ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 2, с. 334–341

УДК 517.958:537.8

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ НИЗКОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ

© 2019 г. В. П. Иванов

(119334 Москва, ул. Бардина, 4, ИМАШ РАН, Россия)

e-mail: icenter@imash.ru

Поступила в редакцию 20.09.2017 г.

Разработан способ вычисления скорости распространения электромагнитного поля (света) в среде с включениями с помощью теории многократного рассеяния. Исследуется модель дифракции электромагнитной волны на частицах, расположенных внутри волновода вдоль его оси. Библ. 14.

Ключевые слова: скорость света в слое с частицами, волновод с включениями, рассеяние света на включениях.

DOI: 10.1134/S0044466919020078

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных методов экспериментального исследования межзвездной среды является измерение полей излучения сторонних источников, анализ и сдвиг спектра частот излучения при движении сторонних источников, связанный с эффектом Доплера. Помимо полей, межзвездное пространство содержит большое количество частиц (включений) материи различной природы, например, пылевые облака графита, карбида кремния, силикатов с размером частиц 0.1–1.0 мкм, причем концентрация частиц от объекта к объекту может меняться на порядки. С точки зрения теории распространения электромагнитного поля наличие частиц может привести не только к ослаблению этого поля через механизм рассеяния, но и изменению скорости распространения поля в среде с частицами, что будет влиять на сдвиг спектра. Дело в том, что процесс распространения монохроматического звукового и электромагнитного поля в среде с частицами описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца соответственно. Теоретические исследования и эксперименты показывают, что скорость распространения звука в жидкости с пузырьками газа или пара, которая описывается скалярным уравнением Гельмгольца, может меняться на один–два порядка в зависимости от концентрации пузырьков. Несмотря на то что механизм возбуждения звукового и электромагнитного поля разный, процесс распространения звукового и электромагнитного поля в силу описывающего его уравнения должен отличаться только векторным характером электромагнитного поля. Следовательно, скорость распространения электромагнитных волн в среде с частицами также должна зависеть от свойств, концентрации и размера частиц. При распространении звука в жидкости с пузырьками газа скорость распространения малых возмущений определяется из уравнения состояния и уравнения колебаний одиночного пузырька [1], [2]. В работах [3]–[5] для исследования процесса и скорости распространения скалярного поля в среде с частицами был разработан метод многократного рассеяния волн на частицах. В работе [3] предполагалось, что частицы точечные, но рассеяние стороннего поля на частице существует и его распределение известно. В работе [4] вычислялось рассеянное поле на частицах сферической формы малых волновых размеров с достаточно большим расстоянием между центрами. Предполагалось, что в заданном объеме частицы расположены произвольно, поэтому в [3], [4] вычислялось конфигурационное среднее поле. Развитию теории распространения и рассеяния волн в случайно-неоднородных средах с частицами посвящена монография [5]. В предлагаемой работе метод многократного рассеяния перенесен на процесс распространения электромагнитного поля.

При произвольном расположении частиц в пространстве анализ физического механизма изменения скорости электромагнитного поля (света) затруднен из-за сложного поведения дифракционного поля на совокупности частиц, поэтому механизм изменения скорости света за счет многократного рассеяния будем исследовать в средах, в которых частицы расположены регулярно. В зависимости от взаимного расположения частиц в среде с включениями в процессе распространения электромагнитных волн могут образовываться направляющие системы различного типа (см. [6]). В средах с низкой концентрацией частиц в качестве направляющей системы удобно использовать бесконечный волновод прямоугольного поперечного сечения с абсолютно проводящими стенками. На продольной оси z волновода в интервале $-L \le z \le QL$ располагаются центры Q частиц сферической формы. Используя метод отражений от стенок волновода и условие периодичности по поперечным координатам, задачу распространения электромагнитных волн в волноводе можно свести к задаче дифракции волн на бесконечной Q-слойной двоякопериодической в поперечном направлении решетке частиц. Решение задачи дифракции поля на решетке будет моделировать процесс распространения электромагнитного поля внутри достаточно протяженного облака разреженных частиц в области вне окрестности края облака.

1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВОЛНОВОДЕ

Введем в трехмерном пространстве декартову систему координат и выберем в качестве модельной направляющей системы бесконечный вдоль оси z волновод $W = \{(x, y, z) : -l_1 < x, y < l_1, -\infty < z < \infty\}$ квадратного поперечного сечения с идеально проводящими стенками. Исследуем метод многократного рассеяния на примере распространения электрических или магнитных волн в волноводе, на оси которого расположено конечное множество Q частиц сферической формы. Центры частиц расположены в интервале $-L \le z \le QL$. Если сравнить процесс распространения поля в волноводе, содержащем Q частиц, с подробно исследованным процессом распространения поля в волноводе, содержащем диэлектрический слой $S = \{(x, y, z): -l_1 \le x, y \le l_1, -L \le z \le QL\}$ толщиной $(Q + 1)L$ со специальными свойствами среды в слое (см. [7]), можно получить соотношения, определяющие скорость распространения поля в среде с частицами. Основное отличие процесса распространения электромагнитных волн от акустического случая [8] заключается в том, что при распространении электромагнитных волн не существует однородной плоской волны, распространяющейся как в свободном пространстве, так и в волноводе (см. [6]). Для волновода с частицами рассмотрим спектр излучения, для которого волновой размер элементов решетки (частиц), то есть произведение характерного размера частицы на волновое число электромагнитного поля, достаточно мал.

Пространство внутри волновода W будем характеризовать параметрами ε и μ, ε-диэлектрическая, μ-магнитная проницаемости. Для вакуума параметры $\varepsilon = \mu = 1$. На оси волновода размещены частицы сферической формы D_q , $q = 1, \ldots, Q$. Радиус частицы D_q равен $a < l_1$, L, ее центр расположен в точке с координатами $(0, 0, (q - 1)L)$, так что начало декартовой системы совпадает с центром первой частицы. С целью упрощения решения считаем поверхность частицы D_q идеально проводящей. В гауссовой системе измерения будем решать задачу дифракции электромагнитного поля, распространяющегося в волноводе, на частицах D_q. Поскольку центры частиц расположены регулярно, можно найти не конфигурационное среднее, а определяемое точностью метода вычисления значение скорости распространения электромагнитного поля в зависимости от концентрации, размера частиц и толщины слоя, содержащего частицы.

Обозначим через

$$D = W \backslash \bigcup_{q=1}^{Q} \bar{D}_q,$$

$\bar{D}_q$ – замыкание области D_q. В области D из полупространства $z < 0$ на конечное множество частиц D_q падает электромагнитное поле. Представим полное поле в виде суммы падающего поля и рассеянной части. Векторы напряженности полного электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ поля в области D удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i(\omega\varepsilon/c)E, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i(\omega\mu/c)H, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{1.1}$$

где ω – круговая частота, c – скорость распространения света в вакууме. Из уравнений (1.1) следует, что в кусочно-однородной изотропной среде без локальных источников векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют векторным уравнениям Гельмгольца (см. [6])

$$(\Delta + k^2)\mathbf{E} = 0, \quad (\Delta + k^2)\mathbf{H} = 0, \quad k^2 = k_0^2\varepsilon\mu, \quad k_0 = \omega/c, \tag{1.2}$$

здесь k – волновое число поля в области D. На стенке волновода и на поверхностях S_q шаров D_q, $q = 1, \ldots, Q$, должно выполняться условие обращения в ноль касательной составляющей векторного поля $\mathbf{E}$. Рассеянная часть векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должна быть ограничена по модулю в области D при $Jmk > 0$. Особенность распространения электромагнитных волн в волноводах заключается в том, что существует критическая длина волны, больше которой волна в волноводе не распространяется. Действительно, отыскивая частное решение уравнений (1.2) в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^*(x, y)\exp(\mathrm{ihz}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^*(x, y)\exp(\mathrm{ihz}), \tag{1.3}$$

где h – неопределенная константа, легко обнаружить, что $h = h_{nm} = \sqrt{k^2 - g_{nm}^2}, g_{nm}$ – собственные значения задачи Дирихле или Неймана для уравнения Лапласа в поперечном сечении волновода, целые числа n,m или больше нуля (задача Дирихле) или одновременно в нуль не обращаются (задача Неймана) в случае электрических или магнитных полей соответственно. Для распространяющихся в волноводе волн $h > 0$. Если μ^*, ε^* – произвольные константы, характеризующие среду с включениями, то для вычисления этих констант среды нужно исследовать задачу распространения как электрической волны в волноводе (H_z-компонента равна нулю), так и задачу распространения магнитной волны (E_z-компонента равна нулю). Рассмотрим далее случай, когда материал среды и частиц не ферромагнетик, т.е. с высокой точностью можно положить $\mu^* = 1.0$. Поскольку скорость света в среде с частицами определяется только диэлектрической проницаемостью, достаточно исследовать задачу дифракции в волноводе или электрических, или магнитных волн. Далее исследуем магнитные волны, для которых E_z-компонента электромагнитного поля равна нулю. Пусть распространяющаяся из бесконечности при $z < 0$ в области D магнитная волна имеет вид

$$H_z^0 = H\cos(\pi(x - l_1)/2l_1)\exp(\mathrm{i}h_{10}\mathrm{z})\exp(-i\omega t), \quad h_{10} = \sqrt{k^2 - g_{10}^2}, \quad E_z^0 = 0.$$

Множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается. Если выписать представление для поперечных составляющих электромагнитного поля при произвольных ε и μ через продольные составляющие с учетом (1.3)

$$\begin{gathered} E_x = \frac{i}{k_0\varepsilon C}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{h_{10}}{k_0\mu}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right), \quad C = 1 - \frac{h_{10}^2}{k^2} \quad , E_y = \frac{i}{k_0\varepsilon C}\left(\frac{h_{10}}{k_0\mu}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \\ H_x = -\frac{i}{k_0\mu C}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{h_{10}}{k_0\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \quad H_y = \frac{i}{k_0\mu C}\left(\frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{h_{10}}{k_0\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial y}\right), \end{gathered} \tag{1.4}$$

то из формул (1.4) следует, что падающее поле в волноводе содержит составляющие H_x^0, E_y^0, H_z^0. Остальные компоненты поля равны нулю. Потребуем, чтобы поперечный волновой размер волновода лежал в диапазоне $g_{10}l_1 < kl_1 < g_{20}l_1$, g_{10}, g_{20} – первое и второе в порядке возрастания, отличные от нуля собственные значения задачи Неймана уравнения Лапласа, определенные в поперечном сечении волновода. В этом случае тип волны, распространяющейся в волноводе при $z < -L$, сохранится при $z > QL$, т.е. новых нормальных волн в волноводе в процессе дифракции на частицах не возникнет. Поскольку волновой размер частицы ka достаточно мал по постановке задачи, параметр kl_1 лежит в диапазоне $g_{10}l_1 < kl_1 < g_{20}l_1$, то параметр a/l_1 одного порядка малости с параметром ka. Поскольку величина $(a/l_1)^3$ пропорциональна объемной концентрации среды, то процесс распространения электромагнитного поля в волноводе в указанном диапазоне частот действительно отвечает распространению поля в среде с малым содержанием частиц. Через U обозначим H_z-компоненту полного магнитного поля в волноводе и положим $U = U_0 + U_1$, $U_0 = H_z^0$, U_1 – рассеянная на частицах часть магнитного поля. Поле U_1 внутри волновода удовлетворяет скалярному однородному уравнению Гельмгольца (см. [9])

$$(\Delta + k^2)U_1 = 0, \quad k^2 = k_0^2\varepsilon\mu, \quad k_0 = \omega/c, \tag{1.5}$$

где k – волновое число в области D, $\partial U_1/\partial n|_\Gamma = 0$, Γ – боковая поверхность волновода, n – нормаль к боковой поверхности, направленная внутрь области определения поля. Поле U_1 ограничено в области D при $Jmk > 0$. На поверхности сфер D_q должны выполняться условия

$$\partial(U_0 + U_1)/\partial n|_{S_q} = 0, \quad q = 1, \ldots, Q. \tag{1.6}$$

Здесь $\partial/\partial n$ – производная по нормали к сфере S_q, направленная вне шара D_q.

В процессе рассеяния поля на частицах образуется не только дифракционное поле U_1, но и так называемая эффективная скорость распространения волн в среде с частицами. Эту скорость определим следующим образом. Пусть внутри волновода с параметрами среды ε, μ размещен слой $S=\{(x, y, z): -l_1 \le x, y \le l_1, -L \le z \le QL\}$ диэлектрика с параметрами среды $\varepsilon'_s = \varepsilon_s + 4\pi i\sigma_s/\omega$, μ_s, σ_s – проводимость среды слоя. Материал среды слоя будем считать не ферромагнетиком, т.е. $\mu_s = 1.0$. Из полупространства $z < 0$ на слой S падает стороннее поле в виде магнитной волны $H_z^0 = H\cos(\pi(x - l_1)/2l_1)\exp(ih_{10}z)$. Требуется найти амплитуду прошедшей через слой волны при $z > QL$. Будем считать, что поперечный волновой размер волновода, содержащего диэлектрический слой, лежит в диапазоне $g_{10}l_1 < kl_1 < g_{20}l_1$. Магнитное поле удовлетворяет вне S однородному уравнению Гельмгольца (1.5), внутри S уравнению (1.5), если ε и μ заменить на ε'_s, μ_s, и однородным условиям Неймана на границе поперечного сечения. В процессе распространения волны H_z^0 в волноводе со слоем диэлектрика при $z < 0$ образуется отраженная волна, внутри слоя – стоячая волна с волновым числом $k_s^2 = k_0^2\varepsilon'_s\mu_s$, а вне слоя при $z > QL$ возбуждается прошедшая волна. Амплитуды этих волн вычисляются из условий равенства касательных составляющих магнитного поля H_z на границах слоя при $z = -L$ и $z = QL$. Решение этой задачи известно [6]. Прошедшая через слой волна имеет вид

$$H_{zs} = H_{ps}H\cos(\pi(x - l_1)/2l_1)\exp(ih_{10}z),$$

$$H_{ps} = \frac{4\lambda\exp(-ih_{10}L)}{(1+\lambda)^2\exp(iQL(h_{10} - h_{10}^1) - ih_{10}^1L) - (1-\lambda)^2\exp(iQL(h_{10} + h_{10}^1) + ih_{10}^1L)},$$
$$\lambda = \mu_1 h_{10}/\mu h_{10}^1, \quad h_{10} = \sqrt{k_0^2\varepsilon\mu - (\pi/2l_1)^2}, \quad h_{10}^1 = \sqrt{k_0^2\varepsilon'_s\mu_s - (\pi/2l_1)^2}, \tag{1.7}$$
$$Jm h_{10}, h_{10}^1 > 0, \quad \text{при} \quad Jm h_{10}, h_{10}^1 = 0 \quad \operatorname{Re} h_{10}, h_{10}^1 > 0.$$

Если потребовать, чтобы в волноводе при $z > QL$ амплитуда H_{zs} прошедшего через слой S поля равнялась амплитуде H_{zd} падающего поля плюс поля дифракции на конечном множестве частиц D_q,

$$H_{zs} = H_{zd}, \tag{1.8}$$

то при известных параметрах задачи ω, ε, $\mu = \mu_s = 1.0$, соотношения (1.7), (1.8) есть нелинейное уравнение для вычисления электрической проницаемости $\varepsilon'_s = \varepsilon^*$ или скорости распространения электромагнитного поля $c_s = c/\sqrt{\varepsilon^*}$, которая, вообще говоря, комплексна. Скорость распространения поля c_s в слое S назовем эффективной скоростью распространения электромагнитного поля в среде волновода, содержащей включения.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Чтобы вычислить эффективную скорость света, необходимо знать амплитуду магнитной волны $H_z = U_0 + U_1$ в волноводе при $z > QL$, когда на множество частиц D_q падает волна $H_z^0 = U_0$. Функция U_1 должна быть ограничена по модулю в области D при $Jmk > 0$ и должна быть дважды непрерывно дифференцируемым внутри области D и непрерывным вплоть до границы области решением задачи (1.5), (1.6). Поскольку функция U_1 есть решение задачи (1.5), (1.6), ее можно представить в виде суммы потенциалов простого слоя для уравнения Гельмгольца (колебательных потенциалов по терминалогии Купрадзе) [10] со специальным ядром в виде функции Грина для бесконечного волновода квадратного поперечного сечения с идеально проводящими стенками:

$$U_1(\bar{x}) = \sum_{q=1}^{Q}\int_{S_q}\nu_q(\bar{\xi}_q)G(\bar{x},\bar{\xi}_q)ds, \quad \bar{x} = (x, y, z) \in D, \quad \bar{\xi}_q = (\xi_q, \eta_q, \varsigma_q) \in S_q,$$

$$G(\bar{x},\bar{\xi}) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}^{*}\frac{i\psi_{mn}(x,y)\psi_{mn}(\xi,\eta)}{2h_{mn}}\exp(ih_{mn}|z-\varsigma|), \quad h_{mn} = \sqrt{k^2 - g_{mn}^2}, \quad \frac{g_{mn}^2}{\pi^2} = \frac{m^2+n^2}{4l_1^2}, \tag{2.1}$$

$$m^2+n^2\neq 0,\quad \psi_{mn}=\frac{1}{l_1}\sqrt{\delta_m\delta_n}\cos\frac{\pi n}{2l_1}(x+l_1)\cos\frac{\pi m}{2l_1}(y+l_1),\quad \delta_n=\begin{bmatrix}1, & n=0,\\ 2, & n\neq 0,\end{bmatrix}$$

где ν_q – неизвестная плотность потенциала, заданная на поверхности S_q. Символ $\sum\sum^*$ означает, что целые числа n, m одновременно в нуль не обращаются. Функция Грина $G(\bar{x},\bar{\xi}_q)$ ищется методом разделения переменных и обладает всеми свойствами колебательного потенциала (см. [10]), поскольку представляет собой сумму фундаментального решения уравнения Гельмгольца плюс непрерывное слагаемое. Подставим представление (2.1) в краевые условия (1.6). Устремим точку наблюдения $\bar{x}$ на поверхность S_p и воспользуемся свойствами колебательного потенциала простого слоя. В результате получим систему интегральных уравнений для вычисления плотностей ν_q вида

$$-\nu_p(\bar{\xi}_{1p})/2+\sum_{q=1}^{Q}\int_{Sq}\nu_q(\bar{\xi}_q)\frac{\partial}{\partial n_1}G(\bar{\xi}_{1p},\bar{\xi}_q)ds=-\partial U_0(\bar{\xi}_{1p})/\partial n_1\qquad p=1,..,Q, \tag{2.2}$$

где $\partial/\partial n_1$ – производная по внешней к поверхности S_p нормали в точке $\bar{\xi}_{1p}$. Введем малый параметр $\delta=\max(a/l_1,|ka|,|h_{10}a|)$. Исследования, проведенные в работе [8] показали, что главный член низкочастотной асимптотики достаточно хорошо описывает дифракционное поле в волноводе. Будем далее искать асимптотику плотностей ν_q по малому параметру δ, сохраняя за асимптотиками те же обозначения. Из теории дифракции на сфере известно, что для вычисления главного члена асимптотики при $ka\to 0$ достаточно взять не более двух первых членов разложения плотностей по полной системе сферических функций, записанных в системе сферических координат, связанной с центром сферы S_q . Представление (2.1) удобно при исследовании поля вне области $-L_1<z<QL$. Для вычисления асимптотики решения системы уравнений (2.2) при достаточно малом δ удобно другое представление решения задачи. Построим функцию Грина G бесконечного вдоль оси z прямоугольного волновода с условием на стенке $\partial U/\partial n=0$ методом отражений источника, расположенного в точке $(\xi,\eta,\varsigma)\in W$, от стенок волновода. Эта функция имеет следующий вид:

$$G=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ikR_{nm})}{4\pi R_{nm}},\qquad R_{nm}=\sqrt{(x-\xi-2nl_1)^2+(y-\eta-2ml_1)^2+(z-\varsigma)^2}.$$

В результате для функции U_1 получим представление

$$U_1(\bar{x})=\sum_{q=1}^{Q}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{S_{qnm}}\nu_{qnm}(\bar{\xi}_{qnm})G(\bar{x},\bar{\xi}_{qnm})ds,\qquad G=\frac{\exp(ikR_{qnm})}{4\pi R_{qnm}}. \tag{2.3}$$

Правую часть формулы (2.3) можно интерпретировать как поле дифракции падающего поля U_0 на двоякопериодической по осям x,y многослойной по оси z решетке, элементами которой являются тела D_{qnm} с поверхностями S_{qnm}. Из условия периодичности следует, что в представлении (2.3) $\nu_{qnm}=\nu_{q00}=\nu_q$, если равенство понимать в том смысле, что в системе координат, связанной с центром сферы S_{qnm}, коэффициенты Фуре функции ν_{qnm} совпадают с коэффициентами Фурье функции ν_{q00} в системе координат, связанной с центром сферы S_{q00}. Для выбранного представления функции Грина система интегральных уравнений (2.2) перепишется в форме

$$-\nu_p(\bar{\xi}_{1p})/2+\sum_{q=1}^{Q}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{S_{qnm}}{}_{qnm}(\bar{\xi}_{qnm})\frac{\partial}{\partial n_1}G(\bar{\xi}_{1p},\bar{\xi}_{qnm})\nu=-\partial U_0(\bar{\xi}_{1p})/\partial n_1\qquad p=1,\ldots,Q, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_0(\bar{\xi}_{1p})}{\partial n_1}&=H\left[\frac{\pi}{2l_1}\cos\left(\frac{\pi a\sin\theta_{1p}\cos\varphi_{1p}}{2l_1}\right)\sin\theta_{1p}\cos\varphi_{1p}+\right.\\&\left.+ih_{10}\sin\left(\frac{\pi a\sin\theta_{1p}\cos\varphi_{1p}}{2l_1}\right)\cos\theta_{1p}\right]\exp(ih_{10}a\cos\theta_{1p}),\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $(\theta_{1p},\varphi_{1p})$ – сферические координаты с полюсом в центре сферы S_p. Удобство представления (2.3) при решении системы интегральных уравнений (2.4), (2.5) заключается в том, что можно применить известную процедуру переразложения сферических функций в разных системах координат (см. [13]). Разложение фундаментального решения в ряд по сферическим функциям определяется выражением

$$\frac{\exp(ikR)}{R} = ik\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=-s}^{s}\frac{(2s+1)(s-t)!}{(s+t)!}P_s^t(\cos\theta)P_s^t(\cos\theta')\exp(it(\varphi-\varphi'))\begin{cases} j_s(k\rho)h_s^{(1)}(kr), & \rho < r,\\ j_s(kr)h_s^{(1)}(k\rho), & r < \rho,\end{cases} \quad (2.6)$$

$R = \sqrt{r^2+\rho^2-2\rho r(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')}$, $j_s(x)$, $h_s^{(1)}(x)$ – сферические функции Бесселя и Ханкеля, $P_s^t(\cos\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра, которые определены в [14]. У некоторых авторов функции P_s^t с таким же обозначением отличаются знаком. При вычислении интегралов в системе (2.4), (2.5) используем представление сферических функций в разных системах координат

$$\begin{gathered} j_q(kr_i)P_q^p(\cos\theta_i)\exp(ip\varphi_i) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}Q_{mnpq}^{(0)}(r_j^i,\vartheta_j^i,\varphi_j^i)j_n(kr_j)P_n^m(\cos\theta_j)\exp(im\varphi_j),\\ h_q^{(1)}(kr_i)P_q^p(\cos\theta_i)\exp(ip\varphi_i) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}Q_{mnpq}^{(1)}(r_j^i,\vartheta_j^i,\varphi_j^i)j_n(kr_j)P_n^m(\cos\theta_j)\exp(im\varphi_j), \end{gathered} \quad (2.7)$$

здесь (r_i,θ_i,φ_i) – сферические координаты в i-й системе координат, (r_j,θ_j,φ_j) – сферические координаты в j-й системе координат, $(r_j^i,\theta_j^i,\varphi_j^i)$ – координаты j-го центра в i-й системе координат,

$$\begin{gathered} Q_{mnpq}^{(0)}(r_j^l,\vartheta_j^l,\varphi_l^l) = \frac{i^{n-q}(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}\sum_{\sigma=|n-q|}^{n+q}i^{\sigma}b_{\sigma}^{(qpnm)}j_{\sigma}(kr_j^l)P_{\sigma}^{p-m}(\cos\theta_j^l)\exp(i(p-m)\varphi_j^l),\\ Q_{mnpq}^{(1)}(r_j^l,\vartheta_j^l,\varphi_j^l) = \frac{i^{n-q}(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}\sum_{\sigma=|n-q|}^{n+q}i^{\sigma}b_{\sigma}^{(qpnm)}h_{\sigma}^{(1)}(kr_j^l)P_{\sigma}^{p-m}(\cos\theta_j^l)\exp(i(p-m)\varphi_j^l). \end{gathered}$$

Коэффициенты Клебша–Гордана $b_{\sigma}^{(qpnm)}$ определяются громоздкими, но простыми формулами, приведенными в [13].

Перепишем правую часть системы (2.4), (2.5) в виде

$$\frac{\partial U_0(\overline{\xi}_{1p})}{\partial n_1} = \frac{\pi H}{2l_1}\cos\varphi_{1p}[P_1^1(\cos\theta_{1p}) + \frac{2}{3}ih_{10}aP_2^1(os\theta_{1p})] + O(\delta^2), \quad \delta\to 0. \quad (2.8)$$

Для исследования влияния на поле объемной концентрации частиц в среде в формуле (2.8) сохранен член первого порядка малости по параметру a/l_1. Из формулы (2.8) следует, что асимптотику плотности ν_p следует искать в виде

$$\nu_p = [a_{1p}P_1^1(\cos\theta_p) + a_{2p}P_2^1(\cos\theta_p)]\exp(i\varphi_p), \quad (2.9)$$

где a_{ip}, $i = 1, 2, p = 1, \ldots, Q$ – неопределенные коэффициенты, (θ_p,φ_p) – сферические координаты с полюсом в центре сферы S_p. Подставим выражение (2.9) в систему интегральных уравнений (2.4), умножим левую и правую части (2.8) последовательно на $P_i^1(\cos\theta_{1p})\sin(\theta_{ip})\exp(-i\varphi_{1p})$, $i = 1,2$, и проинтегрируем по $d\varphi_{1p}d\vartheta_{1p}$, используя представления (2.7) сферических функций в разных системах координат. Интегрирование удобно проводить в системе координат, связанной с центром сферы S_p. Обозначая через

$$x_q = l_1a_{1q}/(\pi H), \quad x_{q+Q} = l_1a_{2q}/(\pi H), \quad q = 1, \ldots, Q,$$

получим алгебраическую систему для вычисления амплитуд асимптотик неизвестных плотностей ν_q и вида

$$\sum_{q=1}^{2Q}C_{qp}x_q = b_p, \quad x_q = l_1a_{1q}/(\pi H), \quad x_{Q+q} = l_1a_{2q}/(\pi H), \quad q = 1, \ldots, Q. \quad (2.10)$$

Правая часть алгебраической системы (2.10) задается выражением

$$b_p = -2/3, \quad b_{Q+p} = -(4/5)ih_{10}a, \quad p = 1, \ldots, Q.$$

Матричные коэффициенты алгебраической системы (2.10) вычисляются по формулам

$$C_{qp} = (1-\delta_{qp})\frac{8}{3}ik^2a^2j_1'(ka)j_1(ka)\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}Q^{(1)}_{-11-11}(kr^p_{qnm},\theta^p_{qnm},\varphi^p_{qnm}) + \delta_{qp}\frac{4}{3}\{-1+ik^2a^2\times$$

$$\times[j_1'(ka)h_1^{(1)}(ka)+j_1(ka)h_0^{(1)\prime}(ka)]\},\quad p=1,\ldots,Q,\quad q=1,\ldots,Q,\quad \delta_{qq}=1,\quad \delta_{qp}=0,\quad q\neq p,$$

$$C_{qp}=(1-\delta_{qp})\frac{8i}{5}k^2a^2j_1'(ka)j_2(ka)\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}Q^{(1)}_{-12-11}(kr^p_{qnm},\theta^p_{qnm},\varphi^p_{qnm}),\quad p=Q+1,\ldots,2Q,\quad q=1,\ldots,Q,$$

$$C_{qp}=(1-\delta_{qp})8ik^2a^2j_2'(ka)j_1(ka)\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}Q^{(1)}_{-11-12}(kr^p_{qnm},\theta^p_{qnm},\varphi^p_{qnm}),\quad p=1,\ldots,Q,\quad q=Q+1,\ldots,2Q, \tag{2.11}$$

$$C_{qp} = (1-\delta_{qp})\frac{24}{5}ik^2a^2j_2'(ka)j_2(ka)\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}Q^{(1)}_{-12-12}(kr^j_{qnm},\theta^j_{qnm},\varphi^j_{qnm}) +$$

$$+\delta_{qp}\frac{12}{5}\{-1+ik^2a^2[j_2'(ka)h_2^{(1)}(ka)+j_2(ka)h_3^{(1)\prime}(ka)]\},\quad p=Q+1,\ldots,2Q,\quad q=Q+1,\ldots,2Q,$$

где $j_i'(ka)$, $h_i^{(1)\prime}(ka)$, $i = 1, 2$ – производная сферических функций Бесселя и Ханкеля по аргументу, $r^j_{qnm} = \sqrt{(j-q)^2L^2+(n^2+m^2)4l_1^2}$, $\cos\theta^j_{qnm} = (q-j)L/r^j_{qnm}$, $\sin\varphi^j_{qnm} = m/\sqrt{n^2+m^2}$, сферические координаты сферы S_{qnm} в системе координат, связанной с центром сферы S_p, δ_{qp} – символ Кронекера,

$$Q^{(1)}_{-11-11}(kr^p_{qnm},\theta^p_{qnm}) = 6\sum_{n=0}^{2}i^nb_n^{1-11-1}h_n^{(1)}(kr^p_{qnm})P_n(\cos\theta^p_{qnm}),\quad b_0^{1-11-1}=0,$$
$$b_1^{1-11-1}=0,\quad b_2^{1-11-1}=-1/\sqrt{6},$$

$$Q^{(1)}_{-12-11}(kr^p_{qnm},\theta^p_{qnm}) = 18i\sum_{n=1}^{3}i^nb_n^{1-12-1}h_n^{(1)}(kr^p_{qnm})P_n(\cos\theta^p_{qnm}),\quad b_1^{1-12-1}=0,$$
$$b_2^{1-12-1}=0,\quad b_3^{1-12-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{15}},$$

$$Q^{(1)}_{-11-12}(kr^p_{qnm},\theta^p_{qnm}) = \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{3}i^nb_n^{2-11-1}h_n^{(1)}(kr^p_{qnm})P_n(\cos\theta^p_{qnm}),\quad b_1^{2-11-1}=0,$$
$$b_2^{2-11-1}=0,\quad b_3^{2-11-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{15}},$$

$$Q^{(1)}_{-12-12}(kr^p_{qnm},\theta^p_{qnm}) = 18\sum_{n=0}^{4}i^nb_n^{2-12-1}h_n^{(1)}(kr^p_{qnm})P_n(\cos\theta^p_{qnm}),\quad b_0^{2-12-1}=b_1^{2-12-1}=b_3^{2-12-1}=0,$$
$$b_2^{2-12-1}=-\frac{3}{42},\quad b_4^{2-12-1}=-\frac{72}{7}.$$

Из представления функции Ханкеля по большому аргументу следует, что ряды в формулах (2.11) сходятся. Заменим в представлении для коэффициентов системы (2.11) сферические функции Бесселя и Ханкеля их асимптотиками при малых ka (см. [13], [14]). Анализ матричных коэффициентов показывает, что при $ka \to 0$ и конечных kl_1, kL в выражении для коэффициентов C_{qp} слагаемое при δ_{pp} порядка $O(1)$, слагаемое при $(1 - \delta_{qp})$ порядка $O(k^3a^3)$ и менее. Этим слагаемым можно пренебречь по сравнению со слагаемым при δ_{pp} и правой частью. Таким образом, с точностью до $O(k^3a^3)$ алгебраическая система (2.10) имеет диагональную матрицу, решение системы (2.10) равно

$$x_p = b_p/C_{pp}, p = 1,\ldots,Q,\quad x_p = b_p/C_{pp},\quad p = Q+1,\ldots,2Q, \tag{2.12}$$

а плотность потенциала ν_q вычисляется из соотношения

$$\nu_q = \frac{\pi H}{l_1}[x_q P_1^1(\cos\theta_q + x_{Q+q}P_2^1(\cos\theta_q)]\exp(i\varphi_q), \quad q = 1,\ldots,Q. \tag{2.13}$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Поскольку падающая в волноводе нормальная волна и дифрагированная в области $z > (2Q - 1)L$ волна, а также прошедшая через слой волна представляют собой магнитную волну типа $\underline{H}_{10}$, то для сравнения поля $U = U_0 + U_1$, прошедшего в волноводе через множество частиц, и поля H_{zs}, прошедшего через слой S, нужно приравнять амплитуды этих нормальных волн. Для этого нужно выписать поле дифракции U_1 при $z > (2Q - 1)L$ в основной системе координат, связанной с центром сферы S_1. Воспользуемся для поля U_1 представлением (2.1), в котором вместо плотности ν_j следует подставить ее асимптотику (2.9), вычисленную при решении системы (2.10). Пренебрегая экспоненциально затухающими членами, получим следующее выражение для амплитуды магнитной волны полного поля, прошедшего через область, содержащую множество Q частиц, расположенных на оси волновода

$$\begin{gathered} H_z = H_{zd}H\cos\frac{\pi(x - l_1)}{2l_1}\exp[ih_{10}z], \quad H_{zd} = \left\{1 + \frac{i}{h_{10}l_1}\frac{\pi^3 a^3}{l_1^3}\times\right. \\ \left.\times\frac{1 - \exp\left(-iQL\sqrt{k^2 - (\pi/2l_1)^2}\right)}{1 - \exp\left(-iL\sqrt{k^2 - (\pi/2l_1)^2}\right)}\left[\frac{4}{3}x_1 + \frac{4ih_{10}a}{5}x_{Q+1}\right]\right\}, \quad \sqrt{k^2 - (\pi/2l_1)^2} \neq 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Условие $\sqrt{k^2 - (\pi/2l_1)^2} \neq 0$ означает, что электромагнитная волна с волновым числом $k = \pi/2l_1$ не может возбудиться в волноводе. В формуле (3.1) величины x_1 и x_{Q+1} определены по формулам (2.12). Опустим проблемы, связанные со специальным случаем распространения волн через прозрачный слой и слой четверти длины волны [7], поскольку всегда можно выбрать другую частоту волны из рассматриваемого диапазона. Из представления (3.1) следует, что с точностью до $O((a/l_1)^3)$ амплитуда электромагнитного поля H_z, прошедшего через множество частиц в волноводе, равна амплитуде падающей волны H_z^0. В этом случае уравнение (1.7) удовлетворяется при $h_{10} = h_{10}^1$, т.е. скорость света в среде с частицами равна скорости света в вакууме. С точки зрения явления дифракции полученный результат означает, что в исследуемой задаче при заданной геометрии в указанном диапазоне частот электромагнитного поля эффект многократного рассеяния на частицах пренебрежимо мал, поскольку поле прямой дифракции на сферах порядка $O(\delta^3)$, а поле вторичной дифракции порядка $O(\delta^4)$. Эффект изменения скорости света в среде с включениями следует ожидать в средах с высокой концентрацией частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляхов Г.М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М.: Наука, 1982, 288 с.
2. *Алексеев В.Н., Рыбак С.А.* Распространение стационарных звуковых волн в пузырьковых средах // Акустический ж. 1995. Т. 41. № 5. С. 690–698.
3. *Foldy L.L.* The multiple scattering of Waves // Phys. Rev. 1945. V. 67. № 3, 4. P. 107–119.
4. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 2088 с.
5. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т. 2. 320 с.
6. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. Изд. 2. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
7. *Нефедов Е.И.* Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. М.: Наука, 1979. 272 с.
8. *Иванов В.П.* Исследование метода вычисления скорости звука в среде с включениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 8. С. 1470–1479.
9. *Нефедов Е.И., Сивов А.Н.* Электродинамика периодических структур. М.: Наука, 1977. 208 с.
10. *Купрадзе В.Д.* Основные задачи математической теории дифракции. М.–Л.: ГРОТЛ, 1935. 112 с.
11. *Иванов В.П.* Задачи дифракции волн в низкочастотной акустике. М.: Наука, 2004. 470 с.
12. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: 1964. 428 с.
13. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техн. 1968. 584 с.
14. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.