аналогично поступаем при рассмотрении величины (6). Здесь мы также после очевидного преобразования $\alpha = a-(a-\alpha)$, использования формулы из [1, ф. (B.5)] для представления оцениваемой величины в полярных координатах и оценок из [1, ф. (A.6), (A.10)] сводим первоначальную оценку к оценке величины выражения

$$\left\{\sin^2\varphi\left[r^{1/2}+(a-\alpha)r^{3/2}\right]+\sin^4\varphi r^{3/2}\right\}e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r}.$$

Снова применяем лемму 3.1 с необходимыми δ, β, что дает оценку (6) величиной $\left[c_5+c_6(a-\alpha)\varepsilon^{-1/2}\right]$.

Исследование величины (7) аналогично уже проведенному исследованию величины (5), что приводит к необходимости оценить выражение

$$(a-\alpha)^2\left\{\sin^4\varphi\left[r^2+r^{3/2}+(a-\alpha)(r^{3/2}+r^{7/2})\right]+\sin^6\varphi r^{7/2}\right\}e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r}.$$

Применяя снова лемму 1, имеем в этом случае оценку $\left[c_7+c_8(a-\alpha)^2\varepsilon^{-1/2}+c_9(a-\alpha)^3\varepsilon^{-1}+ + c_{10}(a-\alpha)^3\varepsilon^{-3/2}\right]$.

И, наконец, поступая аналогично при оценке выражения (8), т.е. в очередной раз заменяем $\alpha = a-(a-\alpha)$, используем формулы из [1, ф. (B.6), (B.5)], оценки из [1, ф. (A.7), (A.9), (A.10)] и применяем лемму 3.1 при соответствующих каждому слагаемому вида $\sin^\delta\varphi r^\beta e^{-(a-\alpha\cos\varphi)r}$ значениях δ, β, приходим к оценке выражения (8) величиной $\left[c_{11}+c_{12}(a-\alpha)\varepsilon^{-1/2}\right]$.

Таким образом, после выполнения в (4.11) интегрирования по η, с учетом (2.7), получим

$$|V_{21}(x,\bar{x},y)| \le c\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\Delta^\lambda|g|_{2,\lambda}. \tag{4.12}$$

Принимая во внимание (4.8), (4.10) и объединяя оценки $V_{20}(x,\bar{x},y)$ из (4.9) и $V_{21}(x,\bar{x},y)$ из (4.12), приходим к утверждаемой в лемме оценке (4.1). Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Для производных $\partial^2u/\partial y^2$ и $\partial^2u/\partial x\partial y$ решения задачи* (2.4), (2.5) *справедливы оценки*

$$\left|\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right|_{C_x^\lambda} \le c\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{(1-\lambda)}|g|_{2,\lambda}+\varepsilon^{1+\lambda}|g|_1\right\}. \tag{4.13}$$

$$\left|\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right|_{C_x^\lambda} \le c\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{(1-\lambda)}|g|_{2,\lambda}+\varepsilon^{\lambda}|g|_2\right\}. \tag{4.14}$$

Доказательство первой из этих оценок следует из оценки (3.18), если в последней заменить $g(y)$ на $g'(y)$, так как смешанная производная совпадает с производной по x решения той же задачи (2.4), (2.5), но с правой частью $g'(y)$ граничного условия (2.5) вместо $g(y)$. Аналогично вторая оценка следует из (3.3) при замене в ней $g(y)$ на $g''(y)$.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Суммируем оценки, полученные в разд. 1–4 (см. леммы 3.2–4.2).

Лемма 5.1. *Для решения* $U(X,Y)$ *задачи* (2.1), (2.2) *справедливы оценки*

$$\|U\|_{C_x^{k,\lambda}} \le c\|\mathcal{G}\|_{C^{k,\lambda}}, \quad k = 0, 1, 2. \tag{5.1}$$

Доказательство. Перепишем требующие доказательства неравенства (5.1) более подробно в нерастянутых переменных.

Имеем: при $k = 1$

$$\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{C_x^\lambda} + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{C_x^\lambda}\right) + \varepsilon^{1+\lambda}|u|_C \le c\left(|g|_{C^{1,\lambda}} + \varepsilon^\lambda |g|_{C^1} + \varepsilon^{1+\lambda}|g|_C\right),$$

при $k = 2$

$$\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{C_x^\lambda} + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{C_x^\lambda} + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{C_x^\lambda}\right) + \varepsilon^{2+\lambda}|u|_C + \varepsilon^{1+\lambda}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_C + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_C\right) +$$
$$+ \varepsilon^\lambda\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_C + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_C + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_C\right) \le \left(|g|_{C^{2,\lambda}} + \varepsilon^\lambda |g|_{C^2} + \varepsilon^{1+\lambda}|g|_{C,1} + \varepsilon^{2+\lambda}|g|_C\right).$$

Для доказательства этих оценок используем результаты лемм 3.2–4.2 (см. формулы (3.3), (3.18), (3.34), (4.1), (4.13), (4.14)), а также интерполяционные неравенства (см., например, [2, лемма 1]) как для оценки самого решения и его производных в C, так и для функции $g(y)$:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_C \le \frac{t^\lambda}{(1+\lambda)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{C_x^\lambda} + 2t^{-1}\|u\|_C, \quad t \in (0,\infty) - \text{любое}, \tag{5.2}$$

$$|u|_{C_x^\lambda} \le 2^{1-\lambda}\left[\frac{\lambda}{(1+\lambda)}\varepsilon^{-1}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{C_x^\lambda} + (1-\lambda)(1+\lambda)\varepsilon^\lambda\|u\|_C\right]. \tag{5.3}$$

Из (5.2) и (5.3) для $g(y)$ следует, что

$$|g|_{C^\lambda} \le 2^{1-\lambda}\left[\frac{\lambda}{1+\lambda}\varepsilon^{-1}|g|_{C^{1,\lambda}} + (1-\lambda)(1+\lambda)\varepsilon^\lambda|g|_C\right], \quad |g|_{C^2} \le \frac{\varepsilon^{-\lambda}}{1+\lambda}|g|_{C^{2,\lambda}} + 2\varepsilon\|g\|_{C^1}. \tag{5.4}$$

Затем, учитывая очевидные неравенства

$$|u|_C \le |g|_C, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_C \le |g'|_C \le |g|_{C^1},$$

после возвращения к исходным (нерастянутым переменным, см. (2.3)) $X = \varepsilon x$, $Y = \varepsilon y$, учитывая, что $0 < \varepsilon < 1$, и оценки (5.2)–(5.4), придем к утверждениям (5.1) леммы. Лемма доказана.

Замечание 1. Оценки решения $U(X,Y)$ задачи (2.1), (2.2) в $C_y^{k,\lambda}$ ($k = 0, 1, 2$) получаются аналогично оценкам в $C_x^{k,\lambda}$, но мы их использовать не будем.

Справедливость утверждений (2.8) теоремы 1 следует теперь из (5.1) и полученных в [4] оценок решения в $C_y^{k,\lambda}$ при $k = 0, 1, 2$. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев В.Б.* Оценки в классах Гёльдера регулярной составляющей решения сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 12. С. 1983–2020.
2. *Андреев В.Б.* К оценке гладкости регулярной составляющей решения одномерного сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 1. С. 22–33.
3. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1971.
4. *Naughton A., Kellogg R.B., Stynes M.* Regularity and derivative bounds for a convection-diffusion Problem with a Neumann outflow condition // J. Differential Equations V. 247. 2009. P. 2495–2516.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.