ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 2, с. 185–202

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2019 г. М. Х. Бештоков

(360004 Нальчик, ул. Шортанова, 89А, ИПМатем и автоматизации КБНЦ РАН, Россия)

e-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.01.2018 г.
Переработанный вариант 18.08.2018 г.

Работа посвящена начально-краевым задачам для уравнения соболевского типа с дробной производной Герасимова-Капуто с эффектом памяти. Для решения рассматриваемых задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи. Библ. 30. Табл. 4.

Ключевые слова: краевые задачи, априорная оценка, уравнение соболевского типа, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Герасимова-Капуто, уравнения с памятью.

DOI: 10.1134/S0044466919020054

ВВЕДЕНИЕ

Среди неклассических уравнений математической физики (см. [1]) обширную область составляют уравнения соболевского типа (см. [2])

$$\frac{\partial}{\partial t}(A(u)) + B(u) = 0,$$

где $A(u)$ и $B(u)$ – эллиптические операторы.

Уравнения такого вида известны еще как вырожденные уравнения (см. [3]), псевдопараболические уравнения (см. [4]), уравнения, неразрешенные относительно старшей производной (см. [5]) и даже уравнения не типа Коши-Ковалевской (см. [6], [7]).

Систематическое исследование уравнений такого рода началось с середины прошлого века в работах С.Л. Соболева. Термин уравнения соболевского типа ввел в обиход Р.Е. Шовальтер [8].

В [9] рассматривается линейное уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u,$$

моделирующее динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде, является моделью процесса влагопереноса в почве (см. [10]–[12]) и процесса теплопроводности в среде с двумя температурами (см. [13], [14]).

В настоящее время стало очевидным, что при решении многих задач в физике, биологии часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы, примерами которых могут служить сильно пористые среды, каковым, например, является почвогрунт. При решении таких задач возникает необходимость изучения краевых задач для дифференциальных уравнений с дробной производной (см. [15]–[19]).

Численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы (см. [20]–[24]).

В настоящей работе проводится численное исследование начально-краевых задач для уравнения соболевского типа с дробной производной Герасимова-Капуто, в котором неизвестная функция входит в дифференциальное выражение и, вместе с тем, фигурирует под знаком интеграла. Возникновение интегрального слагаемого в уравнении связано с необходимостью учитывать зависимость мгновенных значений характеристик описываемого объекта от их соответствующих предыдущих значений, т.е. влияние на текущее состояние системы ее предыстории. В современной литературе подобные технические и природные системы называют системами с последействием, наследственностью или динамической памятью.

Для решения рассматриваемых начально-краевых задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи.

1. ПОСТАНОВКА ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T = \{(x,t)\text{: } 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения соболевского типа с дробной производной Герасимова-Капуто порядка α

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^t p(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x,t), \tag{1.1}$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \le T,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{1.3}$$

где

$$0 < c_0 \le k(x,t), \quad \eta(x) \le c_1, \quad |r(x,t), r_x(x,t), k_x(x,t), p(x,t,\tau)| \le c_2,$$

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau,$$

есть дробная производная в смысле Герасимова-Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, c_i, $i = 0,1,2$ – положительные постоянные числа.

Следует отметить, что эта конструкция была введена итальянским механиком М. Капуто в 1967 г. [25]. Поэтому за границей ее называют дробной производной Капуто. Хотя правильнее называть дробной производной Герасимова-Капуто, так как в 1948 г. советский механик А.Н. Герасимов уже рассматривал подобные выражения в своей работе [26].

Производная

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = D_{0t}^{\alpha} u - \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}}, \quad D_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{ud\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$$

есть дробная производная в смысле Римана-Лиувилля порядка α.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1.1)–(1.3) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающей нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

По ходу изложения будем также использовать положительные постоянные числа M_i, $i = 1, 2, \ldots$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

2. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Для получения априорной оценки решения задачи (1.1)–(1.3) в дифференциальной форме введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$(a,b) = \int_0^l ab dx, \quad (a,a) = \|a\|_0^2, \quad \text{где} \quad a, b - \text{заданные на } [0,l] \text{ функции.}$$

Умножим уравнение (1.1) скалярно на u

$$(\partial_{0t}^{\alpha} u, u) = ((ku_x)_x, u) + \left(\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x, u\right) + (ru_x, u) + \left(\int_0^t pud\tau, u\right) + (f, u). \tag{2.1}$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (2.1), пользуясь неравенством Коши (см. [27, с. 100])

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}u,u\right)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^l u\int_0^t u_\tau(x,\tau)(t-\tau)^{-\alpha}d\tau. \tag{2.2}$$

Справедлива (см. [23])

Лемма 1. *Для любой абсолютно непрерывной на* $[0,T]$ *функции* $v(t)$ *справедливо неравенство*

$$v(t)\partial_{0t}^{\alpha}v(t)\geq\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}v^2(t),\quad 0<\alpha<1.$$

Пользуясь леммой 1, из (2.2) получим

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}u,u\right)\geq\frac{1}{2}\left(1,\partial_{0t}^{\alpha}u^2\right)=\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2, \tag{2.3}$$

$$((ku_x)_x,u)=\int_0^l u(ku_x)_x dx=uku_x\big|_0^l-\int_0^l ku_x^2dx, \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\left(\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x,u\right)=\int_0^l u\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x dx=u\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)\big|_0^l-\int_0^l\eta(x)u_x\partial_{0t}^{\alpha}u_x dx\leq\\ \leq u\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)\big|_0^l-\frac{1}{2}\int_0^l\eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx,\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$(ru_x,u)=\int_0^l ru_xudx\leq|r|\left(\varepsilon\|u\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|u_x\|_0^2\right)\leq\frac{c_2}{2}\left(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\right). \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}\left(\int_0^t pud\tau,u\right)=\int_0^l\left(\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}\left(\int_0^t pud\tau\right)^2\right)dx\leq\frac{1}{2}\int_0^l u^2dx+\frac{1}{2}\int_0^l\left(\int_0^t p^2d\tau\int_0^t u^2d\tau\right)dx\leq\\ \leq\frac{1}{2}\|u\|_0^2+\frac{c_2T}{2}\int_0^l\int_0^t u^2d\tau dx\leq\frac{1}{2}\|u\|_0^2+\frac{c_2T}{2}\int_0^t\|u\|_0^2d\tau,\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$(f,u)=\int_0^l fudx\leq\frac{1}{2}\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\|f\|_0^2. \tag{2.8}$$

Учитывая преобразования (2.2)–(2.8), из (2.1) находим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\int_0^l\eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx+c_0\|u_x\|_0^2\leq\\ \leq u\Pi(x,t)\big|_0^l+M_1\left(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\right)+M_2\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+\frac{1}{2}\|f\|_0^2.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Перепишем (2.9) с учетом (1.2), тогда получим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\int_0^l\eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx+\|u_x\|_0^2\leq M_3\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2+M_4\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+M_6\|f\|_0^2, \tag{2.10}$$

где $\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2=\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2$.

Учитывая (1.2), имеем оценку

$$\|u\|_0^2\leq\frac{l^2}{2}\|u_x\|_0^2. \tag{2.11}$$

В силу (2.11) из (2.10) находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\int_0^l \eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx+\|u_x\|_0^2\le M_3\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2+M_5\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau+M_6\|f\|_0^2. \tag{2.12}$$

Оценим $\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau$, для чего перепишем (2.12) в виде

$$\|u_x\|_0^2\le M_5\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau+F,$$

где

$$F=M_4\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2+M_6\|f\|_0^2. \tag{2.13}$$

Применяя лемму Гронуола [28] к (2.13), получаем

$$\int_0^t\|u_x\|_0^2\le M_6\int_0^t Fd\tau. \tag{2.14}$$

Учитывая (2.14), из (2.12) получаем

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\int_0^l \eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx+\|u_x\|_0^2\le M_7\int_0^t\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2d\tau+M_8\int_0^t\|f\|_0^2d\tau. \tag{2.15}$$

Применяя к обеим частям (2.15), оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, находим

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\le M_7D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2d\tau+M_9\left(D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|f\|_0^2d\tau+\|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\right). \tag{2.16}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (2.16) следующим образом

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_0^\tau\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2ds=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2\int_s^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2\left(-\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha}\bigg|_s^t\right)ds=\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha}\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha}\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2d\tau\le\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-\tau)\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\le\frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2.$$

В результате получаем

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2d\tau\le\frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2. \tag{2.17}$$

С помощью (2.17) из (2.16) находим

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\le M_{10}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2+M_{12}\left(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2+\|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\right). \tag{2.18}$$

Справедлива (см. [23]) следующая

Лемма 2. *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0,\ T]$ неравенству*

$$\partial_{0t}^{\alpha}y(t)\le c_1y(t)+c_2(t),\quad 0\le\alpha\le 1,$$

где $c_1>0$, $c_2(t)$ — суммируемая на $[0,T]$ неотрицательная функция. Тогда

$$y(t)\le y(0)E_{\alpha}(c_1t^{\alpha})+\Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(c_1t^{\alpha})D_{0t}^{-\alpha}c_2(t),$$

где

$$E_{\alpha}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)},\quad E_{\alpha,\mu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}$$

суть функции Миттаг-Леффлера.

С помощью леммы 2 оценим первое слагаемое в правой части (2.18)

$$D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} \le M_{13}\left(D_{0t}^{-2\alpha}\|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \tag{2.19}$$

Так как для всей неотрицательной интегрируемой на $[0,T]$ функции $g(t)$ справедливо неравенство

$$D_{0t}^{-2\alpha} g(t) \le \frac{t^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} D_{0t}^{-\alpha} g(t), \tag{2.20}$$

то из (2.18) с учетом (2.19), (2.20) находим искомую априорную оценку

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \le M\left(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right), \tag{2.21}$$

где M – положительная постоянная, зависящая только от входных данных задачи (1.1)–(1.3).

Теорема 1. *Если* $k(x,t) \in C^{1,0}(Q_T)$, $\eta(x) \in C^1[0,l]$, $r(x,t), q(x,t), f(x,t), \rho(x,t,\tau) \in C(Q_T)$, $u(x,t) \in C^{(2,0)}(Q_T) \cap C^{(1,0)}(\bar{Q}_T)$, $\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) \in C(Q_T)$ *и выполнены условия* (1.4), *тогда для решения задачи* (1.1)–(1.3) *справедлива априорная оценка* (2.21), *из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части в смысле нормы*

$$\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|_1^2 = \|u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2,$$

где

$$D_{0t}^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}.$$

3. УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Для решения задачи (1.1)–(1.3) применим метод конечных разностей. Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащие односторонние производные, учитывающие знак $r(x,t)$. Для этого рассмотрим вместо уравнения (1.1) следующее уравнение с возмущенными коэффициентами

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \varkappa(ku_x)_x + \partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x + ru_x + \int_0^t p(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x,t), \tag{3.1}$$

где $\varkappa = \dfrac{1}{1+R}$, $R = \dfrac{0.5h|r|}{k}$ – разностное число Рейнольдса.

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)–(1.3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \varkappa_i^j\left(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\left(\gamma_i y_{\bar{x}}\right)_{x,i} + b_i^{-j}a_i^j y_{\bar{x},i} + b_i^{+j}a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{i,s}^j y_i^s\bar{\tau} + \varphi_i^j, \quad (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{3.2}$$

$$y_0^{(\sigma)} = y_N^{(\sigma)} = 0, \tag{3.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{3.4}$$

где

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum\nolimits_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$$

есть дискретный аналог дробной производной Герасимова-Капуто порядка α, $0<\alpha<1$ (см. [24]),

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha}, \quad l \ge 1,$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\left[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\right] - \frac{1}{2}\left[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\right], \quad l \ge 1,$$

$$\text{при} \quad j=0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j>0,\quad c_s^{(\alpha,\sigma)}=\begin{cases}a_0^{(\alpha,\sigma)}+b_1^{(\alpha,\sigma)}, & s=0,\\ a_s^{(\alpha,\sigma)}+b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)}-b_s^{(\alpha,\sigma)}, & 1\le s\le j-1,\\ a_j^{(\alpha,\sigma)}-b_j^{(\alpha,\sigma)}, & s=j,\end{cases}\quad \overline{\tau}=\begin{cases}\dfrac{\tau}{2}, & j=0,m,\\ \tau, & j\neq 0,m,\end{cases}$$

$$a_ij=k\left(x_{i-0.5},t^{j+\sigma}\right),\quad \gamma_i=\eta(x_{i-0.5}),\quad b_i^j=\frac{r\left(x,t^{j+\sigma}\right)}{k\left(x_i,t^{j+\sigma}\right)},\quad \varphi_i^j=f\left(x_i,t^{j+\sigma}\right),\quad \sigma=1-\frac{\alpha}{2},$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)}>\frac{1-\alpha}{2}\ge(s+\sigma)^{-\alpha}>0,\quad y^{(\sigma)}=\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)y^j,\quad p_{i,s}^j=p\left(x_i,t^{j+\sigma},\tau_{s+\sigma}\right),\quad \rho_{i,s}^j=p_{i,s}^{j+\sigma}.$$

Априорную оценку найдем методом энергетических неравенств, для этого введем скалярные производные и норму:

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{N-1}u_iv_ih,\quad (u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_ih,\quad (u,u)=\left(1,u^2\right)=\|u\|_0^2.$$

Умножим теперь (3.2) скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\begin{gathered}\left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y,y^{(\sigma)}\right)=\left(\varkappa\left(ay_{\overline{x}}^{(\sigma)}\right)_x,y^{(\sigma)}\right)+\left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(\gamma_iy_{\overline{x}})_x,y^{(\sigma)}\right)+\left(b^-ay_{\overline{x}}^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)+\\ +\left(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)+\left(\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho_{i,s}^jy_i^s\overline{\tau},y^{(\sigma)}\right)+\left(\varphi,y^{(\sigma)}\right).\end{gathered}\tag{3.5}$$

Справедлива (см. [24]) следующая

Лемма 3. *Для любой функции $y(t)$, заданной на сетке $\overline{\omega}_\tau$, справедливо неравенство*

$$y^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y\ge\frac12\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\left(y^2\right).$$

Оценим суммы, входящие в (3.5), с учетом (3.3) и леммы 3:

$$\left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y,y^{(\sigma)}\right)\ge\frac12\left(1,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y^2\right)\ge\frac12\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|y\|_0^2.\tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}\left(\varkappa(ay_{\overline{x}}^{(\sigma)})_x,y^{(\sigma)}\right)=\varkappa ay_{\overline{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big|_0^N-\left(ay_{\overline{x}}^{(\sigma)},(\varkappa y^{(\sigma)})_{\overline{x}}\right]=-\left(a\varkappa_{\overline{x}},y_{\overline{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right]-\left(a\varkappa^{(-1)},(y_{\overline{x}}^{(\sigma)})^2\right]\le\\ \le-\frac{1}{(1+hM_1)}\left(a\varkappa,(y_{\overline{x}}^{(\sigma)})^2\right]+M_1\left(\left\|y^{(\sigma)}\right\|_0^2+\left\|y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\right]\!\Big|_0^2\right);\end{gathered}\tag{3.7}$$

$$\left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(\gamma y_{\overline{x}})_x,y^{(\sigma)}\right)=y^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(\gamma y_{\overline{x}})\Big]_0^N-\left(\gamma,y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_{\overline{x}})\right]\le-\frac{c_0}{2}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|y_{\overline{x}}]|_0^2;\tag{3.8}$$

$$\left(b^-ay_{\overline{x}}^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)+\left(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)\le M_2\left(\left\|y^{(\sigma)}\right\|_0^2+\left\|y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\right]\!\Big|_0^2\right);\tag{3.9}$$

$$\begin{gathered}\left(\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho_{i,s}^jy_i^s\overline{\tau},y^{(\sigma)}\right)\le\left(\frac12,(y^{(\sigma)})^2\right)+\left(\frac12,\left(\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho_{i,s}^jy_i^s\overline{\tau}\right)^2\right)\le\frac12\left\|y^{(\sigma)}\right\|_0^2+\left(\frac12,\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho_{i,s}^j\sum_{s=0}^{j+\frac12}y_s^2\overline{\tau}\right)\le\\ \le\frac12\left\|y^{(\sigma)}\right\|_0^2+M_3\sum_{s=0}^{j+\frac12}\left(1,y_s^2\right)\overline{\tau}\le\frac12\left\|y^{(\sigma)}\right\|_0^2+M_3\sum_{s=0}^{j+\frac12}\left\|y^s\right\|_0^2\overline{\tau};\end{gathered}\tag{3.10}$$

$$\left(\varphi,y^{(\sigma)}\right)\le\frac12\left\|y^{(\sigma)}\right\|_0^2+\frac12\|\varphi\|_0^2.\tag{3.11}$$

Принимая во внимание преобразования (3.6)–(3.11), из (3.5) находим

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|y\|_{W_2^1(0,l)}^2+\left\|y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\right]\!\Big|_0^2\le M_4\left\|y^{(\sigma)}\right\|_{W_2^1(0,l)}^2+M_5\sum_{s=0}^{j+\frac12}\left\|y^s\right\|_0^2\overline{\tau}+M_6\|\varphi\|_0^2,\tag{3.12}$$

где $\|y\|_{W_2^1(0,l)}^2=\|y\|_0^2+\left\|y_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2$.

Учитывая, что

$$\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \left\|y^s\right\|_0^2 \overline{\tau} = \sum_{s=0}^{j} \left\|y^s\right\|_0^2 \overline{\tau} + 0.5\tau \left\|y^j\right\|_0^2,$$

перепишем (3.12) в другой форме:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 \le M_7^{\sigma} \left\|y^{j+1}\right\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_8^{\sigma} \left\|y^j\right\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_9 F^j, \tag{3.13}$$

где

$$F^j = \sum_{s=0}^{j} \left\|y^s\right\|_0^2 \overline{\tau} + \|\varphi\|_0^2.$$

Справедлива (см. [29]) следующая

Лемма 4. *Пусть* $\{p_j\}$ *— последовательность, удовлетворяющая следующим условиям*:

$$p_0 = 1, \quad \overline{\sigma}^{1-\alpha} p_j = \sum_{s=1}^{j} \left(c_{s-1}^{\alpha,\sigma} - c_s^{\alpha,\sigma}\right) p_{j-s}, \quad j \ge 1,$$

тогда

$$0 < p_j < 1, \quad \sum_{s=k}^{j} p_{j-s} c_{s-k}^{\alpha,\sigma} = \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 1 \le k \le j, \tag{3.14}$$

где $\overline{\sigma}^{1-\alpha} = \frac{1}{2-\alpha}\left((1+\sigma)^{2-\alpha} - \sigma^{2-\alpha}\right) - \frac{1}{2}\left((1+\sigma)^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha}\right)$.

Доказательство. Следуя [29], докажем равенство (3.14). Тогда, учитывая, что $c_s < c_{s-1}$ для $s \ge 1$, получаем

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_s^{\alpha,\sigma} < \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s-1}^{\alpha,\sigma}, \tag{3.15}$$

где

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s-1}^{\alpha,\sigma} = \sum_{s=0}^{j} p_{j-s} c_s^{\alpha,\sigma}. \tag{3.16}$$

Из (3.15), (3.16) находим

$$\sum_{s=j}^{j} p_{j-s} c_{s-j}^{\alpha,\sigma} = p_0 c_0 = \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \tag{3.17}$$

где

$$\overline{\sigma}^{1-\alpha} = \begin{cases} \sigma^{1-\alpha}, & j = 0, \\ \frac{1}{2-\alpha}\left((1+\sigma)^{2-\alpha} - \sigma^{2-\alpha}\right) - \frac{1}{2}\left((1+\sigma)^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha}\right), & j \ge 1, \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_s^{\alpha,\sigma} < \sum_{s=0}^{j} p_{j-s} c_s^{\alpha,\sigma} = p_0 c_0 = \overline{\sigma}^{1-\alpha}. \tag{3.18}$$

Учитывая (3.17), (3.18), получаем

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s-1}^{\alpha,\sigma} = \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_s^{\alpha,\sigma} < \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} \left(c_{s-1}^{\alpha,\sigma} - c_s^{\alpha,\sigma}\right) < \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \\ \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_s^{\alpha,\sigma} < \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_s^{\alpha,\sigma} + p_j c_0, \quad p_j c_0 > 0, \quad c_0 = \overline{\sigma}^{1-\alpha}. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Из (3.16) находим

$$c_0 p_j = \sum_{s=1}^{j} \left(c_{s-1}^{\alpha,\sigma} - c_s^{\alpha,\sigma}\right) p_{j-s}.$$

Из (3.18), (3.19) получаем

$$0 < p_j c_0 < \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 0 < p_j < 1.$$

Пусть $s = l + k - 1$, тогда с учетом (3.17) получим

$$\sum_{s=k}^{j} p_{j-s} c_{s-k}^{\alpha,\sigma} = \sum_{l=1}^{j-k+1} p_{j-k+1-l} c_{l-1}^{\alpha,\sigma} = \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 1 \le k \le j.$$

Лемма доказана.

Справедливы следующие

Лемма 5. *Пусть выполнено* (3.14), *тогда для* $m = 1, 2, \ldots$ *получим*

$$\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(1+(m-1)\alpha)} \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} s^{(m-1)\alpha} \le \frac{\overline{\sigma}^{1-\alpha} j^{m\alpha}}{\Gamma(1+m\alpha)}. \tag{3.20}$$

Лемма 5 доказывается аналогично лемме 3.2 (см. [29]).

Лемма 6. *Пусть* $\vec{e} = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}} \in R^j$ *и*

$$J = 2\overline{\sigma}^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)\lambda\tau^{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & p_1 & \ldots & p_{j-2} & p_{j-1} \\ 0 & 0 & \ldots & p_{j-3} & p_{j-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{j \times j}$$

и выполнено (3.20), *тогда получим*

$$J^i = 0, \quad i \ge j,$$

$$J^m \vec{e} \le \frac{1}{\Gamma(1+m\alpha)} \left(\left(2\lambda t_j^{\alpha}\right)^m, \left(2\lambda t_{j-1}^{\alpha}\right)^m, \ldots, \left(2\lambda t_1^{\alpha}\right)^m \right)^{\mathrm{T}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\sum_{s=0}^{i} J^s \vec{e} = \sum_{s=0}^{j-1} J^s \vec{e} \le \left(E_{\alpha}\left(2\lambda t_j^{\alpha}\right), E_{\alpha}\left(2\lambda t_{j-1}^{\alpha}\right), \ldots, E_{\alpha}\left(2\lambda t_1^{\alpha}\right) \right)^{\mathrm{T}}, \quad i \ge j.$$

Лемма 6 доказывается аналогично лемме 3.3 из [29].

Лемма 7. *Предположим, что неотрицательные последовательности* y^j, φ^j, $j = 0, 1, 2, \ldots$ *удовлетворяют неравенству*

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y^j \le \lambda_1 y^{j+1} + \lambda_2 y^j + \varphi^j, \quad j \ge 1,$$

где $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$ *— константы, тогда существует такое* τ_0, *что если* $\tau \le \tau_0$, *то*

$$y^{j+1} \le 2\left(y^0 + \frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \le j' \le j} \varphi^{j'} \right) E_{\alpha}\left(2\lambda t_j^{\alpha}\right), \quad 1 \le j \le j_0,$$

где $E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$ *— функция Миттаг-Леффлера*, $\lambda = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2 + 2^{1-\alpha}}$.

Лемма 7 доказывается на основании лемм 4–6 аналогично лемме 3.1 из [29].

На основании леммы 7 из (3.13) получаем

$$\left\| y^{j+1} \right\|_{W_2^1(0,l)}^2 \le M_{10} \left(\left\| y^0 \right\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \le j' \le j} F^{j'} \right), \tag{3.21}$$

где M_{10} — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из (3.21) получим

$$\left\| y^{j+1} \right\|_{W_2^1(0,l)}^2 \le M_{11} \left(\left\| y^0 \right\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \max_{0 \le j' \le j} \left(\sum_{s=0}^{j'} \left\| y^s \right\|_0^2 \overline{\tau} + \left\| \varphi^{j'} \right\|_0^2 \right) \right). \tag{3.22}$$

Введя обозначение $g^j = \max\limits_{0\le j'\le j}\left\|y^{j'}\right\|_0^2$, с учетом $\|y\|^2_{W_2^1(0,l)} = \|y\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2$ из (3.22) получим

$$g^{j+1} \le M_{12}\sum_{s=0}^{j} g^s\overline{\tau} + M_{13}F_1^j, \tag{3.23}$$

где

$$F_1^j = \left\|y^0\right\|^2_{W_2^1(0,l)} + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\le j'\le j}\left\|\varphi^{j'}\right\|_0^2.$$

На основании леммы 4 (см.[30, с. 171]) из (3.23) получаем

$$\left\|y^{j+1}\right\|_0^2 \le M\left(\left\|y^0\right\|^2_{W_2^1(0,l)} + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\le j'\le j}\left\|\varphi^{j'}\right\|_0^2\right), \tag{3.24}$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.4), *тогда существует такое* $\tau_0\left(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma\right)$*, что если* $\tau \le \tau_0\left(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma\right)$, *то для решения разностной задачи* (3.2)–(3.4) *справедлива априорная оценка* (3.24), *из чего следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы* (3.2)–(3.4) *по начальным данным и правой части*.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1.1)–1.3) $y(x_i,t_j) = y_i^j$ – решение разностной задачи (3.2)–(3.4). Для оценки точности разностной схемы (3.2)–(3.4) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (3.2)–(3.4), получаем задачу для функции z

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} z = \varkappa_i^j\left(a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_i z_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j}a_i^j z_{\bar{x},i} + b_i^{+j}a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{i,s}^j z_i^s\overline{\tau} + \Psi_i^j, (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{3.25}$$

$$z_0^{(\sigma)} = z_N^{(\sigma)} = 0, \tag{3.26}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{3.27}$$

где $\Psi = O(h^2+\tau^2)$ – погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) разностной схемой (3.2)–(3.4) в классе решения $u = u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.4).

Применяя априорную оценку (3.24) к решению задачи (3.25)–(3.27), получаем неравенство

$$\left\|z^{j+1}\right\|_0^2 \le M\max_{0\le j'\le j}\left\|\Psi^{j'}\right\|_0^2, \tag{3.28}$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (3.28) следует сходимость решения разностной задачи (3.2)–(3.4) к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) в смысле нормы $\left\|z^{j+1}\right\|_0^2$ на каждом слое так, что существует такое $\tau_0\left(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma\right)$, что при $\tau \le \tau_0\left(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma\right)$ справедлива оценка

$$\left\|y^{j+1} - u^{j+1}\right\|_0 \le M\left(h^2 + \tau^2\right).$$

4. ПОСТАНОВКА ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим теперь третью краевую задачу для уравнения (1.1)

$$\Pi(0,t) = \beta_1(t)u(0,t) - \mu_1(t), \quad -\Pi(l,t) = \beta_2(t)u(l,t) - \mu_2(t), \tag{4.1}$$

где

$$0 < c_0 \le k, \quad \eta \le c_1, \quad \left|\beta_1, \beta_2, r, q, r_x, k_x, \rho\right| \le c_2, \quad \Pi(x,t) = k(x,t)u_x + \partial^\alpha_{0t}\left(\eta u_x\right). \tag{4.2}$$

Умножим уравнение (1.1) скалярно на u:

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}u,u\right)=\left(\left(ku_x\right)_x,u\right)+\left(\partial_{0t}^{\alpha}\left(\eta u_x\right)_x,u\right)+\left(ru_x,u\right)+\left(\int_0^t pud\tau,u\right)+\left(f,u\right). \quad (4.3)$$

Повторяя рассуждения (2.1)–(2.9), из (4.3) получаем

$$\frac{1}{2}\partial_{ot}^{\alpha}\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\int_{-}^{l}\eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx+c_0\|u_x\|_0^2\le u\Pi(x,t)\big|_0^l+M_1\left(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\right)+M_2\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+\frac{1}{2}\|f\|_0^2. \quad (4.4)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (4.3), тогда получим

$$\begin{gathered}u\Pi(x,t)\big|_0^l=\Pi(l,t)u(l,t)-\Pi(0,t)u(0,t)=u(l,t)\left(\mu_2(t)-\beta_2(t)u(l,t)\right)+\\+u(0,t)\left(\mu_1(t)-\beta_1(t)u(0,t)\right)=-\beta_2(t)u^2(l,t)+\mu_2(t)(l,t)-\beta_1(t)u^2(0,t)+\mu_1(t)u(0,t)\le\\\le M_3\left(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\right)+M_4\left(\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\right).\end{gathered} \quad (4.5)$$

Учитывая (4.5), из (4.4) получаем

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\int_0^l\eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx+\|u_x\|_0^2\le M_5\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2+M_2\int_0^t\|u\|_0^2\,d\tau+M_6\left(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\right), \quad (4.6)$$

где $\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2=\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2$.

Применяя к обеим частям неравенства (4.6) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$ и повторяя рассуждения (2.16)–(2.21), из (4.6) получаем искомую априорную оценку

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\le M\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\right)+\ge\|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\right), \quad (4.7)$$

где M – положительная постоянная, зависящая от входных данных задачи (1.1), (4.1), (1.3), $D_{0t}^{-\alpha}u=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ – дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$.

Теорема 3. *Если* $k(x,t)\in C^{1,0}(\bar{Q}_T)$, $\eta(x)\in C^1[0,l]$, $r(x,t),q(x,t),f(x,t),\rho(x,t,\tau)\in C(\bar{Q}_T)$, $u(x,t)\in C^{(2,0)}(Q_T)\cap C^{(1,0)}(\bar{Q}_T)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\bar{Q}_T)$ *и выполнены условия* (1.4), (4.2), *тогда для решения задачи* (1.1), (4.1), (1.3) *справедлива априорная оценка* (4.7), *из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, в смысле нормы*

$$\|u\|_1^2=\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2,$$

где $D_{0t}^{-\alpha}=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1), (4.1), (1.3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y=\varkappa_i^j\left(a_i^jy_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i}+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\left(\gamma_iy_{\bar{x}}\right)_{x,i}+b_i^{-j}a_i^jy_{\bar{x},i}^{(\sigma)}+b_i^{+j}a_{i+1}^jy_{x,i}^{(\sigma)}+\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{i,s}^jy_i^s\bar{\tau}+\varphi_i^j,\quad (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \quad (5.1)$$

$$\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\left(\gamma_1y_{\bar{x},0}\right)=\beta_1\left(t_{j+\sigma}\right)y_0^{(\sigma)}+0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0-0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{0,s}^jy_0^s\bar{\tau}-\tilde{\mu}_1,\quad t\in\bar{\omega}_\tau,\quad x=0, \quad (5.2)$$

$$\begin{gathered}-\left(\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(\gamma_Ny_{\bar{x},N})\right)=\beta_2(t_{j+\sigma})y_N^{(\sigma)}+\\+0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N-0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{N,s}^jy_N^s\bar{\tau}-\tilde{\mu}_2,\quad t\in\bar{\omega}_\tau,\quad x=l,\end{gathered} \quad (5.3)$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{5.4}$$

где

$$\tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma})=\mu_1(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_0,\quad \tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma})=\mu_2(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_N.$$

Введем скалярное произведение и норму:

$$[u,v]=\sum_{i=0}^{N}u_iv_i\hbar,\quad \hbar=\begin{cases}0.5h, & i=0,N,\\ h, & i\neq 0,N,\end{cases}\quad (u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_ih,\quad [u,u]=\left[1,u^2\right]=\|[u]\|_0^2.$$

Перепишем (5.1)–(5.4) в операторной форме

$$\begin{aligned}&\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\overline{\Lambda}\left(t_{j+\sigma}\right)y^{(\sigma)}+\overline{\delta}(t)y+\overline{\Phi},\\ &y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\end{aligned} \tag{5.5}$$

где

$$\overline{\Lambda}\left(t_{j+\sigma}\right)y^{(\sigma)}=\begin{cases}\tilde{\Lambda}y_i^{(\sigma)}=\varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x+b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}+b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)}+\sum\limits_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{i,s}^jy_i^s\overline{\tau}, & i=\overline{1,N-1},\\ \Lambda^-y_0^{(\sigma)}=\dfrac{2}{h}\left(\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}-\beta_1y_0^{(\sigma)}+0.5h\sum\limits_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{0,s}^jy_0^s\overline{\tau}\right), & i=0,\\ \Lambda^+y_N^{(\sigma)}=\dfrac{2}{h}\left(-\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-\beta_2y_N^{(\sigma)}+0.5h\sum\limits_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{N,s}^jy_N^s\overline{\tau}\right), & i=N,\end{cases}$$

$$\overline{\delta}y=\begin{cases}\delta y_i=\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_iy_{\bar{x}})_x, & i=\overline{1,N-1},\\ \delta^-y_0=\dfrac{2}{h}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1y_{x,0})_t, & i=0,\\ \delta^+y_N=-\dfrac{2}{h}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(\gamma_Ny_{\bar{x},N}\right), & i=N,\end{cases}\qquad \overline{\Phi}=\begin{cases}\varphi=\varphi_i, & i=\overline{1,N-1},\\ \varphi^-=\dfrac{2}{h}\tilde{\mu}_1, & i=0,\\ \varphi^+=\dfrac{2}{h}\tilde{\mu}_2, & i=N,\end{cases}$$

$$\varkappa^*=\begin{cases}\varkappa=\dfrac{1}{1+\dfrac{0.5h|r|}{k}},\\ \varkappa_0=\dfrac{1}{1+\dfrac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}}, & r_0\le 0,\quad t^*=t^{j+1/2},\\ \varkappa_N=\dfrac{1}{1+\dfrac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}}, & r_N\ge 0.\end{cases}$$

Умножим (5.5) теперь скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\left[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\right]=\left[\overline{\Lambda}\left(t_{j+\sigma}\right)y^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right]+\left[\overline{\delta}y,y^{(\sigma)}\right]+\left[\Phi,y^{(\sigma)}\right]. \tag{5.6}$$

После несложных преобразований из (5.6) находим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|[y]\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_4\left\|[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]\right\|_0^2\le M_8\left|[y^{\sigma}]\right|^2_{W_2^1(0,l)}+M_9\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\left|[y^s]\right|_0^2\overline{\tau}+M_7(\|[\varphi]\|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2), \tag{5.7}$$

где $\|[y]\|_{W_2^1(0,l)}=\|[y]\|_0^2+\|y_x]\|_0^2$.

Повторяя рассуждения (3.12)–(3.24), из (5.7) получаем искомую априорную оценку

$$\left[\!\left[y^{j+1}\right]\!\right]_0^2 \le M\left(\left[\!\left[y^0\right]\!\right]_{W_2^2(0,l)}^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\le j'\le j}\left(\left[\!\left[\varphi^{j'}\right]\!\right]_0^2 + \mu_1^{j'2} + \mu_2^{j'2}\right)\right), \tag{5.8}$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1.4), (4.2), *тогда существует такое* $\tau_0(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma)$, *что если* $\tau \le \tau_0(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma)$, *то для решения разностной задачи* (5.1)–(5.4) *справедлива априорная оценка* (5.8), *из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.*

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1.1), (4.1), (1.3), $y(x_i, t_j) = y_i^j$ – решение разностной задачи (5.1)–(5.4). Для оценки точности разностной схемы (5.1)–(5.4) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (5.1)–(5.4), получаем задачу для функции z:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z = \varkappa_i^j\left(a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\left(\gamma_i z_{\bar{x}}\right)_{x,i} + b_i^{-j}a_i^j z_{\bar{x},i} + b_i^{+j}a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{i,s}^j z_i^s\overline{\tau} + \Psi_i^j, \quad (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{5.9}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\left(\gamma_1 z_{\bar{x},0}\right) = \beta_1 z_0^{(\sigma)} + 0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_0 - 0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{0,s}^j z_0^s\overline{\tau} - \tilde{\nu}_1, \quad t\in\overline{\omega}_\tau, \quad x = 0, \tag{5.10}$$

$$-\left(\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(\gamma_N z_{\bar{x},N})\right) = \beta_2 z_N^{(\sigma)} + 0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_N - 0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{N,s}^j z_N^s\overline{\tau} - \tilde{\nu}_2, \quad t\in\overline{\omega}_\tau, \quad x = l, \tag{5.11}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{5.12}$$

где $\Psi = O\left(h^2+\tau^2\right)$, $\nu_1 = O\left(h^2+\tau^2\right)$, $\nu_2 = O\left(h^2+\tau^2\right)$ – погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1), (4.1), (1.4) разностной схемой (5.1)–(5.4) в классе решения $u = u(x,t)$ задачи (1.1), (4.1), (1.4).

Применяя априорную оценку (5.8) к решению задачи (5.9)–(5.12), получаем неравенство

$$\left[\!\left[z^{j+1}\right]\!\right]_0^2 \le M\max_{0\le j'\le j}\left(\left[\!\left[\Psi^{j'}\right]\!\right]_0^2 + \nu_1^{j'2} + \nu_2^{j'2}\right), \tag{5.13}$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (5.13) следует сходимость решения разностной задачи (5.1)–(5.4) к решению дифференциальной задачи (1.1), (4.1), (1.4) в смысле нормы $\left[\!\left[z^{j+1}\right]\!\right]_0^2$ на каждом слое так, что существует такое $\tau_0\left(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma\right)$, что при $\tau \le \tau_0\left(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma\right)$ справедлива оценка

$$\left[\!\left[y^{j+1} - u^{j+1}\right]\!\right]_0 \le M\left(h^2+\tau^2\right).$$

6. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Для численного решения разностных схем, полученных при аппроксимации рассматриваемых в данной работе краевых задач для нелокального по времени уравнения соболевского типа с дробной производной Герасимова-Капуто порядка α, приведем разностную схему (5.1)–(5.4) к расчетному виду. Тогда уравнение (5.1) приводится к следующему виду:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{6.1}$$

где

$$A_i = \tau\sigma\varkappa_i^j a_i^j + \gamma_i\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} - \tau h\sigma b_i^{-j}a_i^j,$$

$$B_i = \tau\sigma\varkappa_i^j a_{i+1}^j + \gamma_{i+1}\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau h\sigma b_i^{+j} a_{i+1}^j,$$

$$C_i = A_i + B_i + h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)},$$

$$F_i^j = AA_i y_{i-1}^j - CC_i y_i^j + BB_i y_{i+1}^j + h^2\tau\varphi_i^j - h^2\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\left(y_i^{s+1} - y_i^s\right) +$$

$$+ \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\left((\gamma_{i+1}y_{i+1})^{s+1} - (\gamma_{i+1}y_{i+1})^s\right) + \tau h^2\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{i,s}^j y_i^s\overline{\tau} -$$

$$- \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\left(((\gamma_i + \gamma_{i+1})\,y_i)^{s+1} - ((\gamma_i + \gamma_{i+1})\,y_i)^s\right) +$$

$$+ \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\left((\gamma_i y_{i-1})^{s+1} - (\gamma_i y_{i-1})^s\right),$$

$$AA_i = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_i^j - \gamma_i\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} - \tau h(1-\sigma)b_i^{-j}a_i^j,$$

$$BB_i = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_{i+1}^j - \gamma_{i+1}\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau h(1-\sigma)b_i^{+j}a_{i+1}^j,$$

$$CC_i = AA_i + BB_i - h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Краевое условие (5.2) принимает вид

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \tilde{\mu}_1, \tag{6.2}$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\tau\sigma\varkappa_0 a_1 + \gamma_1\dfrac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}}{\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \gamma_1\dfrac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \sigma h\tau\beta_1^j + 0.5h^2\dfrac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\tilde{\mu}_1 = \Bigg[\mu_1 h\tau - (1-\sigma)\,h\tau\beta_1 y_0^j + \tau(1-\sigma)\,\varkappa_0 a_1\left(y_1^j - y_0^j\right) - \gamma_1\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(y_1^j - y_0^j\right) +$$

$$+ 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}y_0 + 0.5\tau h^2\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{0,s}^j y_0^s\overline{\tau} -$$

$$- 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\left(y_0^{s+1} - y_0^s\right) + \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\left((\gamma_1 y_1)^{s+1} - (\gamma_1 y_1)^s\right) -$$

$$- \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\left((\gamma_1 y_0)^{s+1} - (\gamma_1 y_0)^s\right)\Bigg]\Bigg/\Bigg[\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \gamma_1\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \sigma h\tau\beta_1^j + 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg].$$

Краевое условие (5.3) принимает вид

$$y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \tilde{\mu}_2, \tag{6.3}$$

Таблица 1. Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $\|[\cdot]\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки при различных значениях $\alpha = 0.01; 0.5; 0.99$ на $t = 1$, когда $h = \tau$

α	h	$\max\limits_{0<j<m}\|[z^j]\|_0$	ПС в $\|[\cdot]\|_0$	$\|z\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$
0.01	$\frac{1}{10}$	0.012362254		0.015681134	
	$\frac{1}{20}$	0.003063869	2.0125	0.003949375	1.9893
	$\frac{1}{40}$	0.000761971	2.0075	0.000990709	1.9951
	$\frac{1}{80}$	0.000189951	2.0041	0.000248080	1.9977
	$\frac{1}{160}$	0.000047417	2.0021	0.000062069	1.9989
0.5	$\frac{1}{10}$	0.023900850		0.031151058	
	$\frac{1}{20}$	0.005985695	1.9975	0.007805011	1.9968
	$\frac{1}{40}$	0.001497030	1.9994	0.001950162	2.0008
	$\frac{1}{80}$	0.000374352	1.9996	0.000486983	2.0017
	$\frac{1}{160}$	0.000093612	1.9996	0.000121611	2.0016
0.99	$\frac{1}{10}$	0.031285213		0.040875033	
	$\frac{1}{20}$	0.007813700	2.0014	0.010221328	1.9996
	$\frac{1}{40}$	0.001951210	2.0016	0.002553472	2.0011
	$\frac{1}{80}$	0.000487460	2.0010	0.000637939	2.0010
	$\frac{1}{160}$	0.000121822	2.0005	0.000159403	2.0007

где

$$\varkappa_2 = \frac{\tau\sigma\varkappa_N a_N + \gamma_N \dfrac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \gamma_N \dfrac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \sigma h\tau\beta_2^j + 0.5h^2 \dfrac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_2 = \Big[&\mu_2 h\tau - (1-\sigma)h\tau\beta_2 y_N^j - \tau(1-\sigma)\varkappa_N a_N \left(y_N^j - y_{N-1}^j\right) + \\ &+ \gamma_N \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(y_N^j - y_{N-1}^j\right) + 0.5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_N - 0.5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \left(y_N^{s+1} - y_N^s\right) - \\ &- \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \left(\left(\gamma_N y_N\right)^{s+1} - \left(\gamma_N y_N\right)^s\right) + 0.5\tau h^2 \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \overline{\tau} + \\ &+ \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \left(\left(\gamma_N y_{N-1}\right)^{s+1} - \left(\gamma_N y_{N-1}\right)^s\right)\Big] \Big/ \left[\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \gamma_N \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \sigma h\tau\beta_2^j + \frac{h^2}{2} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}\right].\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (6.1)–(6.3), разностная схема (5.1)–(5.4) приводится к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений, решение которой легко находится известным методом прогонки.

Таблица 2. Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $[\![\,\cdot\,]\!]_0$ и $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки при $\eta(x) = 10^3 e^x$ и различных значениях $\alpha = 0.01;\ 0.5;\ 0.99$ на $t = 1$, когда $h = \tau$

α	h	$\max\limits_{0<j<m} [\![z^j]\!]_0$	ПС в $[\![\,\cdot\,]\!]_0$	$\|z\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$
0.01	$\frac{1}{10}$	0.427328366		0.430722467	
	$\frac{1}{20}$	0.106867087	1.9995	0.107809103	1.9983
	$\frac{1}{40}$	0.026714433	2.0001	0.026962741	1.9994
	$\frac{1}{80}$	0.006677884	2.0002	0.006741626	1.9998
	$\frac{1}{160}$	0.001669353	2.0001	0.001685501	1.9999
0.5	$\frac{1}{10}$	0.768601726		0.773674947	
	$\frac{1}{20}$	0.192638696	1.9963	0.193912228	1.9963
	$\frac{1}{40}$	0.048191891	1.9990	0.048505543	1.9992
	$\frac{1}{80}$	0.012050488	1.9997	0.012127281	1.9999
	$\frac{1}{160}$	0.003012892	1.9999	0.003031699	2.0001
0.99	$\frac{1}{10}$	1.300442434		1.308694578	
	$\frac{1}{20}$	0.325831553	1.9968	0.327914720	1.9967
	$\frac{1}{40}$	0.081500866	1.9992	0.082023260	1.9992
	$\frac{1}{80}$	0.020377705	1.9998	0.020508306	1.9998
	$\frac{1}{160}$	0.005094569	2.0000	0.005127171	2.0000

7. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрим следующий тестовый пример:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^t \rho(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x,t),$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \le T,$$

$$\Pi(0,t) = \beta_1(t)u(0,t) - \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$-\Pi(l,t) = \beta_2(t)u(l,t) - \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l,$$

где

$$k(x,t) = e^{x+t}, \quad \eta(x) = e^x, \quad r(x,t) = (x-0.5)\cos(x+t), \quad \rho(x,t,\tau) = xt^2\tau,$$

$$f(x,t) = e^x\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - 2t^3e^{2x+t} - 2e^{2x}\left(\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)}\right) - t^3e^x(x-0.5)\cos(x+t) - \frac{xt^7e^x}{5},$$

Таблица 3. Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $\|[\cdot]\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки при $\rho(x,t,\tau) = 10^3 xt^2\tau$ и различных значениях $\alpha = 0.01;\ 0.5;\ 0.99$ на $t = 1$, когда $h = \tau$

α	h	$\max\limits_{0<j<m} \|[z^j]\|_0$	ПС в $\|[\cdot]\|_0$	$\|z\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$
0.01	$\frac{1}{10}$	0.235521279		0.244097429	
	$\frac{1}{20}$	0.069206433	1.7669	0.071718425	1.7670
	$\frac{1}{40}$	0.018471997	1.9056	0.019144886	1.9054
	$\frac{1}{80}$	0.004737528	1.9631	0.004910266	1.9631
	$\frac{1}{160}$	0.001196792	1.9850	0.001240440	1.9849
0.5	$\frac{1}{10}$	0.149619422		0.154412305	
	$\frac{1}{20}$	0.041424610	1.8527	0.042651310	1.8561
	$\frac{1}{40}$	0.010739354	1.9476	0.011048266	1.9488
	$\frac{1}{80}$	0.002719886	1.9813	0.002797166	1.9818
	$\frac{1}{160}$	0.000683359	1.9928	0.000702653	1.9931
0.99	$\frac{1}{10}$	0.083746441		0.093343780	
	$\frac{1}{20}$	0.021663577	1.9508	0.024067037	1.9555
	$\frac{1}{40}$	0.005461233	1.9880	0.006062075	1.9892
	$\frac{1}{80}$	0.001367708	1.9975	0.001517800	1.9978
	$\frac{1}{160}$	0.000342007	1.9997	0.000379488	1.9999

$$\beta_1 = 0.5e^t, \quad \beta_2 = e^{l+t}, \quad \mu_1 = -\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} - 0.5t^3e^t,$$

$$\mu_2 = 2t^3e^{2l+t} + e^{2l}\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + e^{2l}\frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)}, \quad u_0(x) = 0, \quad l = 1, \quad T = 1.$$

Точное решение задачи $u(x,t) = t^3e^x$.

Ниже в табл. 1–4 при различных значениях $\eta(x)$, $\rho(x,t,\tau)$ и $\alpha = 0.01;\ 0.5;\ 0.99$ и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в нормах $\|[\cdot]\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\overline{w}_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in\overline{w}_{h\tau}} |y|$, когда $h = \tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$. Порядок сходимости определяется по следующей формуле: ПС $= \log_{\frac{h_1}{h_2}} \frac{\|[z_1]\|_0}{\|[z_2]\|_0} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\|[z_1]\|_0}{\|[z_2]\|_0}\right)}{\ln\left(\dfrac{\|[N_2]\|_0}{\|[N_1]\|_0}\right)}$, где z_i — это погрешность, соответствующая h_i.

Таблица 4. Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $[\![\cdot]\!]_0$ и $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки при $\eta(x) = 10^3 e^x$, $\rho(x,t,\tau) = 10^3 x t^2 \tau$ и различных значениях $\alpha = 0.01; 0.5; 0.99$ на $t = 1$, когда $h = \tau$

α	h	$\max\limits_{0<j<m} [\![z^j]\!]_0$	ПС в $[\![\cdot]\!]_0$	$\|z\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$
0.01	$\frac{1}{10}$	1.279174186		1.281357738	
	$\frac{1}{20}$	0.353417431	1.8558	0.353910821	1.8562
	$\frac{1}{40}$	0.091586696	1.9482	0.091706773	1.9483
	$\frac{1}{80}$	0.023164777	1.9832	0.023194603	1.9832
	$\frac{1}{160}$	0.005813090	1.9946	0.005820532	1.9946
0.5	$\frac{1}{10}$	1.870907081		1.875118090	
	$\frac{1}{20}$	0.501806708	1.8985	0.502842392	1.8988
	$\frac{1}{40}$	0.128190732	1.9688	0.128443238	1.9690
	$\frac{1}{80}$	0.032244004	1.9912	0.032305415	1.9913
	$\frac{1}{160}$	0.008074897	1.9975	0.008089857	1.9976
0.99	$\frac{1}{10}$	2.453183349		2.461320805	
	$\frac{1}{20}$	0.634838681	1.9502	0.636891924	1.9503
	$\frac{1}{40}$	0.160150348	1.9870	0.160665190	1.9870
	$\frac{1}{80}$	0.040128764	1.9967	0.040257472	1.9967
	$\frac{1}{160}$	0.010037842	1.9992	0.010069971	1.9992

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению начально-краевых задач для одномерного по пространству нелокального дифференциального уравнения в частных производных соболевского типа с переменными коэффициентами с дробной по времени производной, в котором неизвестная функция входит в дифференциальное выражение и, вместе с тем, фигурирует под знаком интеграла. Изучаются разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи на равномерных сетках. Рассмотрен случай уравнения, в котором коэффициенты при старших производных отделены от нуля положительной константой. Граничные условия локальные (I и III рода). Для решения краевых задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$.

Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда рассматривается уравнение с нелокальным линейным источником вида

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \int_0^x p(s,t)u(s,t)ds + f(x,t).$$

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю и глубокую благодарность моему учителю Мухамеду Хабаловичу Шханукову-Лафишеву.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ. 1983.
2. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
3. *Favini A., Yagi A.* Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. N.-Y.: Marcel Dekker, Inc., 1999.
4. *Ting T.W.* Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations // J. Math. Soc. Jap. 1969. V. 21. № 3. P. 440–453.
5. *Demidenko G.V., Uspenskii S.V.* Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest – Order Derivative. N.-Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
7. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
8. *Showalter R.E.* The Sobolev equations I. (II) // Appl. Anal. 1975. V. 5. № 1. P. 15–22; № 2. P. 81–99.
9. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. № 5. С. 58–73.
10. *Дзекцер Е.С.* Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // ДАН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 540–543.
11. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.
12. *Hallaire M.* On a theory of moisture-transfer // Inst. Rech. Agronom. 1964. № 3. P. 60–72.
13. *Chen P.J., Gurtin M.E.* On a theory of heat conduction involving two temperatures // Z. Angew. Math. Phys. 1968. V. 19. P. 614–627.
14. *Рубинштейн Л.И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Известия АН СССР, Сер. геогр. 1948. Т. 12. № 1. С. 27–45.
15. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
16. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Издательство “Артишок”, 2008. 512 с.
17. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987. 688 с.
18. *Чукбар К.В.* Стохастический перенос и дробные производные // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. Вып. 5(11). С. 1875–1884.
19. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 660–670.
20. *Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткий И.А.* Численные методы решения уравнения дробной диффузии с дробной производной по времени в одномерном случае. М.: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2003. 35 с.
21. *Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х.* Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 10. С. 1871–1881.
22. *Бештоков М.Х.* Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 6. С. 763–778.
23. *Алиханов А.А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. ур-ния. 2010. Т. 46. № 5. С. 660–666.
24. *Alikhanov A.A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Computational Phys. 2015. V. 280. P. 424–438.
25. *Caputo H.* Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II. Geophys // J. Astronom. Soc. 1967. V. 13. P. 529–539.
26. *Герасимов А.Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения //АН СССР. Прикл. матем. и механ. 1948. Т. 12. С. 251–260.
27. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
28. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
29. *Li D., Liao H.-L., Sun W., Wang J., Zhang J.* Analysis of L1-Galerkin FEMs for time-fractional nonlinear parabolic problems, 2016 (in press); arXiv:1612.00562v1.
30. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.