ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 2, с. 252–263

УДК 517.968

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

© 2019 г. Т. К. Юлдашев

(660014 Красноярск, пр-т Красноярский рабочий, 31, Сибирский гос. ун-т, Россия)

e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Поступила в редакцию 10.10.2017 г.

Рассмотрены вопросы существования и построения решений одной нелокальной краевой задачи для однородного интегродифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром и с двумя спектральными параметрами. Изучены особенности, возникшие при определении произвольных (неизвестных) постоянных. Вычислены значения спектральных параметров, для которых устанавливается разрешимость краевой задачи. Доказаны соответствующие теоремы. Приведены содержательные примеры. Библ. 18.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, краевая задача, вырожденное ядро, разрешимость, спектральные параметры.

DOI: 10.1134/S0044466919020169

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению начальных и граничных задач для обыкновенных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме. Изучению интегродифференциальных уравнений посвящено большое количество работ (см., например, [1]–[7]).

В настоящей работе изучается разрешимость нелокальной краевой задачи для обыкновенного интегродифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром и двумя спектральными параметрами. Вычисляются значения спектральных параметров, при которых устанавливается разрешимость рассматриваемой краевой задачи. Интегродифференциальные уравнения с вырожденным ядром при других постановках задач рассматривались, в частности, в [8]–[14].

Задача. Требуется найти функцию $u(t) \in C[0;T] \cap C^1(0;T] \cap C^2(0;T)$, удовлетворяющую на интервале $(0;T)$ уравнению вида

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) = \nu \int_0^T K(t,s)u(s)ds \tag{1}$$

и следующие условия:

$$u(T) = \int_0^T u(t)dt, \quad u'(T) = \varphi, \tag{2}$$

где $0 < T < \infty$ – заданное положительное число, λ – положительный спектральный параметр, ν – действительный спектральный параметр, $\varphi = \text{const}$, $K(t,s) = \sum_{i=1}^k a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t) \in C[0;T]$, $b_i(s) \in C[0;T]$. Здесь предполагается, что отличные от нуля функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1), (2)

С учетом вырожденности ядра уравнение (1) запишем в виде

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\int_0^T\sum_{i=1}^k a_i(t)b_i(s)u(s)ds. \tag{3}$$

С помощью обозначения

$$\tau_i=\int_0^T b_i(s)u(s)ds \tag{4}$$

уравнение (3) перепишется в виде

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\sum_{i=1}^k a_i(t)\tau_i$$

и решается методом вариации произвольных постоянных. В результате получим

$$u(t)=A_1\cos\lambda t+A_2\sin\lambda t+\eta(t), \tag{5}$$

где A_1, A_2 — пока произвольные постоянные,

$$\eta(t)=\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^k \tau_i h_i(t),\quad h_i(t)=\int_0^t \sin\lambda(t-s)a_i(s)ds,\quad i=\overline{1,k}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_1 и A_2 в (5) воспользуемся первым условием из (2) и получим равенство

$$A_1\sigma_1(\lambda)=A_2\sigma_2(\lambda)+\xi_0, \tag{6}$$

где $\sigma_1(\lambda)=-\lambda\cos\lambda T+\sin\lambda T$, $\sigma_2(\lambda)=\lambda\sin\lambda T+\cos\lambda T-1$, $\xi_0=\int_0^T\eta(t)dt-\eta(T)$.

Случай 1:

$$\sigma_1(\lambda)=\sigma_2(\lambda)=0. \tag{7}$$

Тогда из (6) приходим к тривиальному результату: $\xi_0=0$, т.е. $\nu=0$. В этом случае соответствующее дифференциальное уравнение $u''(t)+\lambda^2u(t)=0$ имеет бесконечное множество решений

$$u(t)=\omega_1\cos\lambda t+\omega_2\sin\lambda t, \tag{8}$$

где ω_1, ω_2 — произвольные постоянные.

Вычислим значения параметра λ, при которых имеет место (7). Пусть $\sigma_1(\lambda)=\sin\lambda T-\lambda\cos\lambda T=0$ при некоторых λ. Это условие эквивалентно уравнению $\operatorname{tg}\lambda T=\lambda$, которое имеет решения

$$\lambda_n=\frac{1}{T}\operatorname{arctg}\lambda_n+\frac{\pi n}{T},\quad n\in N, \tag{9}$$

где N — множество натуральных чисел. Формула (9) является алгебраическим уравнением относительно λ_n. Так как $\lambda_n>0$ и λ_n — положительная возрастающая функция, то отсюда следует условие разрешимости уравнения (9): $\lambda_n>\frac{n\pi}{T}$. Его можно решать методом последовательных приближений

$$\lambda_{n,\mu}=\frac{1}{T}\operatorname{arctg}\lambda_{n,\mu}+\frac{\pi n}{T},\quad \mu=1,2,3,\ldots,$$

или графическим способом

$$\chi=\lambda_n,\quad \chi=\frac{1}{T}\operatorname{arctg}\lambda_n+\frac{\pi n}{T}.$$

Пусть теперь при некоторых λ справедливо равенство $\sigma_2(\lambda) = \lambda\sin\lambda T + \cos\lambda T - 1 = 0$. Это условие эквивалентно уравнению

$$\cos(\lambda T - \theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \quad \text{где} \quad \theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Отсюда получаем две серии решений:

$$\lambda_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad \lambda_n = \frac{2}{T}\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n^2}} + \frac{2\pi n}{T}, \quad n \in N. \tag{10}$$

Вторая формула в (10) является алгебраическим уравнением относительно λ_n. Его тоже можно решать методом последовательных приближений или графическим способом.

Множество всех значений параметра λ, определенных в формуле (9), обозначим через Λ_1. Множество всех значений параметра λ, определенных в формуле (10), обозначим Λ_2. Общее число значений параметра λ, при которых имеет место условие (7), счетное. Поскольку $0 \leqslant T < \infty$, то $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$. Поэтому функция (8) не может являться решением краевой задачи (1), (2). Следовательно, краевая задача (1), (2) в данном случае не имеет решений.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (7). *Тогда на отрезке* $[0;T]$ *краевая задача* (1), (2) *не имеет решений*.

Случай 2. В (6) положим

$$\sigma_1(\lambda) \neq 0, \quad \sigma_2(\lambda) = 0. \tag{11}$$

Тогда из (6) получаем, что $A_1 = \dfrac{\xi_0}{\sigma_1(\lambda)}$ и A_2 — произвольное число. В этом случае спектр параметра λ состоит из множества Λ_2, определенного формулой (10), и формула (5) принимает вид

$$u(t,\lambda) = \frac{\xi_0}{\sigma_1(\lambda)}\cos\lambda t + A_2\sin\lambda t + \eta(t). \tag{12}$$

С учетом того, что

$$\eta(t) = \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i h_i(t), \quad \xi_0 = \int_0^T \eta(t)dt - \eta(T)$$

преобразуем формулу (12)

$$u(t,\lambda) = A_2\sin\lambda t + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\xi_i(t), \tag{13}$$

где

$$\xi_i(t) = \frac{\cos\lambda t}{\sigma_1(\lambda)}\left[\int_0^T h_i(t)dt - h_i(T)\right] + h_i(t), \quad h_i(t) = \int_0^t h_i(t) = \int_0^t \sin\lambda(t-s)a_i(s)ds, \quad i = \overline{1,k}.$$

Подставляя (13) в (4), приходим к системе алгебраических уравнений (САУ)

$$\tau_i - \frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\tau_j H_{ij} = A_2\Phi_i, \quad i = \overline{1,k}, \tag{14}$$

где

$$H_{ij} = \int_0^T b_i(t)\xi_j(t)dt, \quad \Phi_i = \int_0^T b_i(t)\sin\lambda t dt.$$

Отметим, что из линейной независимости функций $a_i(t)$ и $b_i(s)$ следует, что $H_{ij} \neq 0$. САУ (14) однозначно разрешима при любых конечных Φ_i, если выполняется условие

$$\Delta_1(\nu,\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{\nu}{\lambda}H_{11} & \frac{\nu}{\lambda}H_{12} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1k} \\ \frac{\nu}{\lambda}H_{21} & 1-\frac{\nu}{\lambda}H_{22} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\nu}{\lambda}H_{k1} & \frac{\nu}{\lambda}H_{k2} & \dots & 1-\frac{\nu}{\lambda}H_{kk} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{15}$$

Определитель $\Delta_1(\nu,\lambda)$ в (15) есть многочлен относительно $\frac{\nu}{\lambda}$ степени не выше k. Поэтому уравнение $\Delta_1(\nu,\lambda) = 0$ имеет не более k различных действительных корней. Их обозначим через μ_m, $1 \le m \le k$. Тогда $\nu = \lambda\mu_m$ являются собственными значениями ядра интегродифференциального уравнения (1). Для других значений $\nu \neq \lambda\mu_m$ решения САУ (14) записываются в виде

$$\tau_i = A_2 \frac{\Delta_{1i}(\nu,\lambda)}{\Delta_1(\nu,\lambda)}, \quad i = \overline{1,k}, \tag{16}$$

где

$$\Delta_{1i}(\nu,\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{\nu}{\lambda}H_{11} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1(i-1)} & \Phi_1 & \frac{\nu}{\lambda}H_{1(i+1)} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1k} \\ \frac{\nu}{\lambda}H_{21} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2(i-1)} & \Phi_2 & \frac{\nu}{\lambda}H_{2(i+1)} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\nu}{\lambda}H_{k1} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{k(i-1)} & \Phi_k & \frac{\nu}{\lambda}H_{k(i+1)} & \dots & 1-\frac{\nu}{\lambda}H_{kk} \end{vmatrix}.$$

Подставляя (16) в (13), получаем

$$u(t,\lambda) = A_2\left[\sin\lambda t + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1i}(\nu,\lambda)}{\Delta_1(\nu,\lambda)}\xi_i(t)\right]. \tag{17}$$

Чтобы однозначно определить A_2, воспользуемся вторым условием из (2). Тогда из формулы (17) получаем решение краевой задачи (1), (2)

$$u(t,\lambda) = \varphi\frac{\sin\lambda t + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1i}(\nu,\lambda)}{\Delta_1(\nu,\lambda)}\xi_i(t)}{\lambda\cos\lambda T + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1i}(\nu,\lambda)}{\Delta_1(\nu,\lambda)}\xi_i'(T)}, \quad \lambda \in \Lambda_2, \quad t \in [0;T], \tag{18}$$

где

$$\xi_i'(T) = \frac{\lambda\sin\lambda T}{\sigma_1(\lambda)}\left[h_i(T) - \int_0^T h_i(t)dt\right] + h_i'(T), \quad h_i'(T) = \int_0^T \cos\lambda(T-s)a_i(s)ds, \quad i = \overline{1,k}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\lambda\cos\lambda T + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1i}(\nu,\lambda)}{\Delta_1(\nu,\lambda)}\xi_i'(T) \neq 0, \quad \lambda \in \Lambda_2.$$

Единственность решения краевой задачи (1), (2) следует из того, то при $\varphi = 0$ имеет место $u(t,\lambda) \equiv 0$ для всех $t \in [0;T]$ и при всех значениях параметра $\lambda \in \Lambda_2$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (11). *Тогда на отрезке* $[0;T]$ *для всех значений параметра* $\lambda \in \Lambda_2$ *краевая задача* (1), (2) *имеет единственное решение в виде функции* (18), *если выполняется условие* (15).

Случай 3. Положим, что

$$\sigma_1(\lambda) \neq 0, \quad \sigma_2(\lambda) = 0, \quad \Delta_1(\nu, \lambda) = 0. \tag{19}$$

В данном случае рассматривается однородная система алгебраических уравнений (ОСАУ)

$$\tau_i - \frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\tau_j H_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, k}. \tag{20}$$

При этом требуется выполнение условия

$$\Phi_i = \int_0^T b_i(t)\sin\lambda t dt = 0, \quad \lambda \in \Lambda_2. \tag{21}$$

ОСАУ (20) имеет некоторое число $p(1 \le p \le k)$ линейно независимых ненулевых вектор-решений $\{\tau_1^{(l)}, \tau_2^{(l)}, \ldots, \tau_k^{(l)}\}$, $l = \overline{1; p}$. Функции

$$u_l(t, \lambda) = \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i^{(l)}\xi_i(t), \quad l = \overline{1, p}, \tag{22}$$

будут нетривиальными решениями соответствующего однородного уравнения

$$u(t, \lambda) = \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\xi_i(t)\int_0^T b_i(s)u(s, \lambda)ds. \tag{23}$$

Общее решение однородного интегрального уравнения (23) в силу (22) можно записать в виде

$$u(t, \lambda) = \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\alpha_l u_l(t, \lambda), \tag{24}$$

где α_l – произвольные постоянные.

В силу гладкости $\xi_i(t)$ решение (24) нетрудно подчинить второму условию из (2), если величину φ можно представить в виде суммы $\sum_{l=1}^{p}\varphi_l$. Но, по характеру постановки задач $b_i(t) \neq 0$, $t \in [0;T]$. Согласно теореме о среднем (см. [15, с. 419, теорема 3]) условие (21) выполняется, если $\int_0^T \sin\lambda t dt = 0$ при $\lambda \in \Lambda_2$. Подмножество $\left\{\frac{2n\pi}{T}\right\}_{n=1}^{\infty}$ множества Λ_2 обозначим через Λ_3. Для всех значений $\lambda \in \Lambda_3$ выполняется условие $\int_0^T \sin\lambda t dt = 0$ и краевая задача (1), (2) имеет бесконечное множество решений. Для других значений параметра $\lambda \in \Lambda_2 \backslash \Lambda_3$ условие $\int_0^T \sin\lambda t dt = 0$ не выполняется и, поэтому, краевая задача (1), (2) не имеет решений.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (19). *Тогда для всех значений* $\lambda \in \Lambda_3$ *краевая задача* (1), (2) *имеет бесконечное множество решений на отрезке* $[0;T]$. *А для других значений параметра* $\lambda \in \Lambda_2 \backslash \Lambda_3$ *краевая задача* (1), (2) *не имеет решений.*

Случай 4. В (6) положим, что

$$\sigma_1(\lambda) = 0, \quad \sigma_2(\lambda) \neq 0. \tag{25}$$

Тогда из (6) получаем, что A_1 – произвольное число, $A_2 = -\dfrac{\xi_0}{\sigma_2(\lambda)}$. В этом случае спектр параметра λ состоит из множества Λ_1, определенного формулой (9), и формула (5) принимает вид

$$u(t,\lambda) = A_1 \cos\lambda t + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\zeta_i(t), \tag{26}$$

где

$$\zeta_i(t) = h_i(t) - \frac{\sin\lambda t}{\sigma_2(\lambda)}\left[\int_0^T h_i(t)dt - h_i(T)\right], \quad i = \overline{1,k}.$$

Подставляя (26) в (4), приходим к системе алгебраических уравнений (САУ)

$$\tau_i - \frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\tau_j P_{ij} = A_1\Psi_i, \quad i = \overline{1,k}, \tag{27}$$

где

$$P_{ij} = \int_0^T b_i(t)\zeta_j(t)dt, \quad \Psi_i = \int_0^T b_i(t)\cos\lambda t dt.$$

САУ (27) однозначно разрешима при любых конечных Ψ_i, если выполняется условие

$$\Delta_2(\nu,\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{\nu}{\lambda}P_{11} & \frac{\nu}{\lambda}P_{12} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}P_{1k} \\ \frac{\nu}{\lambda}P_{21} & 1-\frac{\nu}{\lambda}P_{22} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}P_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\nu}{\lambda}P_{k1} & \frac{\nu}{\lambda}P_{k2} & \cdots & 1-\frac{\nu}{\lambda}P_{kk} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{28}$$

Определитель $\Delta_2(\nu,\lambda)$ в (28) есть многочлен относительно $\frac{\nu}{\lambda}$ степени не выше k. Уравнение $\Delta_2(\nu,\lambda) = 0$ имеет не более k различных действительных корней. Их обозначим через ω_m, $1 \le m \le k$. Тогда $\nu = \lambda\omega_m$ являются собственными числами ядра интегродифференциального уравнения (1). Для других значений $\nu \neq \lambda\omega_m$ решения САУ (27) записываются в виде

$$\tau_i = A_1\frac{\Delta_{2i}(\nu,\lambda)}{\Delta_2(\nu,\lambda)}, \quad i = \overline{1,k}, \tag{29}$$

где

$$\Delta_{2i}(\nu,\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{\nu}{\lambda}P_{11} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}P_{1(i-1)} & \Psi_1 & \frac{\nu}{\lambda}P_{1(i+1)} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}P_{1k} \\ \frac{\nu}{\lambda}P_{21} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}P_{2(i-1)} & \Psi_2 & \frac{\nu}{\lambda}P_{2(i+1)} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}P_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\nu}{\lambda}P_{k1} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}P_{k(i-1)} & \Psi_k & \frac{\nu}{\lambda}P_{k(i+1)} & \cdots & 1-\frac{\nu}{\lambda}P_{kk} \end{vmatrix}.$$

Подставляя (28) в (25), получаем

$$u(t,\lambda) = A_1\left[\cos\lambda t + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{2i}(\nu,\lambda)}{\Delta_2(\nu,\lambda)}\zeta_i(t)\right]. \tag{30}$$

Чтобы однозначно определить A_1, воспользуемся вторым условием из (2). Тогда из формулы (30) получаем единственное решение краевой задачи (1), (2)

$$u(t,\lambda) = \varphi \frac{\cos\lambda t + \dfrac{\nu}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{\Delta_{2i}(\nu,\lambda)}{\Delta_2(\nu,\lambda)}\zeta_i(t)}{\lambda\sin\lambda T + \dfrac{\nu}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{\Delta_{2i}(\nu,\lambda)}{\Delta_2(\nu,\lambda)}\zeta_i(T)}, \quad \lambda\in\Lambda_1, \quad t\in[0;T], \tag{31}$$

где

$$\zeta_i'(T) = \frac{\lambda\cos\lambda T}{\sigma_1(\lambda)}\left[h_i(T) - \int\limits_0^T h_i(t)dt\right] + h_i'(T), \quad h_i'(T) = \lambda\int\limits_0^T \cos\lambda(T-s)a_i(s)ds, \quad i=\overline{1,k}.$$

В (31) имеем

$$\lambda\sin\lambda T + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{2i}(\nu,\lambda)}{\Delta_2(\nu,\lambda)}\zeta_i'(T) \neq 0, \quad \lambda\in\Lambda_1.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (25). *Тогда на отрезке* $[0;T]$ *для всех значений параметра* $\lambda\in\Lambda_1$ *краевая задача* (1), (2) *имеет единственное решение в виде функции* (31), *если выполняется условие* (28).

Случай 5. Положим, что

$$\sigma_1(\lambda) = 0, \quad \sigma_2(\lambda)\neq 0, \quad \Delta_2(\nu,\lambda) = 0. \tag{32}$$

В данном случае рассматривается однородная система алгебраических уравнений (ОСАУ)

$$\tau_i - \frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\tau_j P_{ij} = 0, \quad i=\overline{1,k}. \tag{33}$$

Чтобы решения ОСАУ (33) имели отношения к задаче (1), (2), требуется выполнение условия

$$\Psi_i = \int\limits_0^T b_i(t)\cos\lambda t dt = 0, \quad \lambda\in\Lambda_1. \tag{34}$$

Так как $b_i(t)\neq 0$, $t\in[0;T]$, условие (34) выполняется только в том случае, если $\int_0^T \cos\lambda t dt = 0$ при $\lambda\in\Lambda_1$. Но ни для одного значения параметра $\lambda\in\Lambda_1$ это условие $\int_0^0 \cos\lambda t dt = 0$ не выполняется. Поэтому краевая задача (1), (2) не имеет решений в данном пятом случае.

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* (32). *Тогда при всех значениях* $\lambda\in\Lambda_1$ *краевая задача* (1), (2) *не имеет решений на отрезке* $[0;T]$.

Случай 6. Положим, что

$$\sigma_1(\lambda)\neq 0, \quad \sigma_2(\lambda)\neq 0. \tag{35}$$

Тогда из (6) получаем, что

$$u(t,\lambda) = A_2\left[\frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}\cos\lambda t + \sin\lambda t\right] + \vartheta(t), \tag{36}$$

где $\vartheta(t) = \dfrac{\xi_0}{\sigma_1(\lambda)}\cos\lambda t + \eta(t)$.

Теперь при $\lambda\in(0;\infty)\backslash(\Lambda_1\cup\Lambda_2)$ воспользуемся вторым условием из формулы (2). Тогда из (36) приходим к равенству

$$\varphi = \lambda A_2\frac{\sigma_3(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)} + \gamma, \tag{37}$$

где $\sigma_3(\lambda) = \sin\lambda T - \lambda$, $\gamma = \xi'(T)$. Здесь для определения неизвестного коэффициента A_2 требуется выполнение условия

$$\sigma_3(\lambda) = \sin\lambda T - \lambda \neq 0. \tag{38}$$

Тогда из (37) находим A_2 и подстановкой его в формулу (36) получаем

$$u(t,\lambda) = \varphi B(t) + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i D_i(t), \tag{39}$$

где

$$B(t) = \delta_0(t)\frac{\sigma_1(\lambda)}{\lambda\sigma_3(\lambda)}, \quad \delta_0(t) = \sin\lambda t + \frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}\cos\lambda t,$$

$$D_i(t) = \delta_2(t)\left[\int_0^T h_i(t)dt - h_i(T)\right] + h_i'(T) + h_i(t),$$

$$\delta_2(t) = \frac{\cos\lambda t}{\sigma_1(\lambda)} - \frac{\delta_0(t)}{\sigma_3(\lambda)}\sin\lambda T, \quad h_i(t) = \int_0^t \sin\lambda(t-s)a_i(s)ds, \quad i = \overline{1,k}.$$

Подставляя (39) в (4), получаем систему алгебраических уравнений (САУ)

$$\tau_i - \frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\tau_j\Theta_{ij} = \varphi\chi_i, \quad i = \overline{1,k}, \tag{40}$$

где

$$\Theta_{ij} = \int_0^T b_i(s)D_j(s)ds, \quad \chi_i = \int_0^T b_i(s)B(s)ds.$$

САУ (40) однозначно разрешима при любых конечных χ_i, если выполняется условие

$$\Delta_3(\nu,\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{\nu}{\lambda}\Theta_{11} & \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{12} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{1k} \\ \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{21} & 1-\frac{\nu}{\lambda}\Theta_{22} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{k1} & \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{k2} & \cdots & 1-\frac{\nu}{\lambda}\Theta_{kk} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{41}$$

Определитель $\Delta_3(\nu,\lambda)$ в (41) есть многочлен относительно $\frac{\nu}{\lambda}$ степени не выше k. Уравнение $\Delta_3(\nu,\lambda) = 0$ имеет не более k различных действительных корней. Их обозначим через ρ_m, $1 \le m \le k$. Тогда $\nu = \lambda\rho_m$ являются собственными значениями ядра интегродифференциального уравнения (1). Для других значений $\nu \neq \lambda\rho_m$ решения САУ (40) записываются в виде

$$\tau_i = \varphi\frac{\Delta_{3i}(\nu,\lambda)}{\Delta_3(\nu,\lambda)}, \quad i = \overline{1,k}, \tag{42}$$

где

$$\Delta_{3i}(\nu,\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{\nu}{\lambda}\Theta_{11} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{1(i-1)} & \chi_1 & \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{1(i+1)} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{1k} \\ \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{21} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{2(i-1)} & \chi_2 & \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{2(i+1)} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{k1} & \cdots & \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{k(i-1)} & \chi_k & \frac{\nu}{\lambda}\Theta_{k(i+1)} & \cdots & 1-\frac{\nu}{\lambda}\Theta_{kk} \end{vmatrix}.$$

Подставляя (42) в (39), получаем решение краевой задачи в виде

$$u(t,\nu,\lambda) = \varphi F(t,\nu,\lambda), \quad t \in [0;T], \tag{43}$$

где

$$F(t,\nu,\lambda) = B(t,\lambda) + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_i(\nu,\lambda)}{\Delta(\nu,\lambda)}D_i(t) \neq 0.$$

Теперь предполагается, что нарушается условие (38). Пусть $\sigma_3(\lambda) = \sin\lambda T - \lambda = 0$ при некоторых λ. Это условие эквивалентно равенству $\sin\lambda T = \lambda$. Если $\lambda \le 1$, то это тригонометрическое уравнение имеет следующие решения:

$$\lambda_n = \frac{\arcsin\lambda_n}{T}, \quad \lambda_n = \frac{\pi - \arcsin\lambda_n}{T} \tag{44}$$

в предположении, что $\lambda \le 1$ и $1 < \frac{2\pi n}{T}$, где n — натуральное число. Формулы в (44) также являются алгебраическим уравнениями относительно λ_n. Если $\lambda > 1$, то условие (38) всегда выполняется. Множество всех значений параметра λ определенных в формуле (44), обозначим через Λ_4.

Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* (35), (38) *и* (41). *Тогда при всех значениях параметра* $\lambda \in (0;\infty)\backslash(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_4)$ *краевая задача* (1), (2) *имеет единственное решение на отрезке* $[0;T]$.

Случай 7. Положим, что

$$\sigma_1(\lambda) \neq 0, \quad \sigma_2(\lambda) \neq 0, \quad \sigma_3(\lambda) \neq 0, \quad \Delta_3(\nu,\lambda) = 0. \tag{45}$$

В данном случае рассматривается однородная система алгебраических уравнений (ОСАУ)

$$\tau_i - \frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\tau_j\Theta_{ij} = 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{46}$$

где

$$\Theta_{ij} = \int_0^T b_i(s)D_j(s)ds.$$

ОСАУ (46) имеет некоторое число $q(1 \le q \le k)$ линейно независимых ненулевых вектор-решений $\{\tau_1^{(l)}, \tau_2^{(l)}, \ldots, \tau_k^{(l)}\}$, $l = \overline{1,q}$. Чтобы эти решения имели отношения к краевой задаче (1), (2), требуется выполнение условия

$$\chi_i = \int_0^T b_i(s)B(s)ds = \frac{\sigma_1(\lambda)}{\lambda\sigma_3(\lambda)}\int_0^T b_i(t)\left[\sin\lambda t + \frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}\cos\lambda t\right]dt = 0, \\ \lambda \in (0;\in fty)\backslash(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_4). \tag{47}$$

Так как $b_i(t) \neq 0$, $t \in [0;T]$, условие (47) выполняется, если

$$\int_0^T [\sin\lambda t + \sigma\cos\lambda t]dt = 0 \tag{48}$$

при $\lambda \in (0;\infty)\backslash(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_4)$, где $\sigma = \frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}$.

Вычисление интеграла (48) приводит к тригонометрическому уравнению $\cos\lambda T - \sigma\sin\lambda T = 1$, которое имеет две серии решений

$$\lambda_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad n \in N, \tag{49}$$

$$\lambda_n = -\frac{2}{T}\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} + \frac{2\pi n}{T}, \quad n \in N. \tag{50}$$

Множество значений λ, определенное формулой (49), не принадлежит множеству $(0;\infty)\backslash(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_4)$, так как оно содержится в Λ_2. Множество значений λ, определенное формулой (50), принадлежит $(0;\infty)\backslash(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_4)$ и его обозначим через Λ_5. Поэтому при всех $\lambda \in \Lambda_5$ условие (47) выполняется. Для других значений параметра $\lambda \in (0;\infty)\backslash(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_4 \cup \Lambda_5)$, условие (47) не выполняется.

Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Пусть выполняются условия* (45). *Тогда для всех значений* $\lambda \in \Lambda_5$ *краевая задача* (1), (2) *имеет бесконечное множество решений на отрезке* $[0;T]$. *А для других значений параметра* $\lambda \in (0;\infty)\backslash(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_4 \cup \Lambda_5)$ *краевая задача* (1), (2) *не имеет решений*.

Случай 8. Положим, что

$$\sigma_1(\lambda) \neq 0, \quad \sigma_2(\lambda) \neq 0, \quad \sigma_3(\lambda) = 0. \tag{51}$$

Формулу (36) перепишем в виде

$$u(t,\lambda) = A_2\left[\frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}\cos\lambda t + \sin\lambda t\right] + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\xi_i(t), \tag{52}$$

где

$$\xi_i(t) = \frac{\cos\lambda t}{\sigma_1(\lambda)}\left[\int_0^T h_i(t)dt - h_i(T)\right] + h_i(t), \quad h_i(t) = \int_0^t \sin\lambda(t-s)a_i(s)ds, \quad i = \overline{1,k}.$$

В данном случае A_2 однозначно не определяется и остается как произвольное постоянное число. Из (37) при $\lambda \in \Lambda_4$ находим $\varphi = \varsigma'(T)$, т.е. получаем одно уравнение с неизвестными в количестве k

$$\varphi = \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\xi_i'(T), \tag{53}$$

где ν — произвольное действительное число.

Алгебраическое уравнение (53) с неизвестными в количестве k имеет бесконечное множество решений. Это решение обозначим через $\tau_i = \beta_i$, $i = \overline{1,k}$. Подставим это решение в (52), получим

$$u(t,\lambda) = A_2\left[\frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}\cos\lambda t + \sin\lambda t\right] + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\beta_i\xi_i(t). \tag{54}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 8. *Пусть выполняются условия* (51). *Тогда при всех значениях параметра* $\lambda \in \Lambda_4$ *краевая задача* (1), (2) *имеет бесконечное множество решений на отрезке* $[0;T]$. *Эти решения определяются из формулы* (54).

3. ПРИМЕРЫ

Интегродифференциальные уравнения являются математическими моделями протекания многих физических процессов и работы технических систем (см., например, [16], [17]).

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим систему регулирования, где динамика объекта описывается дифференциальным уравнением первого порядка [18]. Регулируемым объектом является генератор постоянного тока. Регулируемая величина — напряжение на клеммах генератора, от которых питается сеть с различными нагрузками. Автоматический регулятор должен поддерживать постоянное напряжение при различных нагрузках и скоростях привода. Уравнение динамики генератора как объекта регулирования описывается уравнением

$$T_0u'(t) + u(t) + k_0\vartheta(t) = 0, \tag{55}$$

где T_0 — постоянная времени, k_0 — коэффициент усиления объекта, $u(t)$ — регулируемое напряжение, $\vartheta(t)$ — регулирующее воздействие. Уравнение усиленного регулятора с коррекцией на отрезке $[0;T]$ представляется в интегральной форме

$$\vartheta(t) = k_1\int\limits_0^T K(s)u(s)ds, \tag{56}$$

где k_1 — коэффициент усиления генератора, $K(s)$ выражает разницу между двух величин, одна из которых вызывает отклонение напряжения, а другая ликвидирует это отклонение и восстанавливает требуемое значение напряжения. Ядро интеграла в (56) удобно записать в виде $K(s) = b_1(s) + b_2(s)$. Тогда, подставляя (56) в уравнение (55), получаем интегродифференциальное уравнение первого порядка

$$u'(t) + \nu u(t) + \mu\int\limits_0^T (b_1(s) + b_2(s))u(s)ds = 0, \tag{57}$$

где $\nu = \dfrac{1}{T_0}$, $\mu = \dfrac{k_0k_1}{T_0}$. Здесь предполагается, что $b_i(t) \in C[0;T]$, $i = 1,2$, $T > \dfrac{1}{\nu} = T_0$.

Если уравнение (57) рассмотрим с краевым условием

$$Tu(0) = \int\limits_0^T u(t)dt,$$

то условием однозначной разрешимости данной задачи является

$$\begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\mu}{\nu}\delta_1 & \dfrac{\mu}{\nu}\delta_1 \\ \dfrac{\mu}{\nu}\delta_2 & 1 + \dfrac{\mu}{\nu}\delta_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $\delta_i = \int_0^T b_i(t)dt$, $i = 1,2$.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим систему регулирования второго порядка (см. [18]). Динамика движения крена ракеты описывается уравнением

$$T_0x''(t) + x'(t) + k_0y(t) = 0,$$

где $x(t)$ — угол крена, $y(t)$ — стабилизующее воздействие, T_0 — постоянная времени объекта, равная моменту инерции ракеты, деленному на коэффициенты сопротивления воздуха вращению ракеты, k_0 — коэффициент усиления объекта, характеризующий эффективность рулей. Уравнение усиленного стабилизатора крена ракеты, как и в случае первого примера, на отрезке $[0;T]$ представимо в интегральной форме:

$$y(t) = k_1\int\limits_0^T (b_1(s) + b_2(s))x(s)ds,$$

где k_1 — коэффициент усиления движения ракеты.

Тогда приходим к интегродифференциальному уравнению второго порядка

$$x''(t) + \nu x'(t) + \mu\int\limits_0^T (b_1(s) + b_2(s))x(s)ds = 0, \tag{58}$$

где $\nu = \dfrac{1}{T_0}$, $\mu = \dfrac{k_0k_1}{T_0}$. Здесь предполагается, что $b_i(t) \in C[0;T]$, $i = 1,2$.

Если уравнение (58) рассмотрим с краевыми условиями

$$Tx(0) + \int\limits_0^T x(t)dt = 0, \quad x'(T) = \varphi,$$

то условием однозначной разрешимости данной задачи является

$$\begin{vmatrix} 1-\mu\varepsilon_1 & -\mu\varepsilon_1 \\ -\mu\varepsilon_2 & 1-\mu\varepsilon_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $\varepsilon_i = \int_0^T b_i(t)\delta(t)dt$, $i = 1, 2$, $\delta(t) = \frac{T}{2} - t - \frac{1}{2T\nu^2} + \frac{1}{\nu}e^{\nu T}\left(\frac{1}{2T\nu} - e^{-\nu t} - \frac{1}{2}\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегродифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во КиргизГУ, 1957. 327 с.
2. *Бойчук А.А., Бондар (Головацкая) И.А.* Краевые задачи для систем интегродифференциальных уравнений // Нелинейные колебания. 2013. Т. 16. № 4. С. 460–474.
3. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Регуляризованные асимптотические решения начальной задачи для системы интегродифференциальных уравнений в частных производных // Матем. заметки. 2017. Т. 102. № 1. С. 28–38.
4. *Завизион Г.В.* Асимптотические решения систем линейных интегродифференциальных уравнений с вырождениями // Укр. матем. ж. 2003. Т. 55. № 4. С. 435–445.
5. *Смирнов Ю.Г.* Об эквивалентности электромагнитной задачи дифракции на неоднородном ограниченном диэлектрическом теле объемному сингулярному интегродифференциальному уравнению // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 9. С. 1657–1666.
6. *Фалалеев М.В.* Интегродифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения // Изв. ИркутскГУ. Серия Математика. 2012. Т. 5. № 2. С. 90–102.
7. *Юрко В.А.* Обратные задачи для интегродифференциальных операторов первого порядка // Матем. заметки. 2016. Т. 100. № 6. С. 939–946.
8. *Бойчук А.А., Страх А.П.* Нетеровы краевые задачи для систем линейных интегро-динамических уравнений с вырожденным ядром на временной шкале // Нелинейные колебания. 2014. Т. 17. № 1. С. 32–38.
9. *Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А.* Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегродифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром // Нелинейные колебания. 2015. Т. 18. № 4. С. 489–506.
10. *Юлдашев Т.К.* Об одном интегродифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 2015. № 9. С. 74–79.
11. *Юлдашев Т.К.* Нелокальная смешанная задача для интегродифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром // Укр. матем. ж. 2016. Т. 68. № 8. С. 1115–1131.
12. *Юлдашев Т.К.* Смешанная задача для псевдопараболического интегродифференциального уравнения с вырожденным ядром // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 1. С. 101–110.
13. *Samoilenko A.M., Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* Boundary-Value problems for systems of integro-differential equations with Degenerate Kernel // Ukr. Math. Journal. 1996. V. 48. № 11. P. 1785–1789.
14. *Yuldashev T.K.* Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel // Lobachevskii journal of mathematics. 2017. V. 38. № 3. C. 547–553.
15. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Том 1. М.: Наука, 1990. 528 с.
16. *Ушаков Е.И.* Статическая устойчивость электрических цепей. Новосибирск: Наука, 1988. 273 с.
17. *Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J.* Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping // Math. Methods in the Appl. Sciences. 2001. V. 24. P. 1043–1053.
18. *Попов Е.П.* Автоматическое регулирование и управление. М.: Наука, 1966. 388 с.