ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 2, с. 277–285

УДК 519.63

К столетию со дня рождения академика А.А. Самарского

СХЕМЫ ПОПЕРЕМЕННО-ТРЕУГОЛЬНОГО МЕТОДА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1)]

© 2019 г. П. Н. Вабищевич

(115191 Москва, ул. Б. Тульская, 52, ИБРАЭ РАН, Россия;
677000 Якутск, ул. Белинского, 58, СВФУ им. М.К. Аммосова, Россия)
e-mail: vabishchevich@gmail.com
Поступила в редакцию 22.05.2018 г.

Схемы попеременно-треугольного метода А.А. Самарского основаны на расщеплении оператора задачи на два оператора, которые сопряжены друг другу. При приближенном решении задачи Коши для эволюционного уравнения первого порядка это позволяет строить безусловно устойчивые двухкомпонентные факторизованные схемы расщепления. Для параболических задач на основе попеременно-треугольного метода строятся явные схемы. Аппроксимационные свойства можно улучшить за счет использования трехслойных схем. В работе отмечены основные возможности по построению схем попеременно-треугольного метода для эволюционных уравнений второго порядка. Новые схемы строятся на основе регуляризации стандартных схем попеременно-треугольного метода. Отмечены особенности построения схем попеременно-треугольного метода для задач со многими операторными слагаемыми, эволюционных уравнений второго порядка с операторными слагаемыми для первой производной по времени. Исследование проводится на основе общей теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем. Библ. 16.

Ключевые слова: эволюционное уравнение второго порядка, попеременно-треугольный метод, схемы расщепления, устойчивость операторно-разностных схем.

DOI: 10.1134/S0044466919020157

ВВЕДЕНИЕ

При приближенном решении краевых задач для нестационарных уравнений [1], [2] безусловно устойчивые схемы строятся на основе неявных аппроксимаций по времени. Вычислительная реализация таких схем для параболических задач связана с необходимостью решения сеточных эллиптических задач.

В вычислительном плане явные схемы имеют несомненные преимущества перед неявными. Это достоинство имеет важное значение при построении вычислительных алгоритмов, которые ориентированы на вычислительные системы параллельной архитектуры. Основной недостаток явных схем связан с жесткими ограничениями на допустимый шаг по времени [2], [3].

Большой интерес имеют явные схемы, вычисления в которых организованы по принципу бегущего счета. Такие схемы фактически основаны на расщеплении оператора задачи на два оператора и вынесении на новый временной слой только одного оператора. С учетом такой неоднородной аппроксимации по времени говорят о явно-неявных схемах. В отличие от стандартных явных схем такие схемы являются безусловно устойчивыми, но имеют худшие свойства по аппроксимации. История явных схем бегущего счета начинается с работы [4]. Современный этап явно-неявных схем связывается со схемами попеременно-треугольного метода Самарского (см. [2], [5]).

Классические схемы попеременно-треугольного метода строятся как факторизованные операторно-разностные схемы с аддитивным расщеплением оператора задачи (матрицы) на сопряженные друг другу слагаемые. Можно рассматривать и другие классы схем расщепления (см. [6], [7]).

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (соглашение № 14.Y26.31.0013).

В работе [8] предложена многослойная модификация схем попеременно-треугольного метода. Повышение точности достигается за счет корректирующего слагаемого с производной по времени, которое берется с предыдущего временного слоя. Погрешность удается уменьшить на порядок по шагу по времени.

Схемы попеременно-треугольного метода традиционно строятся для эволюционных уравнений первого порядка, например, для начально-краевых задач для параболических уравнений. Такие схемы расщепления представляют также интерес для многих прикладных проблем, которые связываются с эволюционными уравнениями второго порядка. Факторизованные схемы классического варианта попеременно-треугольного метода для эволюционного уравнения второго порядка рассмотрены в [9]. Другим возможностям в этом направлении посвящена настоящая работа. Построение новых схем расщепления базируется на использовании принципа регуляризации [2] операторно-разностных схем классического попеременно-треугольного метода. Рассмотрены задачи со многими операторными слагаемыми, задачи для эволюционных уравнений второго порядка с операторными слагаемыми для первой производной по времени. Методической основой нашего рассмотрения является общая теория устойчивости (корректности) операторно-разностных схем (см. [2], [3], [10]).

1. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Рассматривается краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка. В качестве модельной выступает начально-краевая задача в прямоугольнике

$$\Omega = \{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} = (x_1, x_2),\ 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}.$$

Аналогично рассматриваются задачи в нерегулярных областях при использовании схем конечного объема (см., например, [11]) или схемы метода конечных элементов с процедурами диагонализации матрицы масс (см. [12]).

Неизвестная функция $u(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = f(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \le T, \tag{1.1}$$

в котором $\underline{k} \le k(x) \le \overline{k}$, $x \in \Omega$, $\underline{k} > 0$. Уравнение (1.1) дополним однородными граничными условиями Дирихле

$$u(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 < t \le T. \tag{1.2}$$

Кроме того, задаются начальные условия

$$u(\mathbf{x},0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},0) = v^0(x), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{1.3}$$

Рассмотрение более общих задач с неоднородной правой частью проводится аналогично, но сопряжено с большими, непринципиальными в нашем случае, деталями технического характера.

В Ω зададим, для простоты, равномерную прямоугольную сетку

$$\overline{\omega} = \{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} = (x_1, x_2),\ x_\alpha = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0,1,\ldots,N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\ \alpha = 1,2\}$$

и пусть ω – множество внутренних узлов ($\overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega$). Для сеточных функций $y(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial\omega$ определим конечномерное гильбертово пространство $H = L_2(\omega)$ со скалярным произведением и нормой

$$(y,w) := \sum_{x\in\omega} y(\mathbf{x})w(\mathbf{x})h_1h_2, \quad \|y\| := (y,y)^{1/2}.$$

Для положительно-определенного самосопряженного оператора D ($D = D^* > 0$) определим пространство H_D, в котором

$$(y,w)_D := (Dy,w), \quad \|y\|_D := (y,y)_D^{1/2}.$$

Сеточный оператор задачи есть

$$A = D_1 + D_2.$$

Для одномерных сеточных операторов $D_\alpha : H \to H$, $\alpha = 1, 2$, имеем

$$(D_1 y)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{h_1}\left(k(x_1 + 0.5h_1, x_2)\frac{y(x_1 + h_1, x_2) - y(\mathbf{x})}{h_1} - \right.$$

$$\left. - k(x_1 - 0.5h_1, x_2)\frac{y(\mathbf{x}) - y(x_1 - h_1, x_2)}{h_1}\right), \quad \mathbf{x} \in \omega,$$

$$(D_2 y)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{h_2}\left(k(x_1, x_2 + 0.5h_2)\frac{y(x_1, x_2 + h_2) - y(\mathbf{x})}{h_2} - \right.$$

$$\left. - k(x_1, x_2 - 0.5h_2)\frac{y(\mathbf{x}) - y(x_1, x_2 - h_2)}{h_2}\right), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

В классе достаточно гладких коэффициентов k и функций u эти операторы аппроксимируют дифференциальные операторы со вторым порядком. В пространстве сеточных функций H имеют место (см. [2], [5]) неравенства

$$D_\alpha = D_\alpha^*, \quad \underline{k}\delta_\alpha E \le D_\alpha \le \overline{k}\Delta_\alpha E,$$

$$\delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2}\sin^2\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2}\cos^2\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

где E — единичный (тождественный) оператор в H. В силу этого имеем

$$A = A^*, \quad \underline{k}\delta E \le A \le \overline{k}\Delta_\alpha E, \quad \delta = \sum_{\alpha=1}^{2}\delta_\alpha, \quad \Delta = \sum_{\alpha=1}^{2}\Delta_\alpha. \tag{1.4}$$

После аппроксимации по пространству от (1.1)–(1.3) приходим к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad 0 < t \le T, \tag{1.5}$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \frac{du}{dt}(\mathbf{x}, 0) = v^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{1.6}$$

Свое рассмотрение мы начнем с простейшей явной двухслойной схемы для приближенного решения задачи (1.5), (1.6). Пусть τ есть шаг равномерной сетки по времени и пусть $y^n = y(t^n)$, $t^n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$, $N\tau = T$. Уравнение (1.5) аппроксимируем явной трехслойной схемой

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + Ay^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1. \tag{1.7}$$

С учетом (1.6) операторно-разностное уравнение (1.7) дополняется начальными условиями

$$y^0 = u^0, \quad y^1 = u^1. \tag{1.8}$$

Для u^1 положим, например,

$$u^1 = u^0 + \tau v^0 - \frac{\tau^2}{2}Au^0.$$

Погрешность аппроксимации разностной схемы (1.7), (1.8) есть $O(|h|^2 + \tau^2)$, где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

Условия устойчивости схемы (1.7), (1.8) хорошо известны и базируются на использовании следующего основного результата (см. [2], [3], [10]).

Лемма 1. *Трехслойная операторно-разностная схема*

$$B\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + R\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + Ay^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \tag{1.9}$$

с постоянными (не зависящими от n) операторами

$$B \ge 0, \quad R = R^* > 0, \quad A = A^* > 0,$$

и выполнении (1.8) *устойчива при*

$$R > \frac{\tau^2}{4} A. \tag{1.10}$$

При этом для решения справедлива априорная оценка

$$\mathscr{E}_{n+1} \le \mathscr{E}_n, \tag{1.11}$$

в которой

$$\mathscr{E}_{n+1} = \left\| \frac{y^{n+1} + y^n}{2} \right\|_A^2 + \left\| \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} \right\|_{R - \frac{\tau^2}{4}A}^2 .$$

Для явной схемы (1.7), (1.8) имеем

$$B = 0, \quad R = E,$$

поэтому условие устойчивости (1.10) будет выполнено при

$$\tau \le \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{2}{\|A\|^{1/2}}. \tag{1.12}$$

Принимая во внимание (1.4), для шага по времени имеем $\tau \le \tau_0$, где для рассматриваемой модельной задачи $\tau_0 = O(|h|)$.

2. СХЕМЫ ПОПЕРЕМЕННОГО ТРЕУГОЛЬНОГО МЕТОДА

Проведем расщепление оператора задачи A на два оператора:

$$A = A_1 + A_2. \tag{2.1}$$

Отдельные операторные слагаемые в (2.1) должны обеспечить возможность явных вычислений при построении соответствующих схем расщепления.

В классическом варианте попеременно-треугольного метода (см. [2], [5], [13]) расщепление матрицы проводится на треугольные матрицы, на выделение сопряженных друг другу операторов

$$A_1 = A_2^*. \tag{2.2}$$

Применительно к рассматриваемой задаче (1.5), (1.6) имеем

$$(A_1 y)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{h_1} k(x_1 + 0.5h_1, x_2) \frac{y(x_1 + h_1, x_2) - y(\mathbf{x})}{h_1} -$$
$$- \frac{1}{h_2} k(x_1, x_2 + 0.5h_2) \frac{y(x_1, x_2 + h_2) - y(\mathbf{x})}{h_2}, \quad \mathbf{x} \in \omega,$$
$$(A_2 y)(\mathbf{x}) = k(x_1 - 0.5h_1, x_2) \frac{y(\mathbf{x}) - y(x_1 - h_1, x_2)}{h_1} +$$
$$+ k(x_1, x_2 - 0.5h_2) \frac{y(\mathbf{x}) - y(x_1, x_2 - h_2)}{h_2}, \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Тем самым происходит фактическое расщепление потоков.

Приведенное расщепление является точечным, расщепление потоков проводится во всех направлениях. Во многих случаях можно ориентироваться на блочное треугольное расщепление, когда расщепляются потоки не во всех направлениях. Например, можно положить

$$(A_1 y)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{h_1} k(x_1 + 0.5h_1, x_2) \frac{y(x_1 + h_1, x_2) - y(\mathbf{x})}{h_1} + (D_2 y)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega,$$

$$(A_2y)(\mathbf{x}) = k(x_1 - 0.5h_1, x_2)\frac{y(\mathbf{x}) - y(x_1 - h_1, x_2)}{h_1} + (D_2y)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Для приближенного решения задачи (1.5), (1.6) с учетом (2.1), (2.2) применяются те или иные схемы расщепления, когда переход на новый временной слой связан с решением подзадач с отдельными операторами A_1 и A_2. Мы должны ориентироваться на схемы расщепления для эволюционных уравнений второго порядка (см. [7]). Для рассматриваемого двухкомпонентного расщепления (2.1) наиболее интересными являются факторизованные аддитивные схемы. В этом случае вместо (1.7) используется

$$(E + \sigma\tau^2 A_1)(E + \sigma\tau^2 A_2)\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n+1}}{\tau^2} + Ay^n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N - 1, \tag{2.3}$$

где σ — весовой параметр.

Теорема 1. *Факторизованная схема попеременно-треугольного метода* (2.1)–(2.3) *безусловно устойчива при* $\sigma \geq 0.25$, *а для решения справедлива оценка* (1.11), *в которой*

$$R = (E + \sigma\tau^2 A_1)(E + \sigma\tau^2 A_2). \tag{2.4}$$

Доказательство. Факторизованный оператор R при расщеплении (2.1), (2.2) и $\sigma \geq 0$ является самосопряженным и положительно-определенным. Более точно,

$$R = R^* = E + \sigma\tau^2 A + \sigma^2\tau^4 A_1 A_2 \geq E + \sigma\tau A.$$

С учетом этого легко проверяются условия леммы 8. Устойчивость (см. (1.10)) будет всегда иметь место при $\sigma \geq 0.25$.

При построении аппроксимаций по времени основное внимание уделяется погрешности аппроксимации по времени. Для схемы (2.1)–(2.3) погрешность представим в виде

$$\psi^n = \psi^n_\sigma + \psi^n_s, \tag{2.5}$$

где

$$\psi^n_\sigma = \sigma\tau^2 A\frac{d^2u}{dt^2}(t^n) + O(\tau^3),$$
$$\psi^n_s = \sigma^2\tau^4 A_1 A_2\frac{d^2u}{dt^2}(t^n) + O(\tau^5).$$

Первая часть погрешности ψ^n_σ является стандартной при использовании обычной схемы с весами

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n+1}}{\tau^2} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N - 1, \tag{2.6}$$

для эволюционного уравнения второго порядка (1.5).

Основное внимание при рассмотрении погрешности явных схем попеременно-треугольного метода должно уделяться второй части погрешности ψ^n_s в (2.5). Принимая во внимание явное представление для операторов A_1 и A_2 для модельной задачи (1.5), (1.6), получаем $\psi^n_s = O(\tau^4|h|^{-2})$. В силу этого операторно-разностная схема (2.1)–(2.3) для задачи (1.5), (1.6) имеет точность $\mathbb{O}(\tau^2 + \tau^4|h|^{-2})$.

3. ПОПЕРЕМЕННО-ТРЕУГОЛЬНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Схемы попеременно-треугольного метода можно интерпретировать как варианты регуляризованных схем. Теория регуляризации разностных схем [14] рассматривается как принцип улучшения качества разностной схемы за счет введения регуляризаторов в операторы исходной разностной схемы. Принцип регуляризации обычно используется при построении безусловно устойчивых разностных схем. Такой общий методологический прием улучшения качества разностных схем удобно использовать и при построении схем, которые более удобны для вычислительной реализации, при построении схем расщепления [7].

Принцип регуляризации операторно-разностных схем при построении аддитивных схем реализуется следующим образом:

1) для исходной задачи строится простейшая разностная схема (производящая разностная схема), не обладающая необходимыми свойствами, т.е. схема не является схемой расщепления;

2) разностная схема записывается в единой (канонической) форме, для которой условия устойчивости известны;

3) качества разностной схемы (принадлежность классу схем расщепления) улучшаются за счет возмущения операторов разностной схемы.

Тем самым принцип регуляризации разностных схем базируется на использовании уже известных условий устойчивости. Такие критерии дает общая теория устойчивости разностных схем [2], [3]. С этой точки зрения мы можем рассматривать принцип регуляризации как элемент конструктивного использования общих результатов теории устойчивости разностных схем. Это достигается за счет записи разностных схем в достаточно общей канонической форме и формулировкой критериев устойчивости, удобных для проверки.

В качестве производящей естественно взять схему с весами (2.6). Она имеет хорошие свойства по устойчивости – безусловно устойчива при $\sigma \geq 0.25$. Для перехода на новый слой по времени решается сеточная эллиптическая задача

$$Sy^{n+1} = \chi^n, \qquad (3.1)$$

в которой

$$S = E + \sigma\tau^2 A,$$

при известном χ^n. Переход к двухкомпонентной (см. (2.1)) схеме расщепления может быть обеспечен трансформацией

$$E + \sigma\tau^2 A \to C := (E + \sigma\tau^2 A_1)(E + \sigma\tau^2 A_2). \qquad (3.2)$$

Производящая схема (2.6) записывается в канонической форме трехслойных схем (1.9) при

$$B = 0, \quad R = E + \sigma\tau^2 A.$$

Условия устойчивости этой схемы (см. лемму 1) не ухудшатся, если мы увеличим операторы B и R. Рассмотрим некоторые возможности такой регуляризации с переходом к схеме расщепления с применением трансформации (3.2).

Для схемы (1.9) на каждом шаге по времени решается задача (3.1) при

$$S = R + \frac{\tau}{2}B. \qquad (3.3)$$

Стандартная схема попеременно-треугольного метода (2.3) соответствует регуляризации оператора R, при этом оператор B не возмущается ($B = 0$). В этом случае $R = C$ и поэтому

$$B \to B, \quad R \to R + \sigma^2\tau^4 A_1 A_2.$$

С учетом этого схему (2.3) можно записать в виде

$$(E + \sigma^2\tau^4 A_1 A_2)\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n+1}}{\tau^2} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = 0,$$

выделив регуляризирующее слагаемое при разностной второй производной по времени.

Новый вариант регуляризованной схемы попеременно-треугольного метода основан на возмущении только оператора B. Принимая во внимание (3.3), имеем

$$B \to B + 2\sigma^2\tau^3 A_1 A_2, \quad R \to R.$$

Это позволяет перейти от производящей схемы (2.6) к схеме

$$2\sigma^2\tau^3 A_1 A_2 \frac{y^{n+1} - y^{n+1}}{2\tau} + \frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n+1}}{\tau^2} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N - 1. \qquad (3.4)$$

Регуляризующее слагаемое связано с центральной разностной производной по времени – первое слагаемое в (3.4). С привлечением леммы 1 верна

Теорема 2. *Регуляризованная схема попеременно-треугольного метода* (2.1), (2.2), (3.4) *безусловно устойчива при* $\sigma \geq 0.25$, *а для решения справедлива оценка* (1.11), *в которой R определяется согласно* (2.4).

Погрешность аппроксимации для схемы (3.4) представляется в виде (2.5), где теперь

$$\psi_s^n = 2\sigma^2\tau^3 A_1 A_2 \frac{du}{dt}(t^n) + O(\tau^4).$$

В силу этого точность приближенного решения модельной задачи (1.5), (1.6) есть $\mathbb{O}(\tau^2 + \tau^3 |h|^{-2})$.

Дополнительные возможности связаны с использованием многослойных вариантов схем попеременно-треугольного метода (см. [8]). В варианте (3.4) переход к схеме попеременно-треугольного метода обеспечивается слагаемым с первой производной по времени, в стандартном варианте (2.3) – слагаемым со второй производной по времени. Можно использовать вариант, когда используется дополнительное слагаемое с третьей производной по времени. В этом случае имеем

$$\sigma^2\tau^5 A_1 A_2 \frac{y^{n+1} - 3y^n + 3y^{n-1} - y^{n-2}}{\tau^3} + \frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n+1}}{\tau^2} +$$
$$+ A(\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = 0, \quad n = 2, 3, \ldots, N - 1,$$

а погрешность расщепления есть

$$\psi_s^n = \sigma^2\tau^5 A_1 A_2 \frac{d^3u}{dt^3}(t^n) + O(\tau^6).$$

Условия устойчивости этой четырехслойной схемы необходимо исследовать отдельно.

4. ЗАДАЧИ СО МНОГИМИ ОПЕРАТОРНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Отметим возможности построения схем попеременно-треугольного метода для некоторых более общих задач. Примером выступает задача (1.5), (1.6), когда оператор A есть сумма некоторых операторов, для каждого из которых применяется та или иная процедура регуляризации. Пусть, например, для A имеет место двухкомпонентное представление

$$A = C + D, \quad C = C^* > 0, \quad D = D^* > 0. \tag{4.1}$$

Регуляризованную схему для (1.5), (4.1) будем строить (см. [15], [16]) на основе явной схемы

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + \widetilde{C}y^n + \widetilde{D}y^n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N - 1, \tag{4.2}$$

с отдельным возмущением операторов C и D:

$$C \to \widetilde{C} = \widetilde{C}^* > 0, \quad D \to \widetilde{D} = \widetilde{D}^* > 0.$$

Схема (1.8), (4.2) на основании леммы 1 устойчива (см. (1.12)) при

$$\|\widetilde{C} + \widetilde{D}\|\tau^2 \leq 4.$$

Принимая во внимание, что $\|\widetilde{C} + \widetilde{D}\| \leq \|\widetilde{C}\| + \|\widetilde{D}\|$, это условие выполняется при

$$\|\widetilde{C}\|\tau^2 \leq \nu, \quad \|\widetilde{D}\|\tau^2 \leq 4 - \nu, \quad 0 < \nu < 4,$$

и связывается с ограничениями для отдельных операторов $\widetilde{C}$ и $\widetilde{D}$. В простейшем случае ($\nu = 2$) имеем

$$\|\widetilde{C}\|\tau^2 \leq 2, \quad \|\widetilde{D}\|\tau^2 \leq 2. \tag{4.3}$$

Для оператора D будем использовать стандартную возможность регуляризации, которая ассоциируется с обычными схемами с весами. Положим

$$\widetilde{D} = (E + \sigma\tau^2 D)^{-1} D. \tag{4.4}$$

Легко проверяется, что второе неравенство (4.3) будет выполнено при ограничениях $\sigma \geq 0.5$.

Оператор C будем регуляризовать на основе попеременно-треугольного метода. При расщеплении

$$C = C_1 + C_2, \quad C_1^* = C_2 \tag{4.5}$$

положим

$$\widetilde{C} = (E + \sigma\tau^2 C_1)^{-1} C (E + \sigma\tau^2 C_2)^{-1}. \tag{4.6}$$

Первое неравенство (4.3) будет выполнено, если

$$0 \le (E + \sigma\tau^2 C_1)^{-1} C (E + \sigma\tau^2 C_2)^{-1} \le \frac{2}{\tau^2} E.$$

Для этого достаточно выбрать $\sigma \ge 0.5$.

Проведенные рассуждения позволяют сформулировать достаточные условия устойчивости схемы с двумя операторными слагаемыми.

Теорема 3. *Регуляризованная схема попеременно-треугольного метода* (4.2), (4.4)–(4.6) *безусловно устойчива при* $\sigma \ge 0.5$.

Рассмотренная схема демонстрирует возможность построения схем со многими операторными слагаемыми на основе регуляризации отдельных операторов. В частности, регуляризация этих операторных слагаемых может проводиться на основе попеременно-треугольного метода.

5. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

Среди наиболее важных более общих задач отметим задачи для эволюционного уравнения второго порядка с операторным слагаемым для первой производной по времени. Вместо (1.5) рассматривается уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad 0 < t \le T, \tag{5.1}$$

с некоторым постоянным оператором

$$B = B^* \ge 0. \tag{5.2}$$

Будем считать, что подобно оператору A (см. (2.1), (2.2)) для оператора B имеем треугольное расщепление:

$$B = B_1 + B_2, \quad B_1^* = B_2. \tag{5.3}$$

Стандартная трехслойная схема с весами второго порядка аппроксимации для задачи (1.6), (5.1) имеет вид

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + B\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = 0. \tag{5.4}$$

Она устойчива (см. лемму 1) при обычных ограничениях на вес $\sigma \ge 0.25$. Нас интересует возможность построения схем попеременно-треугольного метода при треугольном разложении не только оператора A в соответствии с (2.1), (2.2), но и оператора B в соответствии с (5.2), (5.3).

При использовании схемы (5.4) на новом слое по времени решается сеточная задача

$$(E + \tau R)y^{n+1} = \chi^{n+1},$$

при заданной правой части χ^{n+1} и

$$R = \frac{1}{2}B + \sigma\tau A.$$

Построение схем попеременно-треугольного метода можно проводить на основе разложения

$$R_\alpha = \frac{1}{2}B_\alpha + \sigma\tau A_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{5.5}$$

и транформации

$$E + \tau R \to (E + \tau R_1)(E + \tau R_2).$$

Дополнительное регуляризующее слагаемое (см. разд. 4) можно включить различным способом: например, с первой производной или со второй производной.

В первом варианте от (5.4) переходим к схеме

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + (B + 2\tau R_1 R_2)\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = 0. \quad (5.6)$$

Тем самым регуляризация проводится за счет первой производной по времени. Дополнительное слагаемое не нарушает условий устойчивости: схема устойчива при $\sigma \geq 0.25$.

Во втором варианте возмущается вторая производная по времени. В этом случае имеем

$$(E + \tau^2 R_1 R_2)\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + B\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = 0. \quad (5.7)$$

При такой трансформации исходной схемы (5.4) устойчивость сохраняется.

Теорема 4. *Схемы попеременно-треугольного метода* (5.5), (5.6) *и* (5.5), (5.7) *при расщеплении* (2.1), (5.7), (5.2), (5.3) *безусловно устойчивы при* $\sigma \geq 0.25$.

Отметим также возможность построения схем попеременно-треугольного метода для задачи (1.6), (5.1) на основе независимых регуляризаций операторов A и B. В соответствии с (4.5), (4.6) проведем регуляризацию оператора $A \to \widetilde{A}$, причем

$$\widetilde{A} = (E + \sigma\tau^2 A_1)^{-1} A (E + \sigma\tau^2 A_2)^{-1}. \quad (5.8)$$

Вместо (5.4) рассматривается схема

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + B\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + \widetilde{A}y^{n+1} = 0,$$

которая устойчива при $\sigma \geq 0.25$. Регуляризация оператора B проводится аналогично (5.6) и (5.7).

Схеме (5.6) сопоставляется схема

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + \left(B + \frac{\tau}{2}B_1 B_2\right)\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + \widetilde{A}y^{n+1} = 0. \quad (5.9)$$

Аналогом (5.7) выступает схема

$$\left(E + \frac{\tau^2}{4}B_1 B_2\right)\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + B\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + \widetilde{A}y^{n+1} = 0. \quad (5.10)$$

Теорема 5. *Схемы попеременно-треугольного метода* (5.8), (5.9) *и* (5.8), (5.10) *при расщеплении* (2.1), (5.7), (5.2), (5.3) *безусловно устойчивы при* $\sigma \geq 0.25$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ascher U.M.* Numerical methods for evolutionary differential equations. Society for Industrial Mathematics, 2008.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
3. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
4. *Саульев В.К.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.: Физматгиз, 1960.
5. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1989.
7. *Vabishchevich P.N.* Additive Operator-Difference Schemes. Splitting Schemes. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2013.
8. *Вабищевич П.Н.* Трехслойные схемы попеременно-треугольного метода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 6. С. 942–952.
9. *Vabishchevich P.N.* Explicit schemes for parabolic and hyperbolic equations // Appl. Comput. 2015. Vol. 250. Pp. 424–431.
10. *Samarskii A.A., Matus P.P.,Vabishchevich P.N.* Difference schemes with operator factors. Berlin: Kluwer, 2002.
11. *Vabishchevich P.N., Zakharov P.E.* Explicit-Implicit Splitting Schemes for Parabolic Equations and Systems // Internat. Conference on Numerical Methods and Appl. Springer. 2014. P. 157–166.
12. *Thomée V.* Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. Berlin: Springer Verlag, 2006.
13. *Самарский А.А.* Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4. № 3. С. 580–585.
14. *Самарский А.А.* О регуляризации разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. С. 62–93.
15. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Регуляризованные аддитивные схемы полной аппроксимации // Докл. АН СССР. 1998. Т. 358. С. 461–464.
16. *Вабищевич П.Н.* Регуляризованные аддитивные операторно-разностные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 3. С. 449–457.