ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 2, с. 247–251

УДК 519.62

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2019 г. Аг. Х. Ханмамедов[1,2,4,*], А. М. Гусейнов[3], М. М. Векилов[1]

([1]AZ1148 Баку, ул. З. Халилова, 23, Бакинский гос. ун-т, Азербайджан;

[2]AZ1141 Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9, Ин-т матем. и механ. НАН Азербайджана, Азербайджан;

[3]AZ2000 Гянджа, пр. Шах Исмаил Хатаи 187, Гянджинский Гос. Ун-т, Азербайджан;

[4]AZ1007 Гянджа, ул. Дж. Гаджибекли, 71, Университет, Азербайджан)

**e-mail: agil_khanmamedov@yahoo.com*

Поступила в редакцию 21.11.2016 г.
Переработанный вариант 30.08.2018 г.

Рассмотрена задача Коши для бесконечномерной системы нелинейных эволюционных уравнений, являющиеся обобщением ленгмюровской цепочки. Установлена глобальная разрешимость задачи в классе быстроубывающих функций. Методом обратной спектральной задачи получен алгоритм для построения решения. Библ. 9.

Ключевые слова: нелинейное эволюционное уравнение, ленгмюровская цепочка, данные рассеяния, метод обратной спектральной задачи.

DOI: 10.1134/S004446691902008X

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается следующая бесконечномерная система нелинейных эволюционных уравнений

$$\dot{c}_n = c_n\left(\alpha\left(c_{n+1}-c_{n-1}\right)-\beta\left(\left(c_{n+1}-c_{n-1}\right)\sum_{k=0}^{2}c_{n+k}\right)\right),\quad c_n=c_n(t),\quad n\in Z,\quad t\in(0,\infty],\quad \cdot=\frac{d}{dt},\qquad (1)$$

где α,β – действительные числа. Эта система впервые исследовалась в работе [1]. Там же установлено, что система уравнений (1) может быть интегрирована методом обратной спектральной задачи. При $\alpha=1,\ \beta=0$ система уравнений (1) представляет собой хорошо известную модель Вольтерра, которая методом обратной спектральной задачи исследовалась в работах многих авторов (см. [1]–[7]).

Для системы уравнений (1) поставим задачу Коши: требуется найти ее решение $c(t)=\left(c_n(t)\right)_{n\in Z}$ по заданному начальному условию

$$c_n(0)=\hat{c}_n>0,\quad n\in Z,\qquad (2)$$

где последовательность $\hat{c}_n$ удовлетворяет условию $\sum_{n\in Z}|n||\hat{c}_n-1|<\infty$. Будем искать решение $c(t)=\left(c_n(t)\right)_{n\in Z}$ задачи (1)–(2) такое, что $x_n(t)=c_n(t)-1$ суть быстроубывающая функция, т.е. при любом $T>0$ удовлетворяет неравенству

$$\left\|M_1(t)\right\|_{C[0,T]}<\infty,\qquad (3)$$

где $M_1(t)=\sum_{n\in Z}(1+|n|)|x_n(t)|$.

В данной работе установлена глобальная разрешимость задачи (1), (2) в классе (3). Методом обратной спектральной задачи указан алгоритм нахождения решения задачи (1), (2). Подобные вопросы для различных нелинейных эволюционных уравнений исследовались в работах [1]–[8].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Как следует из работы [1], ассоциированной с (1) линейной задачей, является дискретное уравнение Штурма–Лиувилля

$$\sqrt{c_{n-1}}y_{n-1} + \sqrt{c_n}y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in Z, \tag{4}$$

где $c_n > 0$ удовлетворяет условию $\sum_{n\in Z}|n||c_n - 1| < \infty$. Поэтому при исследовании задачи (1)–(2) нам понадобится построенная в [2], [4] теория рассеяния для уравнения (4). Пусть $\lambda = z + z^{-1}$. Тогда уравнение (4) имеет решения $f_n^{\pm}(z)$, представимые в виде

$$f_n^{\pm}(z) = \alpha_n^{\pm} z^{\pm n}\left(1 + \sum_{\pm m \geq 1} A_{nm}^{\pm} z^{\pm 2m}\right). \tag{5}$$

На непрерывном спектре, т.е. при $|z| = 1,\ z^2 \neq 1$ верны соотношения

$$f_n^{\mp}(z) = a(z)\overline{f_n^{\pm}(z)} \pm b(z^{\pm 1})f_n^{\pm}(z), \tag{6}$$

где коэффициенты $a(z)$, $b(z)$ определяются формулами

$$a(z) = \frac{\left\{f_n^{+}(z), f_n^{-}(z)\right\}}{z - z^{-1}}, \quad b(z) = \frac{\left\{\overline{f_n^{+}(z)}, f_n^{-}(z)\right\}}{z^{-1} - z},$$

здесь $\{\varphi_n, \psi_n\} = \sqrt{c_n}(\varphi_n\psi_{n+1} - \varphi_{n+1}\psi_n)$ – вронскиан двух решений φ_n и ψ_n. При этом функции $(z - z^{-1})a(z)$, $(z - z^{-1})b(z)$ непрерывны на окружности $|z| = 1$. Кроме того, функция $a(z)$ допускает аналитическое продолжение в круг $|z| < 1$ и там может иметь конечное число простых вещественных нулей z_k, $0 < z_k^2 < 1$, $k = 1, \ldots, N$.

Положим

$$r^{\pm}(z) = \pm\frac{b(z^{\pm 1})}{a(z)}, \quad m_k^{\pm} = \left(\sum_{n\in Z}\left|f_n^{\pm}(z_k)\right|^2\right)^{-1}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Набор величин $\left\{r^{\pm}(z), |z| = 1;\ z_k,\ 0 < z_k^2 < 1;\ m_k^{\pm}, \quad k = 1, \ldots, N\right\}$ соответственно называется правыми и левыми данными рассеяния. Известно, что одни данные рассеяния однозначно определяются другими. По данным рассеяния коэффициент c_n уравнения (4) однозначно восстанавливается по следующему алгоритму.

Алгоритм 1

Пусть известны данные рассеяния.

Шаг 1. Построим функцию

$$F_n^{+} = \sum_{k=1}^{N} m_k^{+} z_k^{n} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} r^{+}(z)z^{n-1}dz. \tag{7}$$

Шаг 2. Найдем A_{nm}^{+} из уравнения типа Марченко

$$F_{2n+2m}^{+} + A_{nm}^{+} + \sum_{k\geq 1} A_{nk}^{+} F_{2n+2m+2k}^{+} = 0, \quad n \in Z, \quad m \geq 1, \tag{8}$$

которое имеет (см. [4]) единственное решение.

Шаг 3. Вычисляем c_n по формулам

$$(\alpha_n^{+})^{-2} = 1 + F_{2n}^{+} + \sum_{k\geq 1} A_{nk}^{+} F_{2n+2k}^{+}, \tag{9}$$

$$c_n = \left(\frac{\alpha_{n+1}^{+}}{\alpha_n^{+}}\right)^2. \tag{10}$$

2. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ (1), (2)

Исследуем глобальную разрешимость задачи (1), (2).

Теорема 1. *Решение задачи* (1)–(2) *существует и единственно в классе* (3)*, если* $M_1(0) < \infty$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что задача (1)–(2) эквивалентна задаче

$$\dot{x}_n = (x_n + 1)(x_{n+1} - x_{n-1})\left\{\alpha - 3\beta - \beta\sum_{k=0}^{2} x_{n+k}\right\}, \tag{11}$$

$$x_n(0) = x_n^0, \tag{12}$$

где $x_n = x_n(t) = c_n(t) - 1$. Пусть B – банахово пространство последовательностей $x = (x_n)_{n\in Z}$ с нормой $\|x\|_B = \sum_{n\in Z}(1 + |n|)|x_n| < \infty$. Тогда множество $C([0,T];B)$ непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций $x(t)$ со значениями в B относительно нормы $\|x(t)\|_{C([0,T]:B)} = \max_{0\le t\le T}\|x(t)\|_B$ является банаховым пространством (см., напр., [9, с. 14]).

Перепишем задачу (11)–(12) в виде операторного уравнения

$$x(t) = x(0) + \int_0^T F(x(\tau))\,d\tau,$$

где $x(t) = (x_n(t))_{n\in Z}$, F есть оператор, порожденный правой частью системы (11). Так как правая часть системы (11) суть многочлен от переменной $x = (x_n)_{n\in Z}$, то при каждом $T > 0$ оператор F непрерывно дифференцируемо отображает пространство $C([0,T];B)$ в себя. Поэтому принцип сжатых отображений применим к последнему уравнению. В результате получаем, что в некотором сегменте $[0,\delta]$ задача (11)–(12) имеет решение $x(t) = (x_n(t))_{n\in Z}$ с конечной нормой $\|x(t)\|_{C([0,\delta]:B)} < \infty$. Докажем, что это решение продолжаемо на каждый конечный отрезок $[0,T]$. Допустим противное. Тогда существует точка $t_0 < T$ такая, что задача (11)–(12) имеет непрерывное на интервале $[0,T)$ решение $x(t) = (x_n(t))_{n\in Z}$, но $\overline{\lim_{t\to t_0}}\|x(t)\|_B = +\infty$.

Пользуясь (11), имеем

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t (x_n(\tau) + 1)(x_{n+1}(\tau) - x_{n-1}(\tau))\left\{\alpha - 3\beta - \beta\sum_{k=0}^{2} x_{n+k}(\tau)\right\}d\tau, \quad t\in[0,t_0). \tag{13}$$

Вводим семейство операторов $L = L(t)$, действующее в пространстве ℓ_2 по формуле

$$(Ly)_n = \sqrt{c_{n-1}(t)}\,y_{n-1} + \sqrt{c_n(t)}\,y_{n+1}, \quad n\in Z.$$

Очевидно, что оператор $L = L(t)$ сильно непрерывно дифференцируем, если только коэффициент $c_n = c_n(t)$ удовлетворяет системе уравнений (1).

Вводим также семейство операторов $A = A(t)$, действующее в пространстве ℓ_2 по формуле

$$(Ay)_n = \frac{1}{2}\left(-\beta\prod_{k-0}^{3}\sqrt{c_{n-1-k}}\,y_{n-4} - \sqrt{c_{n-1}c_{n-2}}\left(-\alpha + \beta\sum_{k=-1}^{2} c_{n-1-k}\right)y_{n-2} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{c_n c_{n+1}}\left(-\alpha + \beta\sum_{k=-1}^{2} c_{n+k}\right)y_{n+2} + \beta\prod_{k=0}^{3}\sqrt{c_{n+k}}\,y_{n+4}\right).$$

Легко усмотреть, что операторы L и A образуют пару Лакса, т.е. система уравнений (1) эквивалентна операторному уравнению

$$\dot{L} = [L, A] = LA - AL. \tag{14}$$

Из последнего соотношения следует [4], что семейство операторов $L(t)$ унитарно эквивалентно. Поэтому при всех $t\in[0,t_0)$ имеет место равенство $\|L(t)\| = \|L(0)\|$. Легко проверить, что при любом

$n \in Z$ верна оценка $|c_n(t)| \le \|L(t)\|^2$. Полагая тогда $C = \|L(0)\|^2 + 1$, получим $|x_n(t)| < C$, $n \in Z$, $t \in [0, t_0)$. Используя теперь (13), находим, что

$$\|x(t)\|_B \le \|x(0)\|_B + (2C + 4)(|\alpha - 3\beta| + 3|\beta| C)\int_0^t \|x(\tau)\|_B \, d\tau.$$

Учитывая лемму Грануолла, из последнего неравенства получаем

$$\|x(t)\|_B \le \|x(0)\|_B \exp\{(2C + 4)(|\alpha - 3\beta| + 3|\beta| C) T\}, \quad t \in (0, t_0),$$

которое противоречит нашему предположению. Следовательно, задача (11)–(12) имеет на отрезке $[0, T]$ единственное решение $x(t) = (x_n(t))_{n \in Z}$ с конечной нормой $\|x(t)\|_{C([0,T]:B)} < \infty$. Тем самым однозначная разрешимость задачи (1)–(2) в классе (4) доказана.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1), (2)

Предположим теперь, что коэффициент $c_n = c_n(t)$ в уравнении (4) зависит от времени и удовлетворяет системе уравнений (1). Установим, каким образом тогда меняются данные рассеяния во времени.

Теорема 2. *Если в уравнении* (4) *с коэффициентом* $c_n = c_n(t)$, *где* $c_n(t)$ *является решением системы уравнений* (1), *то эволюция правых данных рассеяния описывается формулами*

$$\begin{gathered} r^+(z,t) = r^+(z,0)\exp\left\{\beta(z^{-4} - z^4)t + (4\beta - \alpha)(z^{-2} - z^2)t\right\}, \quad z_k(t) = z_k(0) = z_k, \\ m_k^+(t) = m_k^+(0)\exp\left\{\beta(z_k^{-4} - z_k^4)t + (4\beta - \alpha)(z_k^{-2} - z_k^2)t\right\}, \quad k = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{15}$$

Доказательство. Из соотношения (14) следует, что оператор $B = \dfrac{d}{dt} + A$ переводит решения уравнения (4) с параметром t в решения того же уравнения. Используя (5), обычным образом (см. [2], [4], [5]) можно обосновать, что при $n \to \pm\infty$

$$Bf_n^{\pm}(z,t) = \frac{1}{2}\left\{\pm\beta(z^4 - z^{-4}) \pm (4\beta - \alpha)(z^2 - z^{-2})\right\} z^{\pm n} + o(1).$$

Так как уравнение (4) с параметром t имеет единственное решение с такой асимптотикой (см. [2], [4]), то

$$Bf_n^{\pm}(z,t) = \frac{1}{2}\left\{\pm\beta(z^4 - z^{-4}) \pm (4\beta - \alpha)(z^2 - z^{-2})\right\} f_n^{\pm}(z,t).$$

С другой стороны, используя (6), найдем, что при $n \to +\infty$

$$\begin{gathered} Bf_n^-(z,t) = \frac{1}{2}\left\{\dot a(z,t) - \frac{1}{2}\Big(\beta(z^4 - z^{-4}) + (4\beta - \alpha)(z^2 - z^{-2})\Big) a(z,t)\right\} \overline{f_n^+(z,t)} + \\ + \left\{\dot b(z,t) + \frac{1}{2}\Big(\beta(z^4 - z^{-4}) + (4\beta - \alpha)(z^2 - z^{-2})\Big) b(z,t)\right\} f_n^+(z,t). \end{gathered}$$

Сопоставляя это равенство с равенством (6) с параметром t получим два первых равенства из (15). Третье равенство из (15) доказывается аналогично. Разумеется, существуют подобные формулы и для левых данных рассеяния.

Пользуясь теперь соотношениями (15), получаем следующий алгоритм решения задачи (1), (2) методом обратной спектральной задачи.

Алгоритм 2

Дано начальное условие $c_n(0) = \hat c_n$.

Шаг 1. Строим данные рассеяния $\left\{r^+(z,0); z_k(0); m_k^+(0), \quad k = 1, \ldots, N\right\}$.

Шаг 2. Вычисляем совокупность $\left\{r^+(z,t); z_k(t); m_k^+(t), \quad k = 1, \ldots, N\right\}$ по формулам (15).

Шаг 3. Решая по совокупности $\left\{r^+(z,t); z_k(t); m_k^+(t), \quad k = 1, \ldots, N\right\}$ обратную спектральную задачу с помощью алгоритма 1, где в (7) вместо $r^+(z)$, m_k^+ следует подставить $r^+(z,t)$, $m_k^+(t)$, строим решение.

В заключение приведем пример, когда можно построить явное решение задачи (1)–(2). Рассмотрим начальное условие $c_n(0) = \hat{c}_n$, соответствующее данным рассеяния $\left\{r^+(z,0) \equiv 0;\ z_1(0) = z_0,\ 0 < z_0^2 < 1;\ m_1^+(0) = m,\ m > 0\right\}$. Если величина $r^+(z,t)$ равна нулю в начальный момент времени, она остается равной нулю на всех временах. По формулам (15) определим совокупность $\left\{r^+(z,t) \equiv 0; z_1(t) = z_0,\ 0 < z_0^2 < 1;\ m_1^+(t)\right\}$. Применим алгоритм 1. С этой целью строим

$$F_n^+(t) = m z_0^n e^{\omega t}, \tag{16}$$

где $\omega = \beta(z_0^{-4} - z_0^4) + (4\beta - \alpha)(z_0^{-2} - z_0^2)$. В этом случае уравнение (8) с параметром t сводится к линейному алгебраическому уравнению и решается явно. Ищем решение уравнения (8) с параметром t в виде

$$A_{nm}^+(t) = a(n,t)\, z_0^{2m}. \tag{17}$$

Подставляя (16), (17) в уравнение (8), получаем

$$a(n,t) = -\frac{m(1 - z_0^2)e^{\omega t}}{1 - z_0^2 + m z_0^{2n+2} e^{\omega t}}.$$

Следовательно,

$$A_{nm}^+(t) = -\frac{m(1 - z_0^2) z_0^{2m} e^{\omega t}}{1 - z_0^2 + m z_0^{2n+2} e^{\omega t}}.$$

Воспользовавшись теперь (9), (10), найдем решение

$$c_n(t) = \frac{1 + m z_0^{2n} e^{\omega t}\left[1 - \dfrac{m z_0^4 e^{\omega t}}{1 - z_0^2 + m z_0^{2n+2} e^{\omega t}} \dfrac{z_0^4}{1 + z_0^2}\right]}{1 + m z_0^{2n+2} e^{\omega t}\left[1 - \dfrac{m z_0^4 e^{\omega t}}{1 - z_0^2 + m z_0^{2n+4} e^{\omega t}} \dfrac{z_0^4}{1 + z_0^2}\right]}.$$

Такое решение называется солитонным решением. Аналогично можно построить N-солитонное решение, которое имеет место, когда начальному условию $c_n(0) = \hat{c}_n$ соответствуют данные рассеяния вида $\left\{r^+(z,0) \equiv 0;\ z_k(0) = z_k,\ 0 < z_k^2 < 1;\ m_k^+(0) = m_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, N\right\}$.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания, которые способствовали улучшению содержания работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О.И.* Некоторые конструкции интегрируемых динамических систем// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 4. С. 737–767.
2. *Манаков С.В.* О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // Ж. эксперим. и теор. физ. 1974. Т. 67. № 2. С. 543–555.
3. *Березанский Ю.М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральнойзадачи // Докл. АН СССР. 1985. Т. 281. № КС. 16–19.
4. *Teschl G.* Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices // Math. Surv. and Monographs, 72. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2000.
5. *Ханмамедов Аг.Х.* Метод интегрирования задачи Коши для ленгмюровской цепочки с расходящимсяначальным условием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 9. С. 1639–1650.
6. *Верещагин В.Л.* Интегрируемая краевая задача для цепочки Вольтерра на полуоси / / Матем. заметки. 2006. Т. 80. № 5. С. 696–700.
7. *Махмудова М.Г., Ханмамедов Аг.Х.* Асимптотически периодическое решение задачи Коши для ленгмюровской цепочки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 12. С. 1639–1650.
8. *Осипов А.С.* Дискретный аналог уравнения Кортевега-де Фриза: интегрирование методом обратной задачи // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 6. С. 141–144.
9. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.