ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 2, с. 286–300

УДК 517.95:517.84

КЛАССИЧЕСКОЕ И ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А. П. Хромов*, В. В. Корнев

(410012 Саратов, ул. Астраханская, 83, Саратовский нац. исследовательский гос. ун-т, Россия)

**e-mail: KhromovAP@info.sgu.ru*

Поступила в редакцию 02.05.2018 г.

В статье, используя рекомендации А.Н. Крылова по ускорению сходимости рядов Фурье, получены явные выражения классического решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения и обобщенного решения в случае произвольных суммируемых $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$. Библ. 7.

Ключевые слова: метод Фурье, волновое уравнение, суммируемый потенциал, классическое решение, обобщенное решение.

DOI: 10.1134/S0044466919020091

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \qquad x \in [0,1], \qquad t \in [0,\infty), \tag{1}$$

при условиях

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

где все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные, причем $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ из $L[0,1]$ и $f(x,t) \in L[Q_T]$, $Q_T = [0,1]\times[0,T]$ при любом $T > 0$.

Исследование задачи (1)–(3) проводится методом Фурье с использованием резольвентного подхода, предложенного в [1], [2], связанного с разбиением формального решения на части, следуя рекомендациям А.Н. Крылова (см. [3, гл. VI] по ускорению сходимости рядов Фурье, и является продолжением исследований работ [1], [2], [4]–[7]).

1. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Под классическим решением понимаем функцию $u(x,t)$, непрерывную вместе с $u'_x(x,t)$ и $u'_t(x,t)$, причем $u'_x(x,t)$ и $u'_t(x,t)$ абсолютно непрерывны по x и t соответственно, удовлетворяющую условиям (2), (3) и почти всюду уравнению (1). Поэтому в случае классического решения задачи (1)–(3) считаем, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ и $\psi(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $\varphi''(x) \in L[0,1]$, $\psi'(x) \in L[0,1]$.

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье можно представить в виде (см. [5])

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Bigg[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t + (R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho} + \int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Bigg]d\lambda. \tag{4}$$

Здесь $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L: $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1) = 0$, λ – спектральный параметр, E – единичный оператор, $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по x, $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \ge 0$, γ_n – образ в λ-плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \| \rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, r – достаточно велико и фиксировано, n_0 – такой номер, что при $n \ge n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все γ_n при $n \ge n_0$ находятся вне $|\lambda| = r$.

Теорема 1. *Если* $u(x,t)$ – *классическое решение задачи* (1)–(3), *причем дополнительно* $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$ *при любом* $T > 0$, *то оно единственно и находится по формуле* (4), *в которой ряд справа при любом фиксированном* $t > 0$ *сходится абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – классическое решение при условиях теоремы. При фиксированном t решение $u(x,t)$ как функция x принадлежит области определения оператора L. Поэтому

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda u(\cdot,t)\right)d\lambda, \tag{5}$$

где $R_\lambda u(\cdot,t)$ означает, что R_λ применяется к $u(x,t)$ по переменной x, и ряд (5) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$.

Положим $R_\lambda u(\cdot,t) = y(x,t,\lambda)$. Тогда

$$Ly = LR_\lambda u = (L - \lambda E + \lambda E)R_\lambda u = u(x,t) + \lambda R_\lambda u = u(x,t) + \lambda y(x,t,\lambda).$$

Привлекая функцию Грина, имеем

$$y(x,t,\lambda) = \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)u(\xi,t)d\xi.$$

Отсюда верно

$$y'_t(x,t,\lambda) = \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)u'_t(\xi,t)d\xi. \tag{6}$$

А поскольку $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3), то имеем

$$R_\lambda u''_{tt} = -R_\lambda(Lu) + R_\lambda f(\cdot,t). \tag{7}$$

Из (6) получаем

$$y'_t(x,t,\lambda) = \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)u'_t(\xi,0)d\xi + \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)d\xi\int_0^t u''_{tt}(\xi,\tau)d\tau.$$

Но $G(x,\xi,\lambda)u''_{tt}(\xi,\tau) \in L[Q_T]$ по переменным ξ и τ. Поэтому по теореме Фубини

$$\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)u''_{tt}(\xi,\tau)d\xi \in L[0,T]$$

по τ. Значит,

$$y'_t(x,t,\lambda) = \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)u'_t(\xi,0)d\xi + \int_0^t d\tau\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)u''_{tt}(\xi,\tau)d\xi.$$

Отсюда следует, что $y'_t(x,t,\lambda)$ абсолютно непрерывна по t и почти при всех t получаем

$$y''_{tt}(x,t,\lambda) = \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)u''_{tt}(\xi,t)d\xi.$$

Из этой формулы в силу (7) имеем

$$y''_{tt}(x,t,\lambda) = R_\lambda u''_{tt} = R_\lambda(-Lu + f).$$

Но $R_\lambda(L - \lambda E + \lambda E)u = u(x,t) + \lambda R_\lambda u = u(x,t) + \lambda y(x,t,\lambda)$. Следовательно, верно

$$y''_{tt}(x,t,\lambda) = -u(x,t) - \lambda y(x,t,\lambda) + R_\lambda f(\cdot,t),$$

или

$$y''_{tt}(x,t,\lambda) + \lambda y(x,t,\lambda) = -u(x,t) + R_\lambda f(\cdot,t). \tag{8}$$

Кроме того, имеем

$$y(x,0,\lambda) = R_\lambda\varphi, \quad y'_t(x,0,\lambda) = R_\lambda\psi. \tag{9}$$

Из общего решения уравнения (8) при начальных условиях (9) получаем

$$y(x,t,\lambda) = (R_\lambda\varphi)\cos\rho t + (R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^t \sin\rho(t-\tau)\left[-u(x,\tau) + R_\lambda f(\cdot,\tau)\right]d\tau.$$

Теперь в силу того, что функция $\frac{1}{\rho}\int_0^t \sin\rho(t-\tau)u(x,\tau)d\tau$ есть целая по λ, из (5) следует утверждение теоремы.

Следствие 1. Если классическое решение задачи (1)–(3) единственно, то оно определяется формулой (4), т.е. по методу Фурье.

Формула (4) приводит к представлению

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t), \tag{10}$$

где $u_1(x,t)$ есть (4) при $\psi(x) = f(x,t) = 0$, $u_2(x,t)$ есть (4) при $\varphi(x) = f(x,t) = 0$, $u_3(x,t)$ есть (4) при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. Считаем здесь, что все классические решения берутся при условии $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$, а также, что $u(x,t)$ означает и ряд (4), и его сумму.

2. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,\infty), \tag{11}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{12}$$

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0. \tag{13}$$

Теорема 2. *Если* $f(x,t) \in L[Q_T]$, *то ряд формального решения задачи* (11)–(13) *по методу Фурье сходится при всех* x *и* t *и его сумма есть*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)d\eta, \tag{14}$$

где $\tilde{f}(\eta,\tau)$ – *нечетная и* 2*-периодическая по* η, *причем* $\tilde{f}(\eta,\tau) = f(\eta,\tau)$ *при* $\eta \in [0,1]$ (*таким обозначением пользуемся и в дальнейшем*).

Эта теорема установлена в [5] для $f(x,t) \in L_2[Q_T]$ и в [7] для $f(x,t) \in L[Q_T]$.

В этом разделе мы получим следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $f(x,t) \in L[Q_T]$, *почти при каждом* x *функция* $f(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* t *и* $f'_t(x,t) \in L[Q_T]$ *при любом* $T > 0$. *Тогда существует классическое решение задачи* (11)–(13) *и оно дается формулой* (14), *причем* $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$.

Доказательство. Нам представляется удобным приступить сразу к доказательству этой теоремы. Оно весьма большое и некоторые его элементы будем выделять в виде лемм. Теорема 2 подсказывает, что можно ограничиться проверкой того, что в нашем случае формула (14) дает классическое решение. Без ограничения общности считаем, что $f(x,t)$ абсолютно непрерывна по t

при каждом $x \in [0,1]$, так как для тех x, где это не выполняется, можно положить $f(x,t) = 0$, что не влияет на значение $u(x,t)$.

Лемма 1. *При каждом t функция $f(x,t)$ суммируема по $x \in [0,1]$.*

Доказательство. Так как $\iint_{Q_T} |f(x,t)|dxdt < \infty$, то по теореме Фубини функция $f(x,t)$ почти при каждом t суммируема по x. Пусть t_0 одно из таких t. Тогда опять по теореме Фубини имеем

$$\int_0^1 dx \int_{t_0}^t f_t'(x,\tau)d\tau = \int_0^1 [f(x,t) - f(x,t_0)]dx = \int_0^1 f(x,t)dx - \int_0^1 f(x,t_0)dx.$$

Отсюда следует, что $f(x,t) \in L[0,1]$ по x при любом фиксированном t.

Лемма 2. *Функция $u(x,t)$ непрерывна и $u(0,t) = u(1,t) = u(x,0) = 0$.*

Доказательство. Ограничимся доказательством наименее очевидного факта, что $u(1,t) = 0$. В тождестве $\tilde{f}(\eta + 2,\tau) = \tilde{f}(\eta,\tau)$ положим $\eta = \xi - 1$, получим $\tilde{f}(\xi + 1,\tau) = \tilde{f}(\xi - 1,\tau)$, откуда в силу нечетности $\tilde{f}(\eta,\tau)$ по η следует нечетность $\tilde{f}(\eta,\tau)$ относительно $\eta = 1$: $\tilde{f}(1 + \xi,\tau) = -\tilde{f}(1 - \xi,\tau)$. Таким образом,

$$\int_{1-(t-\tau)}^{1+(t-\tau)} \tilde{f}(\eta,\tau)d\eta = 0.$$

Лемма 3. *Функция $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по t, причем имеет место формула*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = J_1(x,t) + J_2(x,t), \tag{15}$$

где

$$J_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{f}(x + t - \tau,\tau)d\tau, \quad J_2(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{f}(x - t + \tau,\tau)d\tau.$$

Функции $J_1(x,t)$ и $J_2(x,t)$ непрерывны по x и t.

Доказательство. Если $\tilde{f}(x,t)$ непрерывна, то формула (15) получается обычным дифференцированием интеграла (14). Пусть теперь $f(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда правая часть (15) пока что лишена смысла (нечто вроде формального решения по методу Фурье). Выполним в $J_1(x,t)$ пока формально замену переменного $\xi = x + t - \tau$. Получим

$$J_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_x^{x+t} \tilde{f}(\xi, x + t - \xi)d\xi. \tag{16}$$

А вот теперь правая часть (16) имеет смысл, так как верно равенство

$$\begin{aligned}\int_x^{x+t} \tilde{f}(\xi, x + t - \xi)d\xi &= \int_x^{x+t} [\tilde{f}(\xi, x + t - \xi) - \tilde{f}(\xi,0)]d\xi + \int_x^{x+t} \tilde{f}(\xi,0)d\xi = \\ &= \int_x^{x+t} d\xi \int_x^{x+t-\xi} \tilde{f}_t(\xi,\tau)d\tau + \int_x^{x+t} \tilde{f}(\xi,0)d\xi.\end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда получаем, что интеграл (16) существует и представляет собой непрерывную функцию по x и t. Аналогично убеждаемся, что и $J_2(x,t)$ есть

$$J_2(x,t) = \frac{1}{2}\left[\int_{x-t}^{x} d\xi \int_0^{-x+t+\xi} \tilde{f}_t(\xi,\eta)d\eta + \int_{x-t}^{x} \tilde{f}(\xi,0)d\xi\right],$$

т.е. и $J_2(x,t)$ есть непрерывная функция по x и t.

Теперь, поскольку $u(x,0)=0$, есть основание ожидать, что

$$\int_0^t [J_1(x,\tau)+J_2(x,\tau)]d\tau = u(x,t).$$

В самом деле, пользуясь теоремой Фубини, имеем

$$2\int_0^t [J_1(x,\tau)+J_2(x,\tau)]d\tau = \int_0^t d\tau\int_0^\tau \tilde f(x+\tau-\xi,\xi)d\xi + \int_0^t d\tau\int_0^\tau \tilde f(x-\tau+\xi,\xi)d\xi =$$
$$= \int_0^t d\xi\int_\xi^t \tilde f(x+\tau-\xi,\xi)d\tau + \int_0^t d\xi\int_\xi^t \tilde f(x-\tau+\xi,\xi)d\tau =$$
$$= \int_0^t d\xi \int_x^{x+t-\xi} \tilde f(\eta,\xi)d\eta + \int_0^t d\xi\int_x^{x-t+\xi} \tilde f(\eta,\xi)(-d\eta) = \int_0^t d\xi \int_{x-t+\xi}^{x+t-\xi} \tilde f(\eta,\xi)d\eta = 2u(x,t).$$

Лемма 4. *Функция $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x, причем*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = J_1(x,t) - J_2(x,t). \tag{18}$$

Доказательство. Если $\tilde f(x,t)$ непрерывна, то очевидно, что $u(x,t)$ из (14) непрерывно дифференцируема по x и справедлива (18). Пусть теперь $f(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. В лемме 3 было показано, что $J_1(x,t)$ и $J_2(x,t)$ непрерывны по x и t. Положим

$$Q(x,t) = J_1(x,t) - J_2(x,t).$$

Имеем

$$2\int_0^x Q(\xi,t)d\xi = \int_0^t d\tau\int_0^x [\tilde f(\xi+t-\tau,\tau) - \tilde f(\xi-t+\tau,\tau)]d\xi =$$
$$= \int_0^t d\tau\left[\int_{t-\tau}^{x+t-\tau} \tilde f(\eta,\tau)d\eta - \int_{-t+\tau}^{x-t+\tau} \tilde f(\eta,\tau)d\eta\right] + \int_0^t d\tau\int_{-t+\tau}^{t-\tau} \tilde f(\eta,\tau)d\eta =$$
$$= \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde f(\eta,\tau)d\eta = 2u(x,t).$$

Теперь приступим к нахождению u''_{tt} и u''_{xx}. Для этого в силу лемм 3 и 4 надо найти производные по x и t у функций $J_1(x,t)$ и $J_2(x,t)$.

Лемма 5. *При фиксированном x функция $J_1(x,t)$ абсолютно непрерывна по t, причем почти при всех t*

$$2\frac{\partial J_1(x,t)}{\partial t} = \tilde f(x+t,0) + \int_x^{x+t} \tilde f'_t(\xi, x+t-\xi)d\xi. \tag{19}$$

Доказательство. Если $\tilde f(x,t)$ и $\tilde f'_t(x,t)$ непрерывны, то (19) сразу следует из (16). Пусть теперь $\tilde f(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Обозначим правую часть (19) через

$$g(x,t) = \tilde f(x+t,0) + \int_x^{x+t} \tilde f'_t(\xi, x+t-\xi)d\xi.$$

По лемме 1 функция $\tilde f(x+t,0)$ интегрируема по t. Рассмотрим интеграл

$$A = \int_0^t d\eta \int_x^{x+\eta} \tilde f'_t(\xi, x+\eta-\xi)d\xi.$$

Покажем, что он существует. Выполнив в нем замену $\eta = \eta_1$ и $\xi = x + \eta - \xi_1$, получим

$$A = \iint\limits_D \tilde{f}_t'(\eta_1, \xi_1) d\eta_1 d\xi_1$$

(D – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$), который существует. По теореме Фубини существует и A, в котором при фиксированном x интеграл $\int_x^{x+\eta} \tilde{f}_t'(\xi, x + t - \xi) d\xi$ существует почти при всех η и интегрируем по η. Таким образом, A как функция t абсолютно непрерывна. Значит, интеграл $\int_0^t g(x, \eta) d\eta$ абсолютно непрерывен по t. В интеграле A поменяем порядок интегрирования. Получим

$$A = \int\limits_x^{x+t} d\xi \int\limits_{\xi - x}^{t} \tilde{f}_t'(\xi, x + \eta - \xi) d\eta. \tag{20}$$

Во внутреннем интеграле в (20) выполним замену $\tau = x + \eta - \xi$. Тогда в силу (16) и (17) имеем

$$A = \int\limits_x^{x+t} d\xi \int\limits_0^{x+t-\xi} \tilde{f}_t'(\xi, \tau) d\tau = 2J_1(x, t) - \int\limits_x^{x+t} \tilde{f}(\xi, 0) d\xi.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_0^t g(x, \eta) d\eta = \int\limits_0^t \tilde{f}(x + \eta, 0) d\eta + 2J_1(x, t) - \int\limits_x^{x+t} \tilde{f}(\xi, 0) d\xi = 2J_1(x, t).$$

Следовательно, $J_1(x, t)$ абсолютно непрерывна по t и верна формула (20).

Лемма 6. *При фиксированном t функция $J_1(x, t)$ абсолютно непрерывна по x и почти при всех x*

$$2\frac{\partial J_1(x, t)}{\partial x} = \tilde{f}(x + t, 0) - \tilde{f}(x, t) + \int\limits_x^{x+t} \tilde{f}_t'(\xi, x + t - \xi) d\xi. \tag{21}$$

Доказательство. Если $\tilde{f}(x, t)$ и $\tilde{f}_t'(x, t)$ непрерывны, то формула (21) получается дифференцированием интеграла

$$2J_1(x, t) = \int\limits_x^{x+t} \tilde{f}(\xi, x + t - \xi) d\xi.$$

Пусть теперь $f(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Фиксируем t. По лемме 1 функции $\tilde{f}(x + t, 0)$ и $\tilde{f}(x, t)$ суммируемы по x. Положим

$$B = \int\limits_x^{x+t} \tilde{f}_t'(\xi, x + t - \xi) d\xi.$$

Покажем, что B как функция x суммируема. В самом деле, повторный интеграл

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{x+t-\xi} \tilde{f}_t'(\xi, x + t - \xi) d\xi \tag{22}$$

заменой $\xi_1 = \xi$, $x_1 = x + t - \xi$ превращается в сходящийся двойной и, следовательно, (22) как двойной существует. Поэтому по теореме Фубини B как функция x суммируема. Пусть

$$g(x, t) = \tilde{f}(x + t, 0) - \tilde{f}(x, t) + \int\limits_x^{x+t} \tilde{f}_t'(\xi, x + t - \xi) d\xi.$$

Мы только что установили, что $g(x,t)$ суммируема по x и тем самым функция $\int_0^x g(\xi,t)d\xi$ абсолютно непрерывна по x. Изучим эту функцию. Имеем

$$\int_0^x g(\xi,t)d\xi = \int_0^x \tilde{f}(\xi+t,0)d\xi - \int_0^x \tilde{f}(\xi,t)d\xi + \int_0^x d\xi \int_\xi^{\xi+t} \tilde{f}_t(\eta,\xi+t-\eta)d\eta. \tag{23}$$

Повторный интеграл в (23) запишем в виде

$$D(x,t) = \int_0^x d\xi \int_0^{\xi+t} \tilde{f}_t'(\eta,\xi+t-\eta)d\eta - \int_0^x d\xi \int_0^\xi \tilde{f}_t'(\eta,\xi+t-\eta)d\eta = M_1 - M_2. \tag{24}$$

Изменяя в M_1 порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^x d\xi \int_0^t \tilde{f}_t'(\eta,\xi+t-\eta)d\eta + \int_0^x d\xi \int_t^{\xi+t} \tilde{f}_t'((\eta,\xi+t-\eta)d\eta = \\ &= \int_0^t d\eta \int_0^x \tilde{f}_t'((\eta,\xi+t-\eta)d\xi + \int_t^{x+t} d\eta \int_{\eta-t}^x \tilde{f}_t'((\eta,\xi+t-\eta)d\xi = \\ &= \int_0^t [\tilde{f}(\eta,\xi+t-\eta) - \tilde{f}(\eta,t-\eta)]d\eta + \int_t^{x+t} [\tilde{f}(\eta,\xi+t-\eta) - \tilde{f}(\eta,0)]d\eta. \end{aligned} \tag{25}$$

Аналогичная процедура для M_2 дает

$$M_2 = \int_0^x d\eta \int_\eta^x \tilde{f}_t'((\eta,\xi+t-\eta)d\xi = \int_0^x [\tilde{f}(\eta,\xi+t-\eta) - \tilde{f}(\eta,t)]d\eta. \tag{26}$$

Из (23) с помощью (24)–(26) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^x g(\xi,t)d\xi &= \int_0^x \tilde{f}(\xi+t,0)d\xi - \int_0^x \tilde{f}(\xi,t)d\xi + M_1 - M_2 = \\ &= \int_0^x \tilde{f}(\eta+t,0)d\eta - \int_0^x \tilde{f}(\eta,t)d\eta + \int_0^t [\tilde{f}(\eta,x+t-\eta) - \tilde{f}(\eta,t-\eta)]d\eta + \\ &+ \int_t^{x+t} [\tilde{f}(\eta,x+t-\eta) - \tilde{f}(\eta,0)]d\eta - \int_0^x [\tilde{f}(\eta,x+t-\eta) - \tilde{f}(\eta,t)]d\eta = \\ &= \int_0^{x+t} \tilde{f}(\eta,x+t-\eta)d\eta = 2J_1(x,t), \end{aligned}$$

т.е. $J_1(x,t)$ абсолютно непрерывна по x и почти всюду $2\dfrac{\partial J_1(x,t)}{\partial x} = g(x,t)$.

Лемма 7. *При фиксированном x функция $J_2(x,t)$ абсолютно непрерывна по t, причем при почти всех t имеем*

$$2\frac{\partial J_2(x,t)}{\partial t} = \tilde{f}(x-t,0) + \int_{x-t}^x \tilde{f}_t'(\xi,\xi-x+t)d\xi. \tag{27}$$

Лемма 8. *При фиксированном t функция $J_2(x,t)$ абсолютно непрерывна по x, причем при почти всех x имеем*

$$2\frac{\partial J_2(x,t)}{\partial x} = \tilde{f}(x,t) - \tilde{f}(x-t,0) - \int_{x-t}^x \tilde{f}_t'(\xi,\xi-x+t)d\xi. \tag{28}$$

Эти леммы получаются аналогично леммам 5 и 6.

Приступим к завершению доказательства теоремы 3. Из лемм 3 и 4 следует, что $u(x,t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x и t, причем $u_t'(x,0)=0$. Таким образом, на основании леммы 2 начальные и граничные условия выполняются. Далее, из лемм 5–8 и формул (27), (28) заключаем, что функции $u_x'(x,t)$ и $u_t'(x,t)$ абсолютно непрерывны по x и по t соответственно и почти всюду по x и t верно

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial t}((u_t'(x,t))-\frac{\partial}{\partial x}((u_x'(x,t))=J_{1t}'(x,t)+J_{2t}'(x,t)-J_{1x}'(x,t)+J_{2x}'(x,t)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\tilde f(x+t,0)+\int_x^{x+t}\tilde f_t'(\xi,x+t-\xi)d\xi+\tilde f(x-t,0)-\int_{x-t}^{x}\tilde f_t'(\xi,\xi-x+t)d\xi-\tilde f(x+t,0)+\right.$$

$$\left.+\tilde f(x,t)-\int_x^{x+t}\tilde f_t'(\xi,x+t-\xi)d\xi+\tilde f(x,t)-\tilde f(x-t,0)-\int_{x-t}^{x}\tilde f_t'(\xi,\xi-x+t)d\xi\right]=\tilde f(x,t),$$

т.е. уравнение (1) выполняется почти всюду. Кроме того, согласно леммам 5 и 7, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\in L[Q_T]$. Теорема полностью доказана.

3. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ $\psi(x)=f(x,t)=0$

В этом разделе считаем, что $u_1(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) при $\psi(x)=f(x,t)=0$. Представим ряд (4) для $u_1(x,t)$ в виде

$$u_1(x,t)=u_{10}(x,t)+u_{11}(x,t), \tag{29}$$

где $u_{10}(x,t)$ получатся из $u_1(x,t)$ заменой $R_\lambda\varphi$ на $R_\lambda^0\varphi$, $u_{11}(x,t)$ получается из $u_1(x,t)$ заменой $R_\lambda\varphi$ на $R_\lambda\varphi-R_\lambda^0\varphi$. Здесь $R_\lambda^0=(L^0-\lambda E)^{-1}$ и L^0 есть L при $q(x)=0$.

Лемма 9. *Сумма ряда $u_{10}(x,t)$ есть $a_0(x,t)$, где $a_0(x,t)\frac{1}{2}[\tilde\varphi(x+t)+\tilde\varphi(x-t)]$, $\tilde\varphi(x)$ нечетна и 2-периодична по $x\in\mathbb{R}$ и $\tilde\varphi(x)=\varphi(x)$ при $x\in[0,1]$. Ряд $u_{11}(x,t)$ сходится при каждом t абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$.*

Доказательство. По теореме вычетов рядов $u_{10}(x,t)$ есть

$$u_{10}(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi),\sin n\pi\xi)\sin n\pi x\cos n\pi t,$$

где $(f,g)=\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$. Отсюда следует, что

$$u_{10}(x,t)=\Sigma_+ +\Sigma_-,$$

где

$$\Sigma_\pm=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi),\sin n\pi\xi)\sin n\pi(x\pm t).$$

Поскольку $u_1(x,t)$ — классическое решение, то в силу условий на $\varphi(x)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi),\sin n\pi\xi)\sin n\pi x$ сходится абсолютно и равномерно по x на всей оси и его сумма есть $\frac{1}{2}\tilde\varphi(x)$. Следовательно, сумма ряда $u_{10}(x,t)$ равна

$$u_{10}(x,t)=\frac{1}{2}[\tilde\varphi(x+t)+\tilde\varphi(x-t)].$$

Наконец, из теоремы 1 и полученной сходимости ряда $u_{10}(x,t)$ следует утверждение леммы для ряда $u_{11}(x,t)$.

Далее, очевидно, что $u_{10}(x,t) = a_0(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) в случае $q(x) = \psi(x) = f(x,t) = 0$ и $\dfrac{\partial^2 u_{10}(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$, т.е. имеют место равенства

$$\frac{\partial^2 u_{10}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{10}(x,t)}{\partial x^2},$$
$$u_{10}(0,t) = u_{10}(1,t) = 0,$$
$$u_{10}(x,0) = \varphi(x), \quad u'_{10,t}(x,0) = 0.$$

Обозначим через Π множество всех функций $f(x,t)$ нечетных и 2-периодичных по x на всей оси (t – параметр). Таким образом, Π является образом ранее введенной однозначной линейной операции $\tilde{f}(x,t)$ продолжения $f(x,t)$ по x с отрезка $[0,1]$ на всю ось. Легко видеть, что если $f(x,t) \in \Pi$, то и $\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\eta,\tau)d\eta \in \Pi$. Далее считаем, что $q(x)$ продолжена четно и 2-периодично на всю ось. Очевидно, что если $f(x,t) \in \Pi$, то и $q(x)f(x,t) \in \Pi$. Кроме того, для упрощения обозначений значком ~ теперь пользоваться не будем, так как из текста будет ясно, о каких функциях идет речь.

Отсюда следует, что $u_{11}(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) с условием $\dfrac{\partial^2 u_{11}(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$ и $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, $f(x,t) = f_0(x,t)$, где

$$f_0(x,t) = -q(x)a_0(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \tag{30}$$

Таким образом, имеют место равенства

$$\frac{\partial^2 u_{11}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{11}(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u_{11}(x,t) + f_0(x,t),$$
$$u_{11}(0,t) = u_{11}(1,t) = 0,$$
$$u_{11}(x,0) = u'_{11,t}(x,0) = 0.$$

По теореме 1 для $u_{11}(x,t)$ имеет место формула

$$u_{11}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\lambda. \tag{31}$$

Теперь так же, как для $u_1(x,t)$, представим ряд (31) в виде

$$u_{11}(x,t) = a_1(x,t) + u_{12}(x,t), \tag{32}$$

где $a_1(x,t)$ получается из (31) заменой R_λ на R_λ^0, $u_{12}(x,t)$ получается заменой R_λ на $R_\lambda - R_\lambda^0$. Исследование формулы (32) сложнее, чем формулы (29).

Лемма 10. *Функция $f_0(x,t)$ является нечетной и 2-периодической по $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Из (30) имеем

$$f_0(x+2,t) = -q(x+2)a_0(x+2,t) = -\frac{1}{2}q(x)[\tilde{\varphi}(x+2+t) + \tilde{\varphi}(x+2-t)] =$$
$$= -\frac{1}{2}q(x)[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] = -q(x)a_0(x,t) = f_0(x,t),$$

т.е. $f_0(x,t)$ есть 2-периодическая функция. Рассмотрим

$$f_0(-x,t) = -q(-x)a_0(-x,t) = -q(x)[\tilde{\varphi}(-x+t) + \tilde{\varphi}(-x-t)] =$$
$$= -q(x)[-\tilde{\varphi}(x-t) - \tilde{\varphi}(x+t)] = q(x)[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] = -f_0(x,t),$$

т.е. $f_0(x,t)$ нечетная.

Лемма 11. *Сумма ряда* $a_1(x,t)$ *есть*

$$a_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f_0(\eta,\tau)d\eta. \tag{33}$$

Ряд $u_{12}(x,t)$ *сходится при каждом* t *абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$.

Доказательство. Функция $f_0(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Поэтому, с учетом леммы 10, ряд $a_1(x,t)$ сходится к функции (33) и функция $a_1(x,t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) в случае $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$ и $f(x,t) = f_0(x,t)$. Следовательно, по теореме 1 ряд $a_1(x,t)$ при каждом t сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$. Отсюда, с учетом, что $u_{11}(x,t)$ – тоже классическое решение, следует утверждение леммы для ряда $u_{12}(x,t)$.

Следствие 2. Функция $u_{12}(x,t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) с условиями

$$\frac{\partial^2 u_{12}(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T] \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \psi(x) = 0, \quad f(x,t) = -q(x)a_1(x,t).$$

Лемма 12. *Функция* $a_1(x,t)$, *определенная по формуле* (33), *является нечетной и* 2*-периодической по* $x \in \mathbb{R}$ *и линейно зависит от* $\varphi(x)$.

Доказательство. Линейная зависимость $a_1(x,t)$ от $\varphi(x)$ легко следует из определения $a_0(x,t)$ (лемма 9), формул (30), (33) и однозначного определения операции нечетного 2-периодического продолжения с $[0,1]$ на $\mathbb{R}$. Далее, в силу леммы 10

$$a_1(x+2,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x+2-t+\tau}^{x+2+t-\tau} f_0(\eta,\tau)d\eta = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f_0(\eta,\tau)d\eta = a_1(x,t),$$

т.е. $a_1(x,t)$ – 2-периодическая. Убедимся теперь, что $a_1(x,t)$ нечетная. В самом деле.

$$a_1(-x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{-x-t+\tau}^{-x+t-\tau} f_0(\eta,\tau)d\eta.$$

Но в силу леммы 10 имеем

$$\int_{-x-t+\tau}^{-x+t-\tau} = \int_{-(x+t-\tau)}^{0} + \int_{0}^{-(x-t+\tau)} = -\int_{0}^{-(x+t-\tau)} - \int_{-(x-t+\tau)}^{0} = -\int_{-(x-t+\tau)}^{-(x+t-\tau)} = -\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}.$$

Поэтому верно

$$a_1(-x,t) = -\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f_0(\eta,\tau)d\eta = -a_1(x,t).$$

Продолжим этот процесс до бесконечности по формулам

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f_{n-1}(\eta,\tau)d\eta, \tag{34}$$

$$f_n(x,t) = -q(x)a_n(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{35}$$

$$u_{1n}(x,t) = a_n(x,t) + u_{1,n+1}(x,t), \quad n = 1,2,\ldots . \tag{36}$$

Аналогично леммам 9–12 устанавливаются следующие две леммы.

Лемма 13. *Функции* $a_n(x,t)$, $f_n(x,t)$ *принадлежат* Π *и линейно зависят от* $\varphi(x)$.

Лемма 14. *Функции* $u_{1n}(x,t)$, $n = 1,2,\ldots$, *есть классическое решение задачи* (1)–(3) *при* $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, $f(x,t) = f_{n-1}(x,t)$ *и* $\dfrac{\partial^2 u_{1n}(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$.

Лемма 15. *Имеют место формулы*

$$u_1(x,t) = A_n(x,t) + \Omega_n(x,t), \quad n = 1,2,\ldots,$$

где

$$A_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x,t),$$

$$\Omega_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{k\ge n_0}\int\limits_{\gamma_k}\right)\left[\int\limits_0^t \left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)(f_{n-1}(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right]d\lambda.$$

Доказательство. По формулам (29) и (36) имеем

$$u_1(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x,t) + u_{1n}(x,t), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{37}$$

По лемме 14 функция $u_{1n}(x,t)$ – классическое решение. Тогда в силу теорем 1 и 3 получим

$$u_{1n}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{k\ge n_0}\int\limits_{\gamma_k}\right)\left[\int\limits_0^t R_\lambda\,(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right]d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{k\ge n_0}\int\limits_{\gamma_k}\right)\left[\int\limits_0^t R_\lambda^0\,(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right]d\lambda + \Omega_n(x,t) = a_n(x,t) + \Omega_n(x,t).$$

Отсюда и из (37) следует утверждение леммы.

Лемма 16. *Пусть $t \in [0,T]$, T – произвольное положительное число, m – наименьшее натуральное число, такое что $T \le m$. Тогда справедливы оценки*

$$\|a_n(x,t)\|_{C[Q_T]} \le M_1\left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $M_1 = \|a_1(x,t)\|_{C[Q_T]}$, $M_2 = (2m+1)\|q\|_1$ ($\|\cdot\|_1$ – норма в $L[0,1]$). Кроме того, $M_1 \le C_T\,\|\varphi\|_1$, постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Доказательство. Как видно из формул (34), (35),

$$f_n(x,t) \in L[Q_T], \quad a_n(x,t) \in C[Q_T], \quad n = 1, 2, \ldots .$$

При $n = 1$ оценка

$$|a_n(x,t)| \le M_1\left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{38}$$

очевидно, выполняется.

Предположим, что (38) выполняется для некоторого n. Докажем, что она выполняется и для $n+1$. Рассмотрим

$$|a_{n+1}(x,t)| \le \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x-t+\tau}|f_n(\eta,\tau)|d\tau \le \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-m}^{m+1}|f_n(\eta,\tau)|d\eta \le \frac{2m+1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^1|q(\eta)||a_n(\eta,\tau)|d\eta \le$$

$$\le \frac{2m+1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^1|q(\eta)|\left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1}M_1\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}d\eta = \frac{2m+1}{2}\left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1}M_1\int\limits_0^1|q(\eta)|d\eta\int\limits_0^t\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}d\tau = M_1\left(\frac{M_2}{2}\right)^n\frac{t^n}{n!}.$$

Следовательно, (38) справедлива для любого $n = 1, 2, \ldots$

Оценим M_1. Рассмотрим

$$|a_1(x,t)| \le \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}|f_0(\eta,\tau)|d\eta \le \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{-m}^{m+1}|f_0(\eta,\tau)|d\eta =$$

$$= \frac{2m+1}{2}\int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^1|f_0(\eta,\tau)|d\eta \le \frac{2m+1}{2}\int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^1|q(\eta)|(|\tilde\varphi(\eta+\tau)| + |\tilde\varphi(\eta-\tau)|)d\eta =$$

$$= \frac{2m+1}{2}\int_0^1 |q(\eta)|d\eta \left(\int_0^T |\tilde{\varphi}(\eta+\tau)|d\tau + \int_0^T |\tilde{\varphi}(\eta-\tau)|d\tau \right) \le$$

$$\le \frac{2m+1}{2}\int_0^1 |q(\eta)|d\eta \left(m\int_0^1 |\varphi(\tau)|d\tau + m\int_0^1 |\varphi(\tau)|d\tau \right) = c_T\int_0^1 |\varphi(x)|dx.$$

Теорема 4. *Если* $u_1(x,t)$ *— классическое решение задачи* (1)–(3) *при* $\psi(x) = f(x,t) = 0$, *то*

$$u_1(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t) \tag{39}$$

и ряд $A(x,t)$ *сходится абсолютно и равномерно по* $x,t \in Q_T$ *при любом* $T > 0$.

Доказательство. Из леммы 16 следует, что ряд $A(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно по $x,t \in Q_T$. На основании оценок, полученных в [5], заключаем, что при $\rho \in \tilde{\gamma}_k$ имеем

$$\left| (R_\lambda - R_\lambda^0)(f_n(\cdot,\tau)) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho} \right| \le \frac{c}{k^3}\int_0^1 |f_n(x,\tau)|d\tau, \tag{40}$$

где c — константа, не зависящая от k и τ, а в силу леммы 16 получим

$$\int_0^1 |f_n(x,\tau)|dx \le M_1 \left(\frac{M_2 T}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 |q(x)|dx. \tag{41}$$

Из оценок (40) и (41) получаем, что остаточный член $\Omega_n(x,t)$ в лемме 15 равномерно по $x,t \in Q_T$ стремится к нулю. Следовательно, справедлива формула (39).

Следствие 3. Как видно из доказательства, ряд $A(x,t)$ сходится и в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$, при этом

$$A(x,t) = v(x,t) \in L[Q_T]. \tag{42}$$

Как показано в [4], имеет место

Теорема 5. *Если* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *абсолютно непрерывны,* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $L\varphi \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$, *то классическое решение* $u_1(x,t)$ *задачи* (1)–(3) *при любом* $T > 0$ *существует и для него справедлива формула* (39).

Теорема 6. *Пусть* $\varphi(x) \in L[0,1]$ *и* $u_{1h}(x,t)$ *есть классическое решение задачи* (1)–(3) *для* $u_1(x,t)$ *с* $\varphi_h(x)$ *вместо* $\varphi(x)$, $\lim\limits_{h\to 0}\|\varphi_h - \varphi\|_1 = 0$. *Тогда* $\lim\limits_{h\to 0}\|u_{1h}(x,t) - v(x,t)\|_{L[Q_T]} = 0$.

Доказательство. По лемме 16 имеем

$$|v(x,t)| \le \frac{1}{2}\left(|\tilde{\varphi}(x+t)| + |\tilde{\varphi}(x-t)|\right) + c_T e^{\frac{M_2 T}{2}} \|\varphi\|_1.$$

Поэтому

$$|v|_{L[Q_T]} \le m\|\varphi\|_1 + T c_T e^{\frac{M_2 T}{2}} \|\varphi\|_1 = \tilde{c}_T \|\varphi\|_1. \tag{43}$$

Неравенство (43) справедливо и для $v(x,t) = u_{1h}(x,t)$, $\varphi(x) = \varphi_h(x)$.

Из этих неравенств, учитывая, что в силу леммы 13 функция $v(x,t)$ линейно зависит от $\varphi(x)$, имеем

$$\|u_{1h}(x,t) - v(x,t)\|_{L[Q_T]} \le \tilde{c}_T \|\varphi_h - \varphi\|_1.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Таким образом, функцию $v(x,t)$ из (34) можно рассматривать как обобщенное решение задачи (1)–(3) для $u_1(x,t)$.

4. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ $\varphi(x) = f(x,t) = 0$

В этом разделе считаем, что $u_2(x,t)$ из (10) есть классическое решение (1)–(3) при $\varphi(x) = f(x,t) = 0$. Представим ряд (4) для $u_2(x,t)$ в виде

$$u_2(x,t) = u_{20}(x,t) + u_{21}(x,t),$$

где $u_{20}(x,t)$ получается из $u_2(x,t)$ заменой $R_\lambda\psi$ на $R_\lambda^0\psi$, $u_{21}(x,t)$ получается из $u_2(x,t)$ заменой $R_\lambda\psi$ на $R_\lambda\psi - R_\lambda^0\psi$.

Лемма 17. *Сумма ряда $u_{20}(x,t)$ есть $b_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\tilde{\psi}(\tau)d\tau$, где $\tilde{\psi}(x)$ нечетна и 2-периодична по $x \in \mathbb{R}$ и $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$ при $x \in [0,1]$. Ряд $u_{21}(x,t)$ сходится при каждом t абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$.*

Доказательство. В рассматриваемом случае $\psi(x)$ абсолютно непрерывна и $\psi(0) = \psi(1) = 0$, поэтому $\tilde{\psi}(x)$ тоже абсолютно непрерывна по $x \in \mathbb{R}$. Из определения $b_0(x,t)$ непосредственно следует, что $b_0(x,t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) при $\psi(x) = q(x) = f(x,t) = 0$ и удовлетворяет условию $\frac{\partial^2 b_0(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$. Следовательно, по теореме 1 ряд $u_{20}(x,t)$ при каждом t сходится к $b_0(x,t)$ равномерно по $x \in [0,1]$. Из этой сходимости следует утверждение леммы для ряда $u_{21}(x,t)$.

Итак, $u_{20}(x,t) = b_0(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) в случае $q(x) = \varphi(x) = f(x,t) = 0$ и с условием $\frac{\partial^2 u_{20}(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$, т.е.

$$\frac{\partial^2 u_{20}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{20}(x,t)}{\partial x^2},$$
$$u_{20}(0,t) = u_{20}(1,t) = 0,$$
$$u_{20}(x,0) = 0, \quad u'_{20,t}(x,0) = \psi(x).$$

Отсюда следует, что $u_{21}(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) с условием $\frac{\partial^2 u_{21}(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$ и $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, $f(x,t) = g_0(x,t)$, где

$$g_0(x,t) = -q(x)b_0(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \ge 0.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям разд. 3 после формулы (30). В результате верна

Теорема 7. *Если $u_2(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = f(x,t) = 0$, то*

$$u_2(x,t) = B(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x,t),$$

где

$$b_n(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g_{n-1}(\eta,\tau)d\eta, \quad n \ge 1,$$
$$g_n(x,t) = -q(x)b_n(x,t), \quad n \ge 0,$$

и ряд $B(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T > 0$.

Как показано в [6], такое классическое решение существует, если $\psi(x)$ абсолютно непрерывна, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\psi'(x) \in L_2[0,1]$.

Ряд $B(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T и при любой $\psi(x) \in L[0,1]$. Обозначим его сумму в этом случае через $w(x,t)$. Теорема 6 имеет место и в этом случае, причем здесь из

$\lim\limits_{h\to 0}\|\psi_h-\psi\|_1=0$ следует $\lim\limits_{h\to 0}\|u_{2h}(x,t)-w(x,t)\|_{C[Q_T]}=0$. Таким образом, функцию $w(x,t)$ можно рассматривать как обобщенное решение задачи (1)–(3) для $u_2(x,t)$.

5. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ $\varphi(x)=\psi(x)=0$

В этом разделе считаем, что $u_3(x,t)$ из (10) есть классическое решение (1)–(3) при $\varphi(x)=\psi(x)=0$ и $f(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.

Представим ряд (4) для $u_3(x,t)$ в виде

$$u_3(x,t)=u_{30}(x,t)+u_{31}(x,t),$$

где $u_{30}(x,t)$ получается из $u_3(x,t)$ заменой $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ на $R_\lambda^0(f(\cdot,\tau))$, $u_{31}(x,t)$ получается из $u_3(x,t)$ заменой $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ на $R_\lambda(f(\cdot,\tau))-R_\lambda^0(f(\cdot,\tau))$.

Лемма 18. *Сумма ряда $u_{30}(x,t)$ есть $d_0(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde{f}(\eta,\tau)d\eta$, а ряд $u_{31}(x,t)$ сходится при каждом t абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$.*

Доказательство. По теореме 3 функция $d_0(x,t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) при $q(x)=\varphi(x)=\psi(x)=0$ и удовлетворяет условию $\frac{\partial^2 d_0(x,t)}{\partial t^2}\in L[Q_T]$. Следовательно, по теореме 1 ряд $u_{30}(x,t)$ при каждом t сходится к $d_0(x,t)$ равномерно по $x\in[0,1]$. Из этой сходимости следует утверждение леммы для ряда $u_{31}(x,t)$.

Итак, $u_{30}(x,t)=d_0(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) в случае $q(x)=\varphi(x)=\psi(x)=0$ с условием $\frac{\partial^2 u_{30}(x,t)}{\partial t^2}\in L[Q_T]$, т.е.

$$\frac{\partial^2 u_{30}(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_{30}(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),$$
$$u_{30}(0,t)=u_{30}(1,t)=u_{30}(x,0)=u'_{30,t}(x,0)=0.$$

Отсюда следует, что $u_{31}(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) с условием $\frac{\partial^2 u_{31}(x,t)}{\partial t^2}\in L[Q_T]$ и $\varphi(x)=\psi(x)=0$, $f(x,t)=m_0(x,t)$, где

$$m_0(x,t)=-q(x)d_0(x,t),\qquad x\in\mathbb{R},\qquad t\ge 0.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям разд. 3 после формулы (30). В результате верна

Теорема 8. *Если $u_3(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x)=\psi(x,t)=0$ и $f(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то*

$$u_3(x,t)=D(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x,t),$$

где

$$d_n(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}m_{n-1}(\eta,\tau)d\eta,\qquad n\ge 1,$$
$$m_n(x,t)=-q(x)d_n(x,t),\qquad n\ge 0,$$

и ряд $D(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T>0$.

Как показано в [5], такое классическое решение существует, если $f(x,t)$ и $f'_t(x,t)$ непрерывны, $f(0,t)=f(1,t)=0$.

Ряд $D(x,t)$ сходится при любой $f(x,t) \in L[Q_T]$. Обозначим его сумму через $z(x,t)$. Теорема 6 имеет место и в этом случае, причем здесь из $\lim\limits_{h\to 0}\|f_h(x,t) - f(x,t)\|_{L[Q_T]} = 0$ следует $\lim\limits_{h\to 0}\|u_{3h}(x,t) - z(x,t)\|_{C[Q_T]} = 0$. Поэтому функцию $z(x,t)$ можно рассматривать как обобщенное решение задачи (1)–(3) для $u_3(x,t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458. № 2. С. 138–140.
2. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 2. С. 229–241. doi 10.7868/S0044466915020052
3. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 368 с.
4. *Хромов А.П.* О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 1795–1809. doi 10.7868/S0044466916100112
5. *Корнев В.В., Хромов А.П.* Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 10. С. 1692–1707. doi 10.7868/S0044466917100106
6. *Хромов А.П.* Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом и ненулевой начальной скоростью // Докл. АН. 2017. Т. 474. № 6. С. 668–670. doi 10.7868/S0869565217180037
7. *Корнев В.В., Хромов А.П.* Сходимость формального решения по методу Фурье в смешанной задаче для простейшего неоднородного волнового уравнения // Математика. Механика: сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 41–44.