ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 2, с. 203–210

УДК 517.977

НОВЫЙ АЛГОРИТМ АПОСТЕРИОРНОЙ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ[1)]

© 2019 г. А. С. Леонов

(115409 Москва, Каширское ш., 31, Национальный исследовательский ядерный ун-т "МИФИ", Россия)

e-mail: ilposed@orc.ru

Поступила в редакцию 12.04.2018 г.

Предлагается и обосновывается новый алгоритм апостериорной оценки точности решений линейных операторных уравнений I рода в гильбертовом пространстве. Алгоритм основан на сведении вариационной задачи апостериорной оценки точности к двум специальным задачам максимизации гладких функционалов при гладких ограничениях. Рассмотрен конечномерный вариант предлагаемого алгоритма. Приводятся результаты одного из численных экспериментов по апостериорной оценке точности для типичной обратной задачи. В экспериментах установлено, что время расчета по предлагаемому алгоритму в среднем в 1.4 раза меньше, чем в ранее предложенных методах. Библ. 19. Фиг. 1.

Ключевые слова: линейные некорректные задачи, регуляризующие алгоритмы, апостериорная оценка точности.

DOI: 10.1134/S0044466919020108

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Z и U — нормированные пространства с элементами z и u соответственно, а $A : Z \to U$ — линейный ограниченный оператор. Рассмотрим операторное уравнение

$$Az = u \tag{1.1}$$

и предположим, что оно имеет для данной правой части $u \in U$ единственное решение $\bar{z} \in Z$, $\bar{z} \neq 0$. Кроме того, мы считаем, что вместо точных данных (A, u) этого уравнения известны их приближения: оператор $A_h : Z \to U$ и элемент $u_\delta \in U$. Приближенные данные (A_h, u_δ), аппроксимирующие точные данные (A, u), удовлетворяют условиям $\|A_h z - Az\| \le h\Omega[z]\ \forall z \in Z$, $\|u_\delta - u\| \le \delta$, в которых величины $\eta = (h, \delta)$ являются известными характеристиками точности аппроксимации. В оценке точности задания приближенного оператора используется функционал $\Omega[z]$, определенный на Z. Он определяется спецификой решаемого уравнения (1.1), видом оператора A_h, а также используемым методом решения. В некоторых случаях можно считать, что $\Omega[z] = \|z\|$.

Применим для решения задачи (1.1) некоторый метод и найдем с его помощью приближенное решение $z_\eta = z_\eta(A_h, u_\delta, h, \delta) \in Z$. Если используемый метод обладает свойством устойчивости по отношению к возмущениям данных, т.е. является регуляризующим алгоритмом (РА) [1], [2], то справедлива сходимость $\|z_\eta - \bar{z}\| \to 0$ при $\eta \to 0$.

Следующим этапом решения уравнения (1.1) должна являться оценка точности полученного приближенного решения z_η. В большинстве работ (см., например, [3]–[8] и др.) проводятся теоретические априорные оценки точности. Они, как правило, получаются при очень жестких дополнительных ограничениях на искомое решение $\bar{z}$. Кроме того, эти оценки зачастую содержат константы, практическое вычисление которых затруднительно. Поэтому получить априорную оценку точности в виде числа в большинстве случаев невозможно. В связи с этим в последнее

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 17-01-00159-а и 17-51-53002-ГФЕН-а), а также Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013.

время развита теория апостериорных оценок точности (см. [9]–[14]). Используя методы из этих работ, можно получить числовые оценки точности приближенных решений z_η.

Мы будем применять для апостериорной оценки точности подход из работ [15]–[17]. Схематично он состоит в следующем. Зная z_η, величины

$$\Delta_\eta = \|A_h z_\eta - u_\delta\|, \quad R_\eta = \Omega[z_\eta].$$

Зададим константу $C > 1$, введем множество

$$\mathcal{Z}_\eta = \{z \in Z : \|A_h z - u_\delta\| \le C\Delta_\eta, \Omega[z] \le CR_\eta\}$$

и предположим, что $\bar{z} \in \mathcal{Z}_\eta$. Тогда справедливо неравенство

$$\|z_\eta - \bar{z}\| \le \sup\{\|z_\eta - z\| : z \in \mathcal{Z}_\eta\} \triangleq \varepsilon(\eta), \tag{1.2}$$

в котором величина $\varepsilon(\eta)$ есть *глобальная апостериорная оценка точности* приближенного решения z_η. Она может быть найдена путем приближенного вычисления точной верхней грани (1.2).

В работах [15]–[17] даны условия, при которых выполнено включение $\bar{z} \in \mathcal{Z}_\eta$, гарантирующее справедливость оценки (1.2), по крайней мере, при достаточно малых h, δ, и установлена состоятельность оценочной функции $\varepsilon(\eta)$, т.е. сходимость $\varepsilon(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$. Там же предложены численные алгоритмы нахождения функции $\varepsilon(\eta)$. Они реализуют условную максимизацию функционала $J[z] = \|z - z_\eta\|$ при двух ограничениях, определяющих множество $\mathcal{Z}_\eta$. Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях, указанных ниже в разд. 2, удается свести вычисление $\varepsilon(\eta)$ к условной максимизации некоторых других функционалов с фактически лишь одним ограничением и построить соответствующий численный алгоритм. При этом численные эксперименты показывают, что время расчета оценочной функции $\varepsilon(\eta)$ существенно уменьшается по сравнению с ее расчетами по алгоритмам из [15], [16]. Именно этому исследованию посвящена данная статья.

2. УТОЧНЕННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Уточним постановку задачи, считая, что выполнены следующие предположения:

1. Z, U – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_Z$ и $(\cdot,\cdot)_U$ соответственно; индексы у скалярных произведений и соответствующих норм будем далее для краткости опускать;

2. операторы $A : Z \to U$, $A \ne 0$, и $A_h : Z \to U$, $A_h \ne 0$, – линейные и ограниченные, причем A имеет тривиальное ядро: $N(A) = \{0\}$; функционал Ω имеет специальный вид $\Omega[z] = \|z\|$;

3. искомое решение задачи (1) нетривиально: $\bar{z} \ne 0$;

4. используемый метод решения обратной задачи дает приближенные решения $z_\eta \in Z$ со свойством сходимости $z_\eta \xrightarrow{Z} \bar{z}$ при $\eta \to 0$.

Отметим очевидные следствия сделанных предположений. Из предположений 1–3 вытекает, что функционалы $\|Az - u\|$, $\|A_h z - u_\delta\|$ и $\Omega[z]$ слабо полунепрерывны снизу на Z и непустые множества уровня $\Omega_K = \{z \in Z : \Omega[z] \le K\}$ функционала Ω являются слабыми компактами. Предположение 4 вместе с условиями аппроксимации обеспечивает сходимости

$$\lim_{\eta\to 0} \Delta\eta = \lim_{\eta\to 0} \|A_h z_\eta - u_\delta\| = 0, \quad \lim_{\eta\to 0} R_\eta = \lim_{\eta\to 0} \Omega[z_\eta] = \Omega[\bar{z}].$$

Отсюда как частные случаи более общих теорем, доказанных в [15], [16], получаются следующие утверждения.

Предложение 1. *Пусть при* $0 < \|\eta\| \le \eta_0 = \mathrm{const}$ *выполнено неравенство* $\delta + h\Omega[\bar{z}] < C\Delta_\eta$. *Тогда для этих* η *справедливо включение* $\bar{z} \in \mathcal{Z}_\eta$.

Предложение 2. *При выполнении предположений* 1–4: а) *точная верхняя грань* (1.2) *достигается*; б) *справедлива сходимость* $\lim_{\eta\to 0} \varepsilon(\eta) = 0$.

Предложение 1 гарантирует выполнение апостериорной оценки (1.2), по крайней мере, при достаточно малых η, а предложение 2 обосновывает состоятельность этой оценки и позволяет утверждать, что

$$\begin{aligned}\varepsilon(\eta) &= \max\left\{\|z_\eta - z\| : z \in Z_\eta\right\} = \\ &= \max\left\{\|z_\eta - z\| : z \in Z, \|A_h z - u_\delta\| \le C\|A_h z_\eta - u_\delta\|, \|z\| \le C\|z_\eta\|\right\}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Символ “max”, здесь и далее означает глобальный максимум соответствующего функционала. Экстремальная задача (2.1) может быть решена численно методами, основанными на использовании функции Лагранжа и необходимых условий экстремума первого порядка(см. [15], [16]).

Отметим также, что предположение 4 и условие $\bar{z} \neq 0$ обеспечивают неравенства $\|z_\eta\| > 0$, $\|A_h z_\eta - u_\delta\| > 0$ при “достаточно малых” η, т.е. при $0 < \|\eta\| \le \eta_0$, где η_0 – некоторая константа.

3. РЕДУКЦИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ВЫЧИСЛЕНИЯ АПОСТЕРИОРНОЙ ОЦЕНКИ

Преобразуем задачу (2.1). Каждый элемент $z \in Z$, $z \neq z_\eta$, можно единственным образом представить в виде $z = z_\eta + tw$, где $w = (z - z_\eta)/\|z - z_\eta\|$, $\|w\| = 1$ и $t = \|z - z_\eta\| \ge 0$. Для $z = z_\eta$ считаем, что $t = 0$ и $w = \bar{w}$, где $\bar{w} \in Z$, $\|\bar{w}\| = 1$ – некоторый фиксированный элемент. Тогда задачу (2.1) можно переписать в виде

$$\varepsilon^2(\eta) = \max_{t,w}\left\{t^2 : w \in Z, \|w\| = 1, \|tA_h w - v_\eta\|^2 \le C^2\|v_\eta\|^2, \|tw + z_\eta\|^2 \le C^2\|z_\eta\|^2\ t \ge 0\right\},$$

где $v_\eta = u_\delta - A_h z_\eta$. Неравенства в ограничениях этой задачи раскрываются с учетом равенства $\|w\| = 1$ как

$$\|A_h w\|^2 t^2 - 2(A_h w, v_\eta)t - D_\eta^2 \le 0, \quad t^2 + 2(w, z_\eta)t - r_\eta^2 \le 0, \quad t \ge 0, \tag{3.1}$$

где $D_\eta^2 = (C^2 - 1)\|v_\eta\|^2$, $r_\eta^2 = (C^2 - 1)\|z_\eta\|^2$. Решая систему (3.1) при каждом допустимом $w \in Z$, получаем $t \in [0, t_\eta(w)]$. Здесь $t_\eta(w) = \min\left\{t_\eta^{(A)}(w), t_\eta^{(\Omega)}(w)\right\}$ и

$$t_\eta^{(\Omega)}(w) = \sqrt{(w, z_\eta)^2 + r_\eta^2} - (w, z_\eta) \ge 0,$$

$$t_\eta^{(A)}(w) = \left\{\frac{\sqrt{(A_h w, v_\eta)^2 + D_\eta^2\|A_h w\|^2} + (A_h w, v_\eta)}{\|A_h w\|^2}, \|A_h w\| \neq 0; +\infty, \|A_h w\| = 0\right\} \ge 0.$$

Таким образом, выполнено равенство

$$\varepsilon(\eta) = \max_{t,w}\left\{t : t \in [0, t_\eta(w)], w \in Z, \|w\| = 1\right\} = \max_w\left\{t_\eta(w) : w \in Z, \|w\| = 1\right\},$$

и апостериорная оценка $\varepsilon(\eta)$ может быть вычислена из решения экстремальной задачи

$$\varepsilon(\eta) = \max_w\left\{t_\eta(w) : w \in Z, \|w\| = 1\right\} \tag{3.2}$$

с целевым функционалом $t_\eta(w) = \min\left\{t_\eta^{(A)}(w), t_\eta^{(\Omega)}(w)\right\}$. Заметим, что задача (3.2) имеет решение $w_\eta = \dfrac{\tilde{z}_\eta - z_\eta}{\|\tilde{z}_\eta - z_\eta\|}$, где $\tilde{z}_\eta$ – какое-либо решение задачи (2.1), и поэтому $\varepsilon(\eta) = t_\eta(w_\eta)$.

Введем множества $S = \{w \in Z : \|w\| = 1\}$ и

$$V_\eta = \left\{w \in Z : \|w\| = 1, t_\eta^{(A)}(w) \le t_\eta^{(\Omega)}(w)\right\}, \quad W_\eta = \left\{w \in Z : \|w\| = 1, t_\eta^{(\Omega)}(w) \le t_\eta^{(A)}(w)\right\}.$$

Лемма 1. *Справедливы оценки* $t_\eta^{(\Omega)}(w) \le (C + 1)\|z_\eta\|\ \forall w \in S$; $t_\eta^{(A)}(w) \ge \dfrac{(C - 1)\|v_\eta\|}{\|A_h w\|}\ \forall w \in S$, $\|A_h w\| \neq 0$.

Доказательство. Первая оценка получается из формулы для $t_\eta^{(\Omega)}(w)$:

$$t_\eta^{(\Omega)}(w) = \sqrt{\left(w, z_\eta\right)^2 + r_\eta^2} - \left(w, z_\eta\right) \le \sqrt{\|z_\eta\|^2 + (C^2-1)\|z_\eta\|^2} + \|z_\eta\| = (C+1)\|z_\eta\|.$$

Похожим образом получается и вторая оценка:

$$t_\eta^{(A)}(w) = \frac{D_\eta^2}{\sqrt{\left(A_h w, v_\eta\right)^2 + D_\eta^2\|A_h w\|^2} - \left(A_h w, v_\eta\right)} \ge$$

$$\ge \frac{(C^2-1)\|v_\eta\|^2}{\sqrt{\|A_h wt\,\|^2\,\|v_\eta\|^2 + (C^2-1)\|v_\eta\|^2\|A_h w\|^2} + \|A_h w\|\|v_\eta\|} \ge \frac{(C-1)\|v_\eta\|}{\|A_h w\|}.$$

Теорема 1. *Пусть ядро $N(A_h)$ содержит ненулевой элемент. Тогда множество W_η непусто, а множество V_η не может содержать элементы из множества $S \cap N(A_h)$. Если выполнено условие $(C+1)\|A_h z_\eta - u_\delta\| \le (C-1)\|A_h z_\eta\|$, то множество V_η непусто.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $z_0 \in N(A_h)$, $z_0 \ne 0$. Тогда для $w_0 = \dfrac{z_0}{\|z_0\|} \in S$ выполнены соотношения $t_\eta^{(A)}(w_0) = +\infty$, $t_\eta^{(\Omega)}(w_0) \le (C+1)\|z_\eta\|$, где учтена лемма 1. Значит, $w_0 \in W_\eta$, но $w_0 \notin V_\eta$. Далее, проверим, что элемент $\tilde{w} = \dfrac{z_\eta}{\|z_\eta\|}$ принадлежит множеству V_η. Действительно,

$$t_\eta^{(\Omega)}(\tilde{w}) = \sqrt{\left(\frac{z_\eta}{\|z_\eta\|}, z_\eta\right)^2 + r_\eta^2} - \left(\frac{z_\eta}{\|z_\eta\|}, z_\eta\right) = (C-1)\|z_\eta\|,$$

$$t_\eta^{(A)}(\tilde{w}) = \sqrt{\left(A_h\frac{z_\eta}{\|z_\eta\|}, v_\eta\right)^2 + D_\eta^2\left\|A_h\frac{z_\eta}{\|z_\eta\|}\right\|^2} - \left(A_h\frac{z_\eta}{t\|z_\eta\|}, v_\eta\right) \le$$

$$\le \|z_\eta\|\frac{\sqrt{\|A_h z_\eta\|^2\,\|v_\eta\|^2 + (C^2-1)\|v_\eta\|^2\,\|A_h z_\eta\|^2} + \|A_h z_\eta\|\|v_\eta\|}{\|A_h z_\eta\|^2} = \frac{(C+1)\|z_\eta\|\|v_\eta\|}{\|A_h z_\eta\|}.$$

Из этих соотношений и условия теоремы получим

$$t_\eta^{(A)}(\tilde{w}) \le \frac{(C+1)\|z_\eta\|\|A_h z_\eta - u_\delta\|}{\|A_h z_\eta\|} \le (C-1)\|z_\eta\| = t_\eta^{(\Omega)}(\tilde{w}),$$

т.е. $\tilde{w} \in v_\eta$.

Замечание 1. Отметим частные случаи, в которых гарантировано, что $W_\eta \ne \varnothing$ и $V_\eta \ne \varnothing$.

1. Если операторы A_h вполне непрерывные, то множество W_η непусто даже если $N(A_h) = \{0\}$. Действительно, используем сингулярное разложение (см., например, [8]) оператора A_h, т.е. ортонормированные системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ и сингулярные числа $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty$, $\rho_n \ge 0$, $\rho_n \to 0$, для которых $A_h\varphi_n = \rho_n\psi_n$, $A_h^*\psi_n = \rho\varphi_n$. Тогда $\|A_h\varphi_n\| = \rho_n$ и по лемме 1 имеем

$$t_\eta^{(A)}(\varphi_n) \ge \frac{(C-1)\|v_\eta\|}{\|A_h\varphi_n\|} = \frac{(C-1)\|v_\eta\|}{\rho_n}.$$

Поэтому найдется такой номер N, что выполнено неравенство

$$t_\eta^{(A)}(\varphi_N) \ge \frac{(C-1)\|v_\eta\|}{\rho_N} \ge (C+1)\|z_\eta\| \ge t_\eta^{(\Omega)}(\varphi_N),$$

и, значит, $\varphi_N \in W_\eta$.

2. Выполнение условия $(C+1)\|A_h z_\eta - u_\delta\| \le (C-1)\|A_h z_\eta\|$ можно непосредственно проверить для имеющегося решения z_η. Это условие заведомо выполнено при достаточно малых η, так как $\|A_h z_\eta - u_\delta\| \to 0$ и $\|A_h z_\eta\| \to \|u\| \ne 0$ при $\eta \to 0$. Тем самым, $V_\eta \ne \varnothing$ при таких η.

Теорема 1 и замечание 1 позволяют рассматривать величины

$$t_A(\eta) = \sup\left\{t_\eta^{(A)}(w) : w \in V_\eta\right\}, \quad t_\Omega(\eta) = \sup\left\{t_\eta^{(\Omega)}(w) : w \in W_\eta\right\}. \tag{3.3}$$

Теорема 2. *При допустимых* η *выполнено равенство* $\varepsilon(\eta) = \max\{t_A(\eta), t_\Omega(\eta)\}$.

Доказательство. Из включения $V_\eta \subset S$ ясно, что

$$\begin{aligned}\varepsilon(\eta) &= \max\{t_\eta(w) : w \in S\} \ge \sup\{t_\eta(w) : w \in V_\eta\} = \sup\left\{\min\left\{t_\eta^{(A)}(w), t_\eta^{(\Omega)}(w)\right\} : w \in V_\eta\right\} = \\ &= \sup\left\{\min\left\{t_\eta^{(A)}(w), t_\eta^{(\Omega)}(w)\right\} : w \in Z, \|w\| = 1, t_\eta^{(A)}(w) \le t_\eta^{(L)}(w)\right\} = \sup\left\{t_\eta^{(A)}(w) : w \in V_\eta\right\} = t_A(\eta).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Аналогично, из включения $W_\eta \subset S$ следует

$$\varepsilon(\eta) \ge \sup\left\{t_\eta^{(\Omega)}(w) : w \in W_\eta\right\} = t_\Omega(\eta). \tag{3.5}$$

Далее, если $w_\eta \in V_\eta$, то неравенство в (3.4) переходит в равенство. Поэтому

$$\varepsilon(\eta) = t_\eta(w_\eta) = \sup\{t_\eta(w) : w \in V_\eta\} = \sup\left\{t_\eta^{(A)}(w) : w \in V_\eta\right\} = t_A(\eta),$$

и из оценки (3.5) получим $\varepsilon(\eta) = t_A(\eta) \ge t_\Omega(\eta)$. Если же $w_\eta \in W_\eta$, то таким же образом получим $\varepsilon(\eta) = t_\Omega(\eta) \ge t_A(\eta)$. В итоге $\varepsilon(\eta) = \max\{t_A(\eta), t_\Omega(\eta)\}$, и теорема доказана.

Таким образом, получение апостериорной оценки точности сводится к вычислению величин (3.3). В связи с этим рассмотрим более подробно свойства функционалов $t_\eta^{(A)}(w)$, $t_\eta^{(\Omega)}(w)$, определяющих эти величины.

Теорема 3. *Функционалы* $T_A = t_\eta^{(A)}(w)$, $T_\Omega = t_\eta^{(\Omega)}(w)$ *непрерывно дифференцируемы на множествах* V_η *и* W_η *соответственно. Для их градиентов справедливы формулы*

$$\nabla T_A = \frac{T_A A_h^* v_\eta - T_A^2 A_h^* A_h w}{T_A\|A_h w\|^2 - (A_h w, v_\eta)}, \quad w \in V_\eta; \quad \nabla T_\Omega = -\frac{T_\Omega z_\eta + T_\Omega^2 w}{T_\Omega + (w, z_\eta)}, \quad w \in W_\eta. \tag{3.6}$$

Доказательство. Докажем утверждения теоремы, например, для T_A. Этот функционал удовлетворяет тождеству $\|A_h w\|^2 T_A^2 - 2(A_h w, v_\eta) T_A - D_\eta^2 = 0$ (см. (3.1)). Дифференцируя его, получаем

$$T_A\|A_h w\|^2 \nabla T_A + T_A^2 A_h^* A_h w - (A_h w, v_\eta)\nabla T_A - T_A A_h^* v_\eta = 0.$$

При этом, как показано в теореме 1, $\|A_h w\| \ne 0$ для $w \in V_\eta$. Отсюда можно вычислить ∇T_A в форме (3.6), так как $T_A\|A_h w\|^2 - (A_h w, v_\eta) \ne 0$ для $w \in V_\eta$. Действительно, если предположить противное, т.е. считать, что $T_A = \dfrac{(A_h w, v_\eta)}{\|A_h w\|^2}$, то из (3.1) получилось бы равенство

$$0 = \|A_h w\|^2 T_A^2 - 2(A_h w, v_\delta) T_A - D_\eta^2 = -\left(\frac{(A_h w, v_\eta)^2}{\|A_h w\|^2} + D_\eta^2\right).$$

Это, однако, невозможно, так как $D_\eta^2 \ne 0$. Непрерывность градиента ∇T_A на множестве V_η следует из (3.6). Аналогично проводятся вычисление и исследование на непрерывность градиента функционала $T_\Omega = t_\eta^{(\Omega)}(w)$.

Полученные аналитические выражения для градиентов (3.6) можно использовать, если применять для численного решения экстремальных задач (3.3) методы глобальной оптимизации гладких функционалов с гладкими ограничениями (см., например, [18]). Сама по себе задача глобальной максимизации функционала достаточно сложна, но мы можем использовать для ее решения готовые программные продукты из пакетов прикладных программ MATLAB, SciLab, Python др.

Теорема 2 обосновывает следующий

Алгоритм вычисления апостериорной оценки

Шаг 1. Решаем экстремальные задачи задачи (3.3) путем построения максимизирующих последовательностей по некоторому выбранному методу глобальной оптимизации и таким путем вычисляем приближенно величины $t_A(\eta)$, $t_\Omega(\eta)$.

Шаг 2. Вычисляем апостериорную оценку как $\varepsilon(\eta) = \max\{t_A(\eta), t_\Omega(\eta)\}$.

4. КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ АЛГОРИТМА АПОСТЕРИОРНОЙ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ

Кратко опишем используемую конечномерную аппроксимацию обратной задачи (1.1) и задач (3.3), решаемых для вычисления оценки $\varepsilon(\eta)$. Более подробно используемая схема конечномерной аппроксимации изложена в работе [15].

Будем считать, что определена последовательность конечномерных пространств Z_n такая, что $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_n \subset \ldots Z$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n = Z$. При каждом n считаем заданным линейный ограниченный оператор $A_n : Z_n \to U$ и элемент $u_n \in U$, аппроксимирующие данные (A_h, u_δ) задачи (1.1). При этом полагаем выполненными условия аппроксимации $\|u_n - u_\delta\| \le \delta_n$, $\|A_n z - A_h z\| \le h_n \|z\|$ $\forall z \in Z_n$, где $\delta_n, h_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть также определено семейство операторов проектирования $P_n : Z \to Z_n$, обладающих свойством $\lim_{n\to\infty} \|P_n z - z\| = 0$ $\forall z \in Z$.

Применим для решения задачи (1.1) некоторый РА. Пусть для данных $(A_h, u_\delta, h, \delta)$ он может дать приближенное решение $z_\eta \in Z$, точность которого мы хотим оценить. Так как в нашем распоряжении имеются лишь конечномерные аппроксимации $(A_n, u_n, h_n, \delta_n)$ данных $(A_h, u_\delta, h, \delta)$, то РА дает на самом деле конечномерные приближения $z_{\eta n} = z_\eta(A_n, u_n, h_n, \delta_n) \in Z_n$. Будем считать, что $z_{\eta n} \to z_\eta$ в Z при $n \to \infty$. Вместо апостериорной оценки точности $\varepsilon(\eta)$ приближенного решения z_η будем рассматривать аналогичную оценку конечномерного приближенного решения $z_{\eta n}$, т.е. величину

$$\varepsilon_n(\eta) = \sup\{\|z - z_{\eta n}\| : z \in Z_n, \|A_n z - u_n\| \le C\|A_n z_{\eta n} - u_n\|, \|z\| \le C\|z_{\eta n}\|\}. \tag{4.1}$$

В [15] указана следующая связь величины $\varepsilon(\eta)$ и ее конечномерного аналога $\varepsilon_n(\eta)$.

Предложение 3. *Если множество* $\mathfrak{X}_\eta = \{z \in Z : \|A_h z - u_\delta\| \le C\Delta_\eta, \Omega[z] \le CR_\eta\}$ *при каждом* η, $0 < \|\eta\| \le \eta_0$, *имеет непустую внутренность* $\operatorname{int}\mathfrak{X}_\eta \ne \varnothing$, *то для этих* η *справедливо соотношение* $m_{n\to\infty}\varepsilon_n(\eta) = \varepsilon(\eta)$. *Если, кроме того,* $\bar{z} \in \operatorname{int}\mathfrak{X}_\eta$, *то* $\|P_n\bar{z} - z_{\eta n}\| \le \varepsilon_n(\eta)$.

Задачу (4.1) можно, как и задачу 2.1 в теореме 2, свести к вычислению величины $\varepsilon_n(\eta) = \max\left\{t_A^{(n)}(\eta), t_\Omega^{(n)}(\eta)\right\}$, где

$$\begin{aligned} t_A^{(n)}(\eta) &= \sup\left\{t_{\eta n}^{(A)}(w) : w \in Z_n, \|w\| = 1, t_{\eta n}^{(A)}(w) \le t_{\eta n}^{(\Omega)}(w)\right\}, \\ t_\Omega^{(n)}(\eta) &= \sup\left\{t_{\eta n}^{(\Omega)}(w) : w \in Z_n, \|w\| = 1, t_{\eta n}^{(\Omega)}(w) \le t_{\eta n}^{(A)}(w)\right\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

и функционалы $t_{\eta n}^{(A)}(w)$, $t_{\eta n}^{(\Omega)}(w)$ из экстремальных задач (4.2) определяются равенствами

$$t_{\eta n}^{(A)}(w) = \frac{\sqrt{(A_n w, v_{\eta n})^2 + D_{\eta n}^2\|A_n w\|^2} + (A_n w, v_{\eta n})}{\|A_n w\|^2}, \quad t_{\eta n}^{(\Omega)}(w) = \sqrt{(w, z_{\eta n})^2 + r_{\eta n}^2} - (w, z_{\eta n})$$

при $v_{\eta n} = u_n - A_n z_{\eta n}$, $D^2_{\eta n} = (C^2-1)\|v_{\eta n}\|^2$, $r^2_{\eta n} = (C^2-1)\|z_{\eta n}\|^2$. Для этих функционалов справедлив конечномерный аналог теоремы 3. Заметим, что в задачах (4.2) ограничение $\|w\| = 1$, которое часто можно записать в конечномерном случае как $\sum_{i=1}^n w_i^2 = 1$, позволяет исключить одну из координат вектора $w = (w_1, \ldots, w_n)$. В итоге эти экстремальные задачи будут содержать лишь одно ограничение.

5. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА АПОСТЕРИОРНОЙ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ТИХОНОВСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Будем использовать для решения задачи (1.1) метод Тихонова с регуляризатором $\|Lz\|^2$. Здесь $L : Z \to Z$ – линейный замкнутый оператор с областью определения $D(L)$, которая плотна в Z. Считается также, что $t\|Lz\| \geq k\|z\|$ $\forall z \in D(L)$, где $k > 0$ – некоторая константа, и что $\bar{z} \in D(L)$. Приближенное решение задачи в этом случае строится как $z_\eta = z_\eta^{\alpha_\eta}$, где z_η^α есть решение операторного уравнения $(\alpha L^*L + A_h^* A_h)z = A_h^* u_\delta$ при выбранном специальным образом параметре регуляризации $\alpha = \alpha_\eta > 0$. Мы будем использовать выбор параметра по обобщенному принципу невязки (ОПН), т.е. находить α_η как решение уравнения $\rho(\alpha) \triangleq \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\| - \left(\delta + h\|Lz_\eta^\alpha\|\right) = 0$. Теория ОПН и реализующие ее численные алгоритмы даны, например, в работах [2], [19].

Такой метод решения задачи (1.1) гарантирует сходимость $\|Lz_\eta - L\bar{z}\| \to 0$, и поэтому $\|z_\eta - \bar{z}\| \to 0$ при $\eta \to 0$. Таким образом, для приближенных решений z_η выполнены предположения 4 из разд. 2. Считая также выполненными остальные предположения, мы можем с учетом результатов предложения 1 получить апостериорную оценку точности вида $\|z_\eta - \bar{z}\| \leq \varepsilon(\eta)$, где величина $\varepsilon(\eta)$ имеет вид (2.1) и может быть вычислена по предложенному алгоритму.

Приведем пример численного получения такой апостериорной оценки точности. Рассмотрим известную тестовую задачу – линейное интегральное уравнение рода:

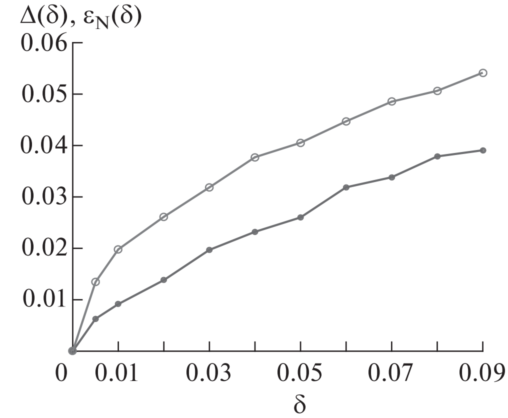
$$Az = \int_{-1}^{1} \frac{z\,dx}{1 + 100(s-x)^2} = u(x), \quad x \in [-1,1], \tag{5.1}$$

с точным решением $\bar{z} = (1-s^2)^2 \in W_2^2[-1,1]$ (см. [1], [19]). Считаем $Z = U = L_2[-1,1]$, и будем использовать регуляризатор $\|Lz\| = \|z\|_{W_2^1[-1,1]}$. Вычислим по решению $\bar{z}$ правую часть уравнения $u(x)$ и наложим на нее аддитивную нормально распределенную помеху с нулевым средним так, чтобы приближенная правая часть u_δ имела относительную ошибку $\|u_\delta - u\|_{L_2[-1,1]} / \|u\|_{L_2[-1,1]} = \delta$. После дискретизации задачи на равномерных сетках $\{x_i = s_i = -1 + 2(i-1)/(N-1), i = 1, \ldots, N\}$ с шагом $h = 2/(N-1)$ по x, s для $N = 201$ и аппроксимации оператора A по формуле трапеций, решим полученную систему линейных уравнений $\hat{A}\hat{z} = \hat{u}$, $\hat{z} \in \mathbb{R}^N$, с приближенными (сеточными) данными $A_{hN} = \hat{A}$, $u_{\delta N} = \hat{u}$:

$$\hat{A} = \left[\frac{h}{1 + 100(x_i - s_j)^2}\right], \quad \dim \hat{A} = N \times N; \quad \hat{u} = [u_\delta(x_i)], \quad \dim \hat{u} = N \times 1,$$

по конечномерному варианту применяемого метода регуляризации Тихонова. Детали этой процедуры описаны, например, в [19].

Далее, используем конечномерный вариант алгоритма апостериорной оценки точности из разд. 4 с $C = 1.01$ для вычисления величины (4.1). При этом мы будем предполагать, что погрешность конечномерной аппроксимации оператора много меньше погрешности правой части уравнения, так что фактически $\varepsilon_N(\eta) \approx \varepsilon_N(\delta)$. При фиксированной дискретизации задачи это означает, что величины δ не должны браться "слишком малыми". Полученные относительные апостериорные оценки точности $\varepsilon_N(\delta) = \frac{\varepsilon_N(\delta)}{\|\bar{z}\|}$ для типичных значений δ, усредненные по 60 расчетам для каждого δ с различными реализациями случайных ошибок величины u_δ, приведены на фиг. 1. На нем линия с точками соответствует усредненной относительной ошибке $\Delta(\delta) = \frac{\|z_\delta - \bar{z}\|}{\|\bar{z}\|}$



Фиг. 1. Нижняя линия – относительная ошибка $\Delta(\delta)$ решений обратной задачи по методу регуляризации; верхняя линия – относительная апостериорная оценка точности $\varepsilon_N(\delta)$. Обе величины являются средними результатов, полученных при каждом δ для 60 реализаций приближенных правых частей уравнения (5.1).

найденных решений z_δ нашей модельной обратной задачи, а линия с кружками – вычисленной оценке $\varepsilon_N(\delta)$. Расчеты проводились с помощью стандартных средств оптимизации пакета МАТЛАБ. Если сравнить скорости алгоритмов решения задачи апостериорной оценки точности из работ [15], [16] и предлагаемого алгоритма, то оказалось, что последний позволяет получить оценку в среднем в 1.4 раза быстрее. В этом заключается его преимущество.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. Второе издание: М.: Курс, 2017.
3. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
4. *Танана В.П.* Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981.
5. *Вайникко Г.М.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту, Издательство ТГУ, 1982.
6. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
7. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений. М.: Ленанд, 2012.
8. *Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. Dordrecht, Kluwer, 1996.
9. *Винокуров В.А.* Апостериорные оценки решения некорректных обратных задач // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 2. С. 277–280.
10. *Дорофеев К.Ю., Титаренко В.Н., Ягола А.Г.* Алгоритмы построения апостериорных оценок погрешностей для некорректных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 1. С. 12–25.
11. *Ягола А.Г., Николаева Н.Н., Титаренко В.Н.* Оценка погрешности решения уравнения Абеля на множествах монотонных и выпуклых функций // Сиб. журн. вычисл. матем. 2003. Т. 6. № 2. С. 171–180.
12. *Бакушинский А.Б.* Апостериорные оценки точности для приближенных решений нерегулярных операторных уравнений // Докл. РАН. 2011. Т. 437. № 4. С. 439–440.
13. *Bakushinsky A.B., Smirnova A., Liu H.* A posteriori error analysis for unstable models // J. of inverse and III-posed problems. 2012. V. 20. № 4. P. 411–428.
14. *Бакушинский А.Б., Леонов А.С.* Новые апостериорные оценки погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений// Вычисл. методы и программирование. 2014. Т. 15. № 1. С. 359–369.
15. *Леонов А.С.* Апостериорные оценки точности решения некорректно поставленных обратных задач и экстраоптимальные регуляризующие алгоритмы их решения // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15. № 1. С. 85–102.
16. *Leonov A.S.* Extra-optimal methods for solving ill-posed problems // J. of Inverse and III-posed problems. 2012. V. 20. Issue 5–6. P. 637–665.
17. *Leonov A.S.* Locally extra-optimal regularizing algorithms // J. of Inverse and III-posed Problems. 2014. V. 22. Issue 5. P. 713–737.
18. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация. М.: Наука, 1981.
19. *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: Либроком, 2009. Второе издание: Либроком, 2013.