ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 2, с. 301–312

УДК 519.65

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКОВ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ[1)]

© 2019 г. Р. Ю. Пепа

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия)

e-mail: pepa@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 12.04.2018 г.

Работа посвящена численному моделированию потока средней кривизны на поверхности вращения. Дискретизация поверхности осуществляется с помощью разбиения икосаэдра, дискретизация уравнения потока – методом конечных элементов. С целью повышения устойчивости схемы используется сплайновая интерполяция. Библ. 11. Фиг. 14.

Ключевые слова: поток средней кривизны, метод конечных элементов, сплайновая интерполяция.

DOI: 10.1134/S0044466919020133

1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ (см. [1]–[4]) было показано, что так называемые геометрические потоки дают определенную информацию о строении многообразия. Кроме потоков, учитывающих внутреннюю геометрию многообразия (см. [5]–[7]) (Риччи, Калаби-Яу), также интерес представляют потоки, определенные внешней геометрией, например, учитывающие кривизну вложения многообразия в евклидово пространство (см. [8], [9]). Простейшим из таковых является поток средней кривизны. Дадим необходимые определения.

Пусть M^n – замкнутое многообразие размерности $n \geqslant 1$. *Потоком средней кривизны* называется семейство вложений $f_t : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, гладко зависящее от t, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f(\overline{x},t)}{\partial t} = -H(\overline{x},t)\mathbf{n}(\overline{x},t), \tag{1}$$

где $\overline{x}$ – точка многообразия, $\mathbf{n}(\overline{x},t)$ и $H(\overline{x},t)$ – нормаль к вложению и средняя кривизна поверхности M^n относительно вложения f_t в точке $f(\overline{x},t)$ соответственно; здесь $f(\overline{x},t) = f_t(\overline{x})$. Отображения f_t задают семейство вложенных многообразий $M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f_t(\overline{x})}{dt} = \Delta_{LB}(t) f_t(\overline{x}), \tag{2}$$

где $\Delta_{LB}(t)$ – оператор Лапласа–Бельтрами, вычисленный в индуцированной вложением f_t метрике на M_t^n. С геометрической точки зрения поток средней кривизны стремится "стянуть" выпуклые области M_t^n, причем скорость стягивания тем выше, чем больше значение средней кривизны $H_t(\overline{x})$. Это наглядное свойство является общим для потока Риччи и для потока средней кривизны.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-6399.2018.1) и РФФИ (код проекта № 16-01-00378-а).

Помимо семейства вложений $f_t(\bar{x})$, удовлетворяющего уравнению (2), удобно рассматривать так называемый нормализованный поток средней кривизны $\tilde{f}_t(\bar{x})$. Оба семейства определены при $t \in [0,T)$ и пропорциональны друг другу с коэффициентом $\psi(t)$

$$\tilde{f}_t(\bar{x}) = \psi(t) \cdot f_t(\bar{x}) \tag{3}$$

таким, что объемы многообразий, заданных семейством вложений $\tilde{f}_t(\bar{x})$, равны объему многообразия M_0^n для всех t.

Выберем новый параметр времени $\tilde{t}(t) = \int_0^t \psi^2(\tau)d\tau$; тогда можно показать, что $\tilde{f}_{\tilde{t}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \tilde{f}_{\tilde{t}}(\bar{x})}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\Delta}_{\tilde{t}} \tilde{f}_{\tilde{t}}(\bar{x}) + \frac{1}{n} \tilde{h}_{\tilde{t}} \tilde{f}_{\tilde{t}}(\bar{x}); \tag{4}$$

$$\tilde{f}_0 = f_0, \tag{5}$$

где

$$\tilde{h}_{\tilde{t}} = \int_{\tilde{M}_{\tilde{t}}} \tilde{H}_{\tilde{t}}^2 d\,\mathrm{Vol}_{\tilde{t}} \Big/ \int_{\tilde{M}_{\tilde{t}}} d\,\mathrm{Vol}_{\tilde{t}}$$

есть усредненное значение квадрата средней кривизны для $\tilde{M}_{\tilde{t}}$.

Теорема 1 (см. [4]). *Пусть f_0 — вложение гладкого замкнутого многообразия M^n в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть известно, что собственные значения второй квадратичной формы подмногообразия M_0^n строго больше нуля для всех $\bar{x} \in M_0^n$. Тогда уравнение* (2) *с начальным условием $f(\bar{x},0) = f_0(\bar{x})$ имеет гладкое решение на конечном интервале времени $0 \leqslant t < T$, стягивая поверхность M_t^n в некоторую точку O при $t \to T$. При этом уравнение* (3) *с начальным условием $\tilde{f}(\bar{x},0) = \tilde{f}_0(\bar{x})$ имеет гладкое решение при $\tilde{t} \to \infty$, при этом $\tilde{M}_{\tilde{t}}$ стремится принять форму сферы площади $|M_0|$. Подмногообразие $\tilde{M}_{\tilde{t}}$ получается из M_t гомотетией с центром в точке O.*

В этой работе мы приводим новый алгоритм численного решения уравнения потока средней кривизны для поверхности вращения. Он позволяет визуализировать два качественно различных сценария поведения потока средней кривизны в зависимости от начального вложения $\tilde{f}_0$. В первом случае для начального вложения $\tilde{f}_0$ со строго положительными главными кривизнами применима теорема 1, так что под действием потока средней кривизны поверхность деформируется в сферу. С другой стороны, среди вложений, не удовлетворяющих условиям теоремы 1, есть примеры, в которых предельное многообразие существует, более того, как и в первом случае, является сферой, и есть примеры, в которых под действием потока средней кривизны на конечное время развивается особенность [10].

2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПОТОКА СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

Будем строить дискретный аналог уравнения (2) для $M = S^2$ методом конечных элементов (см. [11]). Зададим базисные функции $L_i, i = 1,2,\ldots,N$, на вершинах триангуляции, где N — их количество, следующим образом:

$$L_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \quad \text{т.е.} \quad v_i \text{ и } v_j \text{ различны}, \\ 1, & \text{если} \quad i = j, \quad \text{т.е.} \quad v_i \text{ совпадает с } v_j. \end{cases} \tag{6}$$

Кроме того, потребуем, чтобы все L_i были линейны на каждом двумерном симплексе. Уравнение (2) будем решать в слабом смысле. Это значит, что мы ищем функцию $f_t(x)$ такую, что для любой функции $g_t(x)$ выполняется условие

$$\left\langle \frac{\partial f_t(x)}{\partial t}, g_t(x) \right\rangle = \langle \Delta_{LB} f_t(x), g_t(x) \rangle. \tag{7}$$

Перепишем (7) в виде

$$\left\langle \frac{\partial f_t(x)}{\partial t}, g_t(x) \right\rangle = -\langle \nabla f_t(x), \nabla g_t(x) \rangle. \tag{8}$$

Заменим функции $f_t(x)$, $g_t(x)$ их дискретными аналогами:

$$f_t(x) \to \sum_i^N f_i(t) L_i, \quad g_t(x) \to \sum_i^N g_i(t) L_i,$$

где $f_i(t)$, $g_i(t)$ – значения функций f и g в i-й вершине триангуляции соответственно. Подставляя эти выражения в уравнение (8), получаем

$$\left\langle \sum_{j=1}^N \frac{df_j(t)}{dt} L_j, \sum_{i=1}^N g_i L_i \right\rangle = -\left\langle \sum_{j=1}^N f_j(t) \nabla L_j, \sum_{i=1}^N g_i \nabla L_i \right\rangle, \tag{9}$$

откуда

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{df_j(t)}{dt} g_i(t) \langle L_i, L_j \rangle = -\sum_{i,j=1}^N f_j(t) g_i(t) \langle \nabla L_i, \nabla L_j \rangle. \tag{10}$$

Дискретизация данного уравнения по времени имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{f_j^n - f_j^{n-1}}{\tau} \langle L_i, L_j \rangle = -\sum_{i,j=1}^N f_j^{n-1} \langle \nabla L_i, \nabla L_j \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N, \tag{11}$$

здесь и далее по тексту n – номер шага по времени. Рассмотрим матрицы $A^n = (\langle L_i, L_j \rangle)_{i,j=1}^N$, $B^n = (\langle \nabla L_i, \nabla L_j \rangle)_{i,j=1}^N$, а также вектор-столбцы $F^{n-1} = (f_i^{n-1})_{i=1}^N$, $F^n = (f_i^n)_{i=1}^N$. Тогда уравнение (11) можно переписать в виде

$$A^n F^n = -\tau B^n F^{n-1} + A^{n-1} F^{n-1}, \tag{12}$$

откуда

$$F^n = -\tau (A^n)^{-1} B^{n-1} F^{n-1} + F^{n-1}. \tag{13}$$

Элементы матрицы A^n вычисляются в явном виде:

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{12}(|\Delta_1| + |\Delta_2|) & \text{для смежных вершин } v_i, v_j, \\ \dfrac{1}{6} \sum\limits_{k \in \deg v_i} |\Delta_k|, & \text{если вершины } v_i, v_j \text{ совпадают}, \\ 0 & \text{в остальных случаях}. \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $|\Delta|$ – площадь грани Δ, причем Δ_1, Δ_2 – грани, смежные по ребру, соединяющему вершины v_i, v_j, а Δ_k пробегает набор граней, имеющих $v_i = v_j$ вершиной. Элементы матрицы B^n тоже могут быть вычислены явно:

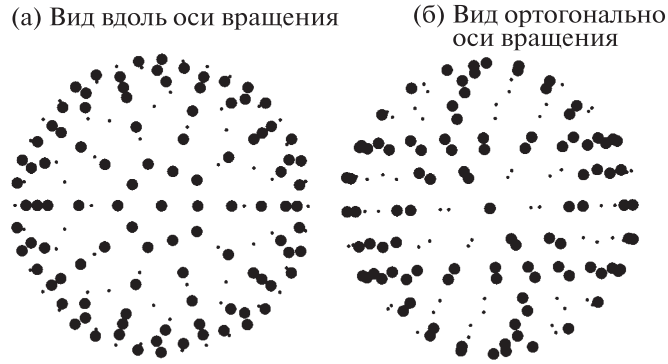
$$B_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\operatorname{ctg}\gamma_{p,ij} + \operatorname{ctg}\gamma_{q,ij}) & \text{для смежных вершин } v_i, v_j, \\ -\dfrac{1}{2} \sum\limits_{k \in \deg v_i} \dfrac{l_{qp}}{l_{ip} l_{qi} \sin \gamma_{i,qp}}, & \text{если } v_i, v_j \text{ совпадают}, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases} \tag{15}$$

где $\gamma_{i,qp}$ – угол при вершине v_i грани Δ_{iqp}, а l_{pq} – длина ребра, соединяющего вершины v_p и v_q.

Явная схема, заданная соотношением (13), неустойчива, и поэтому предпочтительнее воспользоваться неявной схемой

$$F^n = (C^n)^{-1}(A^{n-1} F^{n-1} + \tau(1 - \sigma) B^{n-1} F^{n-1}), \tag{16}$$

где $C^n = A^n - \tau\sigma B^n$.



Фиг. 1. Икосаэдральная сетка сферы единичного радиуса при $k = 2$.

Как и в случае непрерывного времени удобно вместо (16) рассматривать нормализованное уравнение. Определим дискретный аналог ξ_n коэффициента $\psi(t)$ соотношением

$$\xi_n = \sqrt{S_\Delta^{n-1}/S_\Delta^n}, \tag{17}$$

где S_Δ^n и S_Δ^{n-1} – площади триангулированной поверхности в текущий и предыдущий моменты времени, и нормализуем уравнение (16):

$$F^n = \xi_n (C^n)^{-1}(A^{n-1}F^{n-1} + \tau(1-\sigma)B^{n-1}F^{n-1}). \tag{18}$$

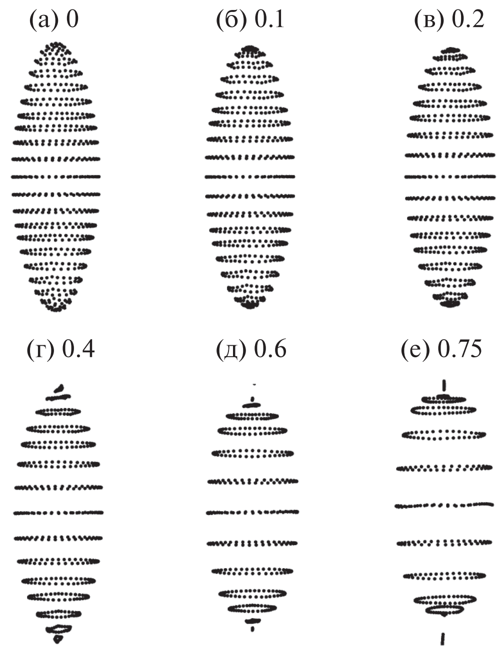
С учетом нормировочного коэффициента общая площадь триангулированной поверхности под действием потока (18) не меняется.

3. ЗАМКНУТАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ

Зададим хорошую с комбинаторной точки зрения триангуляцию сферы, такая триангуляция легко строится, измельчается и кодируется. Рассмотрим единичную сферу и вписанный в нее правильный икосаэдр. Выберем декартовы координаты так, чтобы ось Oz проходила через две вершины икосаэдра, будем называть их полюсами: $(0,0,-1)$ – *южный*, $(0,0,1)$ – *северный*. Шаг измельчения состоит в следующем: в каждой грани проведем средние линии. Проделаем нужное количество шагов, и обозначим через $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$ множество всех вершин триангуляции, $E = \{l_{ij} | v_i v_j - \text{ребро}\}$ – множество всех ее ребер , а $F = \{\Delta_{ijq} | v_i v_j v_q - \text{грань}\}$ – множество граней. Заметим, что после k-го шага измельчения икосаэдра количество вершин, ребер, граней триангуляции равно $|V| = 2 + 10 \times 2^{2k}$, $|E| = 30 \times 4^k$, $|F| = 20 \times 2^{2k}$ соответственно. Назовем *уровнем вершины* триангуляции наименьшее количество звеньев ломаной, составленной из ребер триангуляции и соединяющей вершину с южным полюсом. Тогда уровни вершин принимают значения от 0 до 3×2^k, где k – количество шагов измельчения исходной икосаэдральной сетки. Рассмотрим любую трехзвенную ломаную, составленную из ребер исходного икосаэдра, которая соединяет его северный и южный полюса. После нужного числа шагов разбиения такая ломаная будет состоять из 3×2^k звеньев и будет содержать в точности по одной вершине каждого уровня. Будем называть такие ломаные *характеристическими*.

Теперь опишем триангуляцию исходной поверхности вращения на примере сферы. Вершины одного уровня измельченного икосаэдра лежат в одной плоскости, ортогональной общей оси Oz. Спроецировав их вдоль лучей, лежащих в плоскости данного набора на окружность радиуса $1/\sqrt{1 - z_i^2}$ с центром на оси Oz, мы получим вершины на поверхности сферы. Иными словами, вершины измельченного икосаэдра (x_i, y_i, z_i) дают на сфере точки с координатами (см. фиг. 1)

$$\left(\frac{x_i \sqrt{1 - z_i^2}}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}, \frac{y_i \sqrt{1 - z_i^2}}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}, z_i \right).$$



Фиг. 2. Эволюция эллипсоида вращения под действием дискретного потока средней кривизны от времени $t = n\tau$ при $k = 3$, $\tau = 0.01$.

Для поверхности вращения заданной профильной функцией $\beta(z), \beta(-1) = \beta(1) = 0$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, $\beta(z) > 0$ при $z \neq \pm 1$, поступим следующим образом: вершине измельченного икосаэдра (x_i, y_i, z_i) ставим в соответствие вершину на поверхности вращения

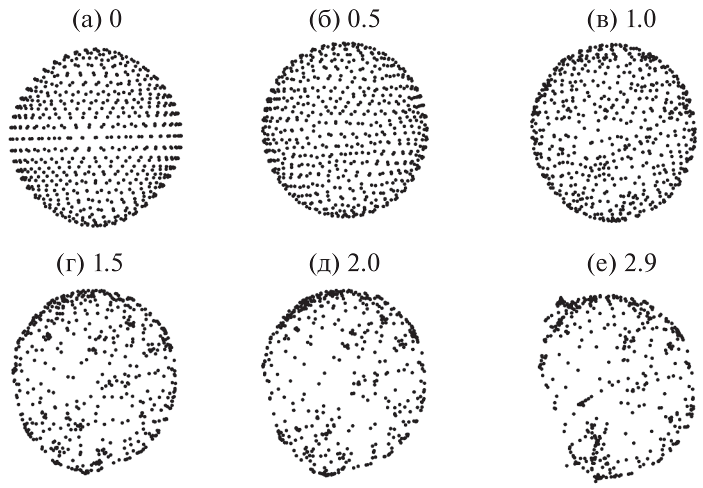
$$\left(\frac{x_i\sqrt{1 - z_i^2}}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}\beta(z_i), \frac{y_i\sqrt{1 - z_i^2}}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}\beta(z_i), z_i\right).$$

Комбинаторика триангуляции остается прежней. В общем случае, когда профильная функция $\beta(z)$ поверхности вращения определена на некотором отрезке $[a, b]$, ее триангуляция подходящими сдвигом и растяжением сводится к вышеописанной.

4. ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРШИН ТРИАНГУЛИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Из геометрических соображений следует, что длины ребер нашей триангулированной поверхности под действием потока средней кривизны изменяются быстрее вблизи вершин, в которых больше абсолютное значение средней кривизны. В результате этого вершины триангулированной поверхности вращения, которая в “полярной шапочке” имеет локальный максимум кривизны, скапливаются у ее оси. В качестве примера на фиг. 2 показана эволюция триангулированного эллипсоида вращения с начальным значением полуосей $a = b = 1$, $c = 3$ под действием дискретного (для $\sigma = 1/2$) потока средней кривизны (17). Видно, что вершины триангуляции скапливаются к полюсам, что в конечном итоге приводит к неустойчивости разностной схемы. Более того, эволюция триангулированной сферы единичного радиуса под действием потока средней кривизны, показанная на фиг. 3, демонстрирует неустойчивость схемы даже в случае, когда кривизна исходной поверхности постоянна.

Явный вид элементов матриц A^n и B^n (см. формулы (14), (15)) показывает, что элементы этих матриц определяются значениями углов при вершинах триангуляции и длинами ее ребер. Если в процессе эволюции отношение максимальной площади грани триангуляции к минимальной стремится к бесконечности, то число обусловленности матрицы C_n неограниченно возрастает и поэтому схема (18) оказывается неустойчивой (типичное поведение потока показано на фиг. 2).



Фиг. 3. Эволюция сферы под действием дискретного потока средней кривизны от времени $t = n\tau$ при $k = 3$, $\tau = 0.01$.

Чтобы сохранить число обусловленности вблизи 1, мы воспользуемся следующей идеей, происходящей из геометрии и комбинаторики рассматриваемой триангуляции. Идея состоит в перераспределении вершин триангуляции по поверхности так, чтобы уровни вершин не менялись и звенья характеристической ломаной имели одинаковую длину.

Алгоритм перераспределения вершин триангулированной поверхности использует следующие векторы:

R^n – состоит из расстояний от вершин триангулированной поверхности v_i до оси вращения, $\{r_i^n \in R^n \,|\, r_i^n = \sqrt{(x_i^n)^2 + (y_i^n)^2};\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$;

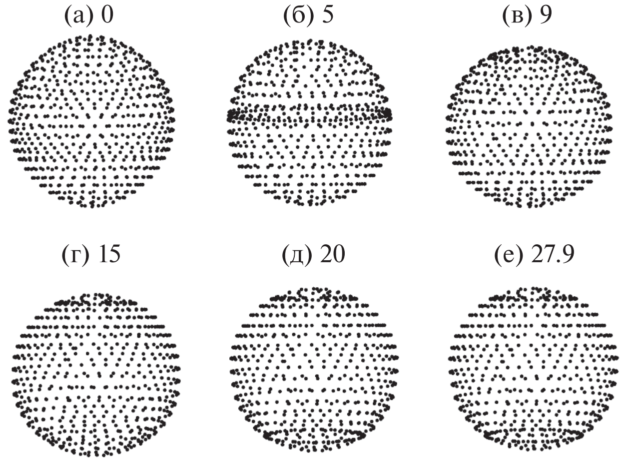
H^n – состоит из значений проекции вершин триангулированной поверхности на ось вращения, $\{h_i^n \in H^n \,|\, h_i^n = z_i^n;\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$;

Φ^n – состоит из значений полярных углов при вершинах триангулированной поверхности и определяется соотношениями: $\{x_i^n = r_i^n \cos\phi_i^n,\ y_i^n = r_i^n \cos\phi_i^n;\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$.

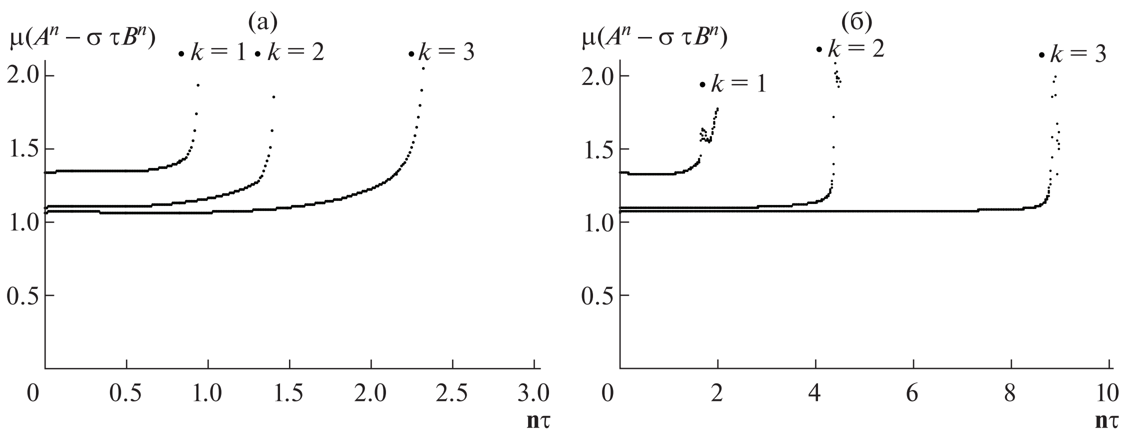
Кроме того, вспомогательный вектор $P = \{p_{i(m)} | p_{i(m)} = i(m)/(3\times 2^k),\ 0 \leqslant m \leqslant 3\times 2^k\}$ нужен в качестве параметризации вектора L_0^n. Также используется вектор расстояний вдоль характеристической ломаной от ее вершин до южного полюса: $L_0^n = \left\{l_j^n \,|\, l_j^n = \sum_{m=1}^{j} d_m^n;\ j = [0; 3\times 2^k]\right\}$, где $d_m^n = \sqrt{(\Delta x_{i(m)}^n)^2 + (\Delta y_{i(m)}^n)^2 + (\Delta z_{i(m)}^n)^2}$ – расстояние между m-й и $(m-1)$-й вершинами характеристической ломаной ($m = 1, \ldots, 3\times 2^k$), а $i(m)$ – номер вершины уровня m характеристической ломаной в списке всех вершин триангуляции, полагаем $l_0^n = 0$, $\hat{L}^n = \left\{\hat{l}_m^n = \dfrac{m}{3\times 2^k} l_{3\cdot 2^k}^n;\ m = 0, \ldots, 3\times 2^k\right\}$.

Λ^n – вектор, содержащий изменения полярных углов вершин характеристической ломаной за один шаг по времени, $\{\lambda_{i(m)}^n \in \Lambda^n \,|\, \lambda_{i(m)}^n = \phi_{i(m)}^n - \phi_{i(m)}^{n-1}, 0 \leqslant m \leqslant 3\times 2^k)\}$.

С помощью сплайновой аппроксимации вычислим вектор $\hat{P}^n$ такой, что соответствия $P \to L_0^n$ и $\hat{P}^n \to \hat{L}^n$ задают одну функцию, затем с помощью сплайновой аппроксимации, вычисляя новые векторы $\hat{R}^n$ и $\hat{H}^n$, как значения функций $\hat{P}^n \to \hat{R}^n$, $\hat{P}^n \to \hat{H}^n$ в точках вектора $\hat{P}^n$ соответ-



Фиг. 4. Эволюция потока средней кривизны на сфере с перераспределением от времени $t = n\tau$ при $k = 3$, $\tau = 0.01$.



Фиг. 5. Зависимость числа обусловленности $\mu(C^n)$ для начальной сферы от времени $t = n\tau$ при различных значениях числа шагов разбиения k.

ственно. Результатом перераспределения служат точки с координатами $\hat{x}_i = \hat{r}_i \cos\phi_i^n$; $\hat{y}_i = r_i \sin\phi_i^n$; $z_i = \hat{h}_i$.

Общий алгоритм описывается следующим образом.

Алгоритм

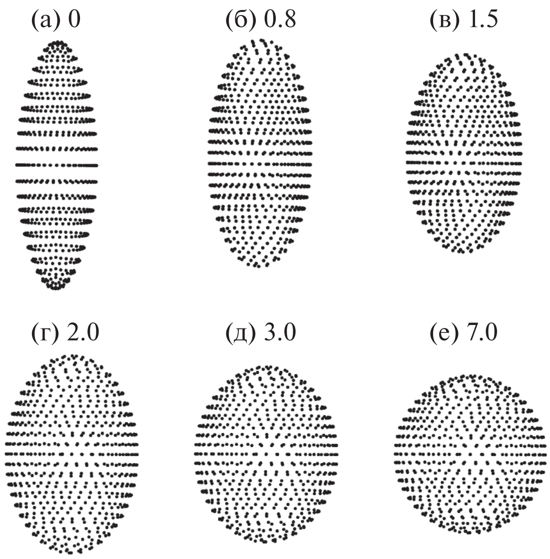
Шаг 1. Определить и создать глобальные данные: векторы Φ^n, R^n, H^n.

Шаг 2. Проделать итерацию метода конечных элементов.

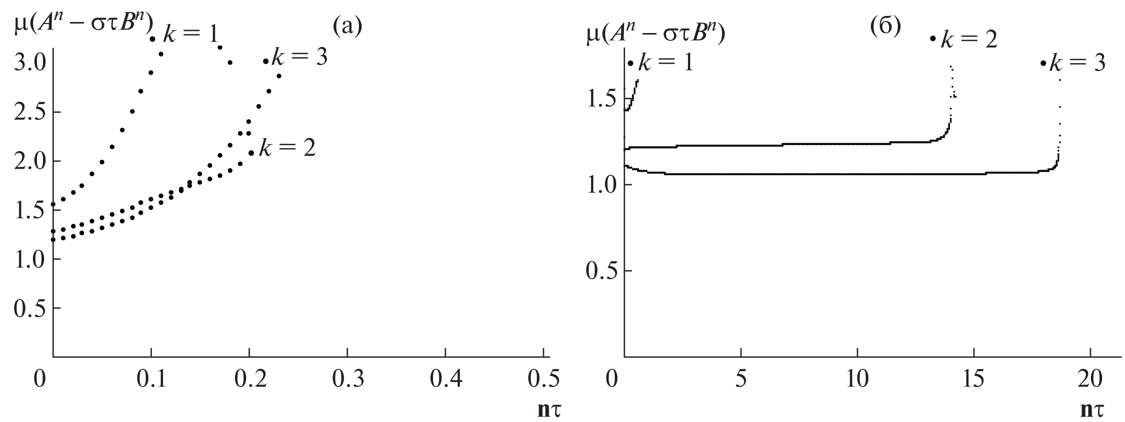
Шаг 3. Создать локальный вектор Λ^n, элементы которого содержат угол поворота вершин характеристической ломаной в горизонтальной плоскости.

Шаг 4. Перераспределить вершины характеристической ломаной равномерно по ее длине и определить координаты ее вершин.

Шаг 5. Определить координаты вершин множества V триангулированной поверхности для каждого набора вершин одного уровня с учетом поворота вершин характеристической ломаной в горизонтальной плоскости.



Фиг. 6. Эволюция эллипсоида вращения под действием дискретного потока средней кривизны с перераспределением от времени $t = n\tau$ при $k = 3$, $\tau = 0.01$.



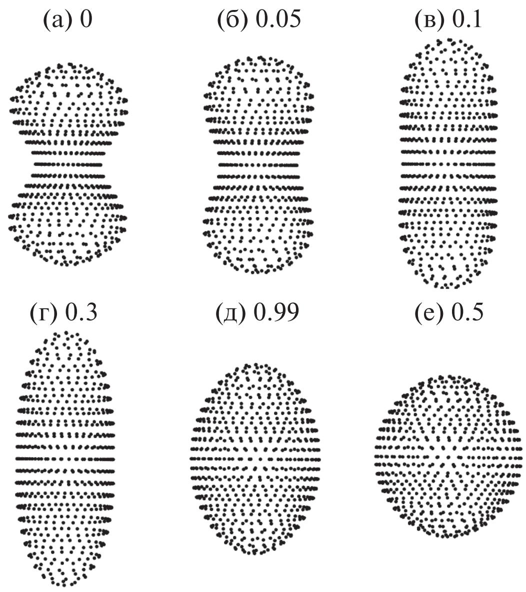
Фиг. 7. Зависимость числа обусловленности $\mu(C^n)$ для начального эллипсоида вращения от времени $t = n\tau$ при различных значениях числа шагов разбиения k.

5. ПРИМЕРЫ

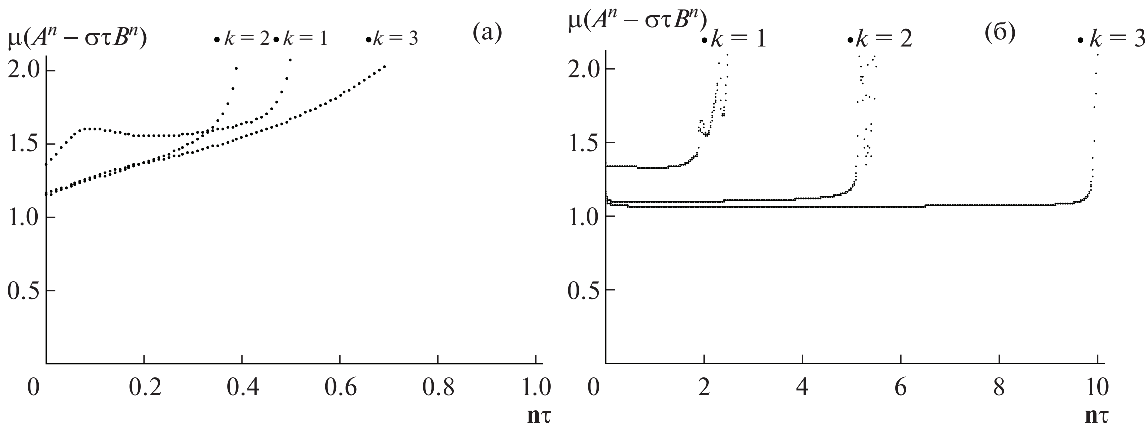
Представленные в работе вычисления выполнены на персональном компьютере с процессором i5 2,4 GHz. Код программы написан на языке программирования "C++11", с использованием библиотеки "Eigen"(eigen.tuxfamily.org).

Эволюция триангулированной сферы единичного радиуса под действием потока средней кривизны с перераспределением ее вершин показана на фиг. 4. Соответствующий ей график значения числа обусловленности $\mu(C^n)$ показывает, что при $t = \tau n > 8.0$ численное решение перестает соответствовать точному (см. фиг. 5).

Эволюция эллипсоида вращения с полуосями $a = b = 1$, $c = 3$ под действием нормализованного дискретного потока средней кривизны показана на фиг. 6, здесь $k = 3$. При этом используется перераспределение вершин. Соответствующая зависимость числа обусловленности $\mu(C^n)$ от вре-



Фиг. 8. Эволюция гантели первого типа под действием дискретного потока средней кривизны с перераспределением вершин от времени $t = n\tau$ при $k = 3$, $\tau = 0.01$.

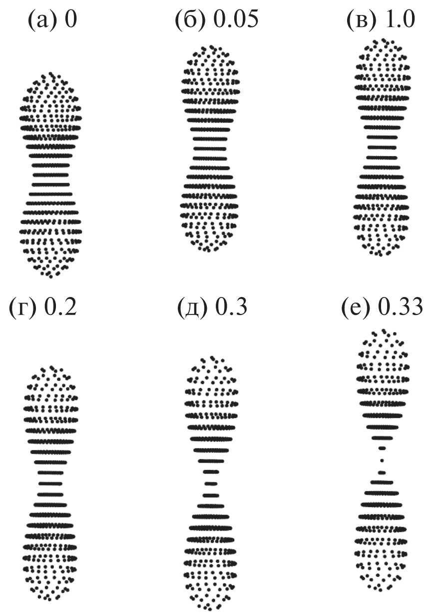


Фиг. 9. Зависимость числа обусловленности $\mu(C^n)$ для начальной гантели первого типа от времени $t = n\tau$ при различных значениях числа шагов разбиения k.

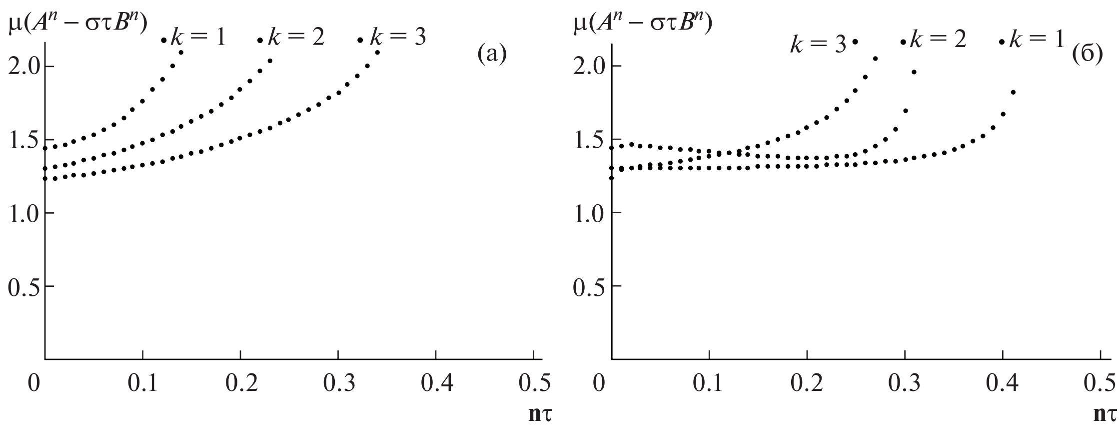
мени показана на фиг. 7. Численное моделирование потока средней кривизны в этом случае, как и в случае сферы, находится в полном согласии с теоремой 1.

Под действием потока средней кривизны поверхность вращения, имеющая вначале форму гантели, может эволюционировать по двум различным сценариям, в зависимости от формы профильной кривой. Рассмотрим два типа поверхностей, имеющих форму гантели. В первом случае поверхность стягивается к сфере (см. фиг. 8). Во втором случае поток формирует сингулярность (см. фиг. 10). Поведение числа обусловленности $\mu(C^n)$ в этих двух случаях показано на фиг. 9 и 11. Отметим, что к этим поверхностям теорема 1 не применима.

Для каждой из вышеописанных триангулированных поверхностей на фиг. 5, 7, 9, 11 показано, как меняется число обусловленности $\mu(C^n)$ в процессе эволюции поверхности под действием дискретного потока средней кривизны, если применить алгоритм перераспределения вершин.



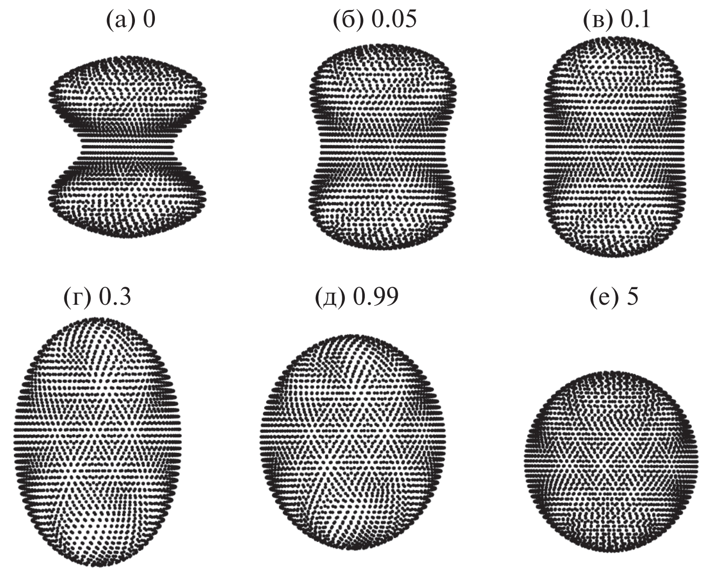
Фиг. 10. Эволюция гантели второго типа под действием дискретного потока средней кривизны с перераспределением от времени $t = n\tau$ при $k = 3$, $\tau = 0.01$.



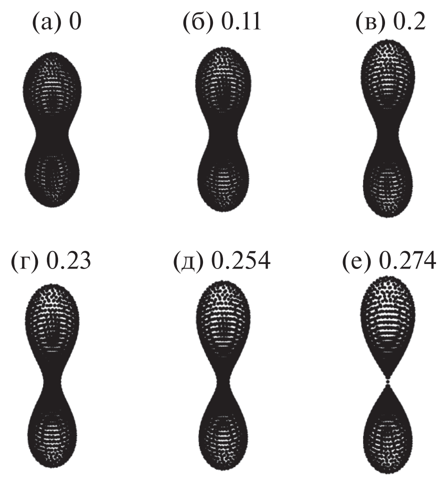
Фиг. 11. Зависимость числа обусловленности $\mu(C^n)$ для начальной гантели второго типа от времени $t = n\tau$ при различных значениях числа шагов разбиения k.

Из графиков видно, что увеличение числа шагов разбиения k увеличивает устойчивость численного решения для выпуклых поверхностей, замедляя рост числа обусловленности. Применение алгоритма перераспределения влечет за собой ограничение роста числа обусловленности в окрестности значения 1.5 на значительный промежуток времени для выпуклых поверхностей. В случае невыпуклых поверхностей зависимость числа обусловленности от шага разбиения k выглядит иначе. Отметим, что для гантели второго типа увеличение числа шагов разбиений k увеличивает скорость роста числа обусловленности $\mu(C^n)$ в процессе эволюции гантели под действием дискретного потока средней кривизны с перераспределением в силу формирования особенности.

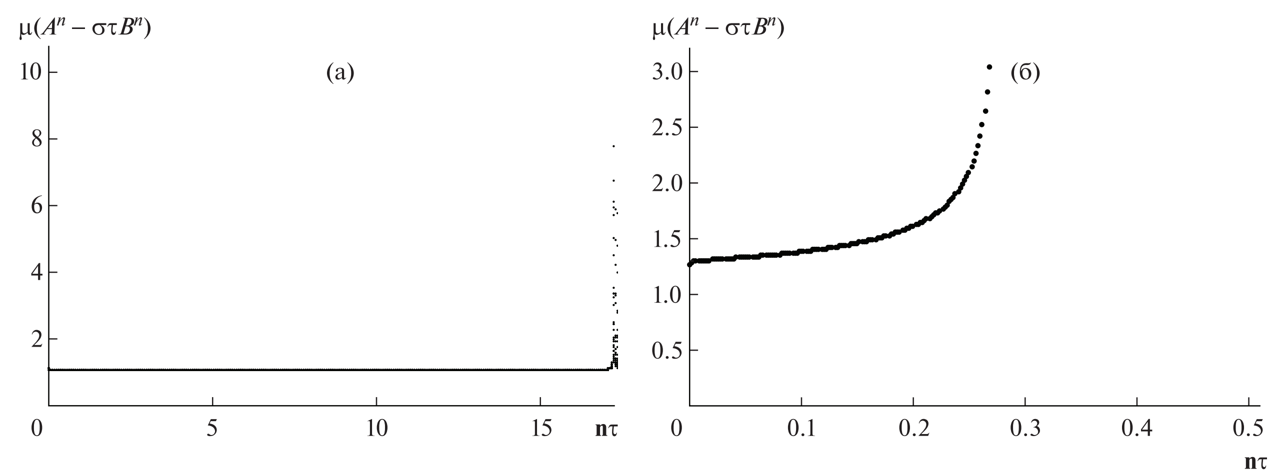
Наконец, приведем результаты расчетов для двух типов “гантелей” при $k = 4$, которые лучше приближают точное решение потока средней кривизны, чем для $k = 1, 2, 3$. Использование более мощного компьютера позволит в дальнейшем увеличить число шагов разбиения k.



Фиг. 12. Эволюция гантели первого типа под действием дискретного потока средней кривизны с перераспределением по времени $t = n\tau$ при $k = 4$, $\tau = 0.002$.



Фиг. 13. Эволюция гантели второго типа под действием дискретного потока средней кривизны с перераспределением от времени $t = n\tau$ при $k = 4$, $\tau = 0.002$.



Фиг. 14. Зависимость числа обусловленности $\mu(C^n)$ для гантелей первого (а) и второго (б) типа от времени $t = n\tau$ при $k = 4$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Попеленскому Фёдору Юрьевичу за ценные обсуждения, советы и рекомендации по оформлению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hamilton R.S.* Three manifold with positive Ricci curvature // J. Differential Geometry. 1982. V. 17. P. 255–306.
2. *Perelman G.* Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. arXiv:math/0307245 [math.DG]
3. *Chow B.* The Ricci flow on 2-sphere // J. Differential Geometry. 1991. V. 33. P. 325–334.
4. *Gage M., Hamilton R.S.* The heat equation shrinking convex plane curves // J. Differential Geometry. 1986. V. 23. P. 69–96.
5. *Bennet C., Feng L.* Combinatorial Ricci Flows on Surfaces // J. Differential Geometry. 2003. V. 63. P. 97–129.
6. *Pepa R.Yu., Popelensky Th.Yu.* On Convergence of combinatorial ricci flow on surfaces with negative weights // Lobachevskii Journal of Math. V. 38. № 6. P. 1061–1068.
7. *Pepa R.Yu., Popelensky Th.Yu.* Equilibrium for a combinatorial ricci flow with generalized weights on a tetrahedron // Regular and Chaotic Dynamics. V. 22. № 5. P. 566–578.
8. *Gerhard H.* Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres // J. Differential Geometry. 1984. V. 20. P. 237–266.
9. *Grayson M.* The heat equation shrinks embedded plane curves to round points // J. Differential Geometry. 1987. V. 26. P. 285–314.
10. *Altschuler S., Angenent S.B., Yoshikazu Giga.* Mean curvature flow through singularities for surfaces of rotation // J. Geometric Analysis. 1995. V. 5. P. 293–358.
11. *Baumgardner J.R., Frederickson P.O.* Icosahedral discretization of the two-sphere // SIAM J. Numer. Anal. V. 22. № 6. P. 1107–1115.