ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 3, с. 367–379

УДК 519.651

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ НА ОСНОВЕ КУБИЧЕСКОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ[1)]

И. А. Блатов[1,*], А. И. Задорин[2,], Е. В. Китаева[3]**

([1] 443010 Самара, ул. Льва Толстого, 23, Поволжский гос. ун-т телекоммуникаций и информатики, Россия;
[2] 630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия;
[3] 443086 Самара, Московское ш., 34А, Самарский национальный исследовательский ун-т, Россия)
**e-mail: blatow@mail.ru*
***e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru*
Поступила в редакцию 04.07.2018 г.

Рассматривается задача приближенного вычисления производных функций, имеющих большие градиенты в области экспоненциального пограничного слоя. Известно, что применение классических формул численного дифференцирования к функциям с большими градиентами в пограничном слое приводит к существенным погрешностям. Предлагается к функции с большими градиентами применять кубическую сплайн-интерполяцию на сетке Шишкина, сгущающейся в области пограничного слоя. На основе дифференцирования кубического сплайна находятся производные функции, заданной в узлах сетки. При таком подходе получены оценки относительной погрешности в пограничном слое и абсолютной погрешности вне области пограничного слоя. Эти оценки равномерны по малому параметру. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов. Библ. 16. Табл. 4.

Ключевые слова: функция одной переменной, экспоненциальный пограничный слой, сетка Шишкина, кубический сплайн, аппроксимация производных, оценка погрешности.

DOI: 10.1134/S0044466919030049

ВВЕДЕНИЕ

Конвективно-диффузионные процессы с преобладающей конвекцией моделируются на основе краевых и начально-краевых задач для уравнений с малым параметром ε при старших производных. Решение такой задачи имеет большие градиенты в области пограничного слоя, что в случае равномерной сетки приводит к потере сходимости классических разностных схем при достаточно малых значениях параметра ε. Для достижения ε-равномерной сходимости применяются разностные схемы экспоненциальной подгонки (см. [1]) на равномерной сетке и классические разностные схемы на сетках, сгущающихся в пограничном слое. Сетки, сгущающиеся в пограничном слое, строились в работах многих авторов. Широкое применение получили сгущающиеся в области пограничного слоя сетки Н.С. Бахвалова [2] и Г.И. Шишкина [3].

Кубические сплайны широко применяются для гладкой интерполяции функций. Такие сплайны исследованы в [4], [5] и во многих других работах. Однако вопрос точности сплайновой интерполяции при наличии пограничного слоя исследован незначительно.

Остановимся на работах по данному вопросу. В [6] рассмотрен вопрос интерполяции функции, имеющей большие градиенты в экспоненциальном погранслое, кубическим сплайном на сетке Шишкина (см. [3]). Предварительно доказано, что в случае равномерной сетки погрешность кубического сплайна может быть порядка $O(\varepsilon N)^{-4}$, где N — число сеточных интервалов, ε — малый параметр. Следовательно, применение кубического сплайна на равномерной сетке приемлемо только в случае $\varepsilon \gg 1/N$.

Далее, в [6] получены двусторонние оценки погрешности кубического сплайна на сетке Шишкина при интерполяции такой функции. Доказано, что погрешность кубического сплайна

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 16-01-00727) и проекта СО РАН № 0314-2019-0009.

порядка $O(\ln N/N)^4$ в пограничном слое и становится порядка $O(1/(N^5\varepsilon))$ на первом сеточном интервале за пограничным слоем, где шаг сетки становится крупным. Далее эта погрешность экспоненциально убывает при удалении от пограничного слоя. Для того чтобы погрешность интерполяции стала равномерной по параметру ε, в [6] предложено сместить узел интерполяции $x_{N/2}$, в котором мелкий шаг меняется на крупный, в точку $(x_{N/2}+x_{N/2+1})/2$. Доказано, что тогда погрешность кубического сплайна становится порядка $O(\ln N/N)^4$ равномерно по ε.

Отметим, что в [7], [8] аналогичные результаты получены в случае параболического сплайна по Субботину (см. [9]).

Остановимся на вопросе вычисления производных функций с большими градиентами, заданной в узлах сетки. Разностные формулы для вычисления производных функций, являющихся решением сингулярно возмущенных задач, исследовались на сетке Шишкина в ряде работ, например, в [10], [11]. В этих работах доказано, что относительная погрешность разностных формул на сетке Шишкина (см. [3]) равномерна по малому параметру ε. В [10] доказано, что если для вычисления производной использовать решение разностной схемы, то это не приводит к увеличению погрешности применяемой разностной формулы для вычисления производной. Рассмотрен и случай сетки Бахвалова (см. [2]). Но при этом разностные формулы для производных строятся на отдельных сеточных интервалах и не воспроизводят производную как гладкую функцию на всем интервале $[0,1]$.

Целью данной работы является исследование возможности применения кубического сплайна на сетке Шишкина [3] для вычисления производных функции с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое. Предлагается вычислять производные такой функции через ее значения в узлах сетки Шишкина на основе дифференцирования кубического сплайна. При таком подходе первая и вторая производные находятся, соответственно, как непрерывно-дифференцируемая и непрерывная функции на всем интервале $[0,1]$. Оценивается точность такого подхода.

Введем следующие обозначения. Пусть $\Omega: 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$ – сетка интервала [0, 1]. Обозначим через $S(\Omega, k, 1)$ пространство полиномиальных сплайнов степени k дефекта 1 (см. [5]) на сетке Ω. В случае необходимости будем считать разбиение Ω продолженным левее точки 0 с шагом $h_1 = x_1 - x_0$ и правее точки 1 с шагом $h_N = x_N - x_{N-1}$. Под C и C_j будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и числа узлов сетки N. При этом один символ C_j может обозначать разные постоянные, если это не вызывает недоразумений. Будем писать $f = O(g)$, если справедлива оценка $|f| \le C|g|$ и $f = O^*(g)$, если $f = O(g)$ и $g = O(f)$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предполагаем, что для интерполируемой функции $u(x)$ справедлива декомпозиция на регулярную и сингулярную составляющие:

$$u(x) = q(x) + \Phi(x), \quad x \in [0, 1], \tag{1.1}$$

где

$$\left|q^{(j)}(x)\right| \le C_1, \quad \left|\Phi^{(j)}(x)\right| \le \frac{C_1}{\varepsilon^j} e^{-\alpha x/\varepsilon}, \quad 0 \le j \le 4, \tag{1.2}$$

здесь функции $q(x)$ и $\Phi(x)$ в явном виде не заданы, $\alpha > 0$, $\varepsilon \in (0,1]$. Согласно (1.2), регулярная составляющая $q(x)$ имеет производные, ограниченные до четвертого порядка, а сингулярная составляющая $\Phi(x)$ имеет производные, не ограниченные равномерно по параметру ε.

В соответствии с [3], [12], [13], представление (1.1) с ограничениями (1.2) справедливо для решения сингулярно возмущенной краевой задачи

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{1.3}$$

где $a_1(x) \ge \alpha > 0$, $a_2(x) \ge 0$, $\varepsilon > 0$, функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ достаточно гладкие. При малых значениях параметра ε решение задачи (1.3) имеет большие градиенты у границы $x = 0$, чему соответствует представление (1.1).

В соответствии с [3] зададим сетку Ω с узлами x_n, $n = 0, 1, \ldots, N$, и шагами

$$h_n = h = \frac{2\sigma}{N}, \quad n = 1, \ldots, \frac{N}{2}, \quad h_n = H = \frac{2(1-\sigma)}{N}, \quad n = \frac{N}{2} + 1, \ldots, N, \tag{1.4}$$

где

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{4\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\}. \tag{1.5}$$

Пусть $S(x,u) \in S(\Omega,3,1)$ – интерполяционный кубический сплайн на сетке Ω, определяемый из условий

$$S(x_n,u) = u(x_n), \quad 0 \le n \le N, \quad S'(0,u) = u'(0), \quad S'(1,u) = u'(1). \tag{1.6}$$

В соответствии с [6] справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть для функции $u(x)$ справедливо представление* (1.1), (1.2). *Если для некоторой постоянной C_2 имеем*

$$\varepsilon \ge C_2/N, \tag{1.7}$$

то найдется C_3 такое, что

$$\|u(x) - S(x,u)\|_{C[0,1]} \le C_3 \frac{\ln^4 N}{N^4}. \tag{1.8}$$

Таким образом, если выполнено условие (1.7), то для погрешности интерполяции справедлива оценка (1.8), с точностью до множителя $\ln^4 N$ совпадающая с оценкой погрешности кубического сплайна в регулярном случае, когда функция имеет равномерно ограниченную четвертую производную (см. [5]).

В соответствии с [6] справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть для функции $u(x)$ справедливо представление* (1.1), (1.2). *Тогда, если для некоторой постоянной C_4 выполнено $\varepsilon \le C_4 N^{-1}$, то найдутся такие константы C_5* и *$\beta > 0$, не зависящие от ε, N, что*

$$\|u(x) - S(x,u)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \le C_5 \begin{cases} N^{-4}\ln^4 N, & 0 \le n \le N/2 - 1, \\ \dfrac{1}{N^4} + \dfrac{1}{\varepsilon N^5} e^{-\beta(n-N/2)}, & \dfrac{N}{2} \le n \le N-1. \end{cases} \tag{1.9}$$

В соответствии с оценкой (1.9) погрешность кубического сплайна на сетке Шишкина не является ε-равномерной. И эта оценка не улучшаема [6].

В [6] предложена модификация сплайна $S(x,u)$. Пусть $S_M(x,u)$ – кубический сплайн, соответствующий $S(x,u)$ с заменой одного узла интерполяции, а именно, узла $x_{N/2}$ на $(x_{N/2} + x_{N/2+1})/2$. Тогда в соответствии с [6] справедлива

Теорема 3. *Пусть функция $u(x)$ имеет представление* (1.1), (1.2). *Тогда найдутся такие не зависящие от ε, N константы $\gamma_0 > 0, C$, что при $\varepsilon \ln N \le \gamma_0$ будет справедлива оценка*

$$\|u(x) - S_M(x,u)\|_{C[0,1]} \le CN^{-4}\ln^4 N. \tag{1.10}$$

Модификация сплайна требует задания $u(x)$ в точке $(x_{N/2} + x_{N/2+1})/2$ через значения $u(x)$ в узлах сетки. Это можно сделать на основе интерполяции Лагранжа. В [14] доказано, что если функция имеет представление (1.1), то погрешность интерполяции многочленом Лагранжа на сетке Шишкина равномерна по параметру ε.

Замечание 1. Покажем, что требование $\varepsilon \ln N \le \gamma_0$ в формулировке теоремы 3 является излишним. Это условие появилось в [6] из требования строгого диагонального преобладания матрицы системы уравнений, из которой находятся коэффициенты разложения сплайна $S_M(x,u)$ через базисные сплайны. Во всех строках, кроме строки с номером $N/2$, строгое диагональное преобладание имеется. Для обеспечения диагонального преобладания в строке с номером $N/2$ в [6] наложено ограничение $\varepsilon \ln N \le \gamma_0$. Пусть $r_{N/2}$ –

величина диагонального преобладания в строке с номером $N/2$. Учитывая ненулевые элементы этой строки [6], можно показать, что

$$r_{N/2} = \frac{113p - p^2 + 28 - 86p^3}{8(2p+1)(p+1)(2+p)}, \qquad p = \frac{h}{H}.$$

Несложно убедиться, что при всех $p \in (0, 1]$ справедливо неравенство $r_{N/2} \geq 1/4$. Итак, если для функции $u(x)$ справедливо представление (1.1), (1.2), то независимо от соотношения между ε и N справедлива оценка (1.10).

Ниже будем предполагать, что $\sigma < 1/2$ в (1.5). Случай $\sigma = 1/2$ будет рассмотрен в замечании 3.

Уточним оценку (1.10). Уточненная оценка будет ниже применяться при анализе погрешностей в вычислении производных.

Теорема 4. *Пусть для функции* $u(x)$ *справедливо представление* (1.1), (1.2), Ω — *сетка Шишкина* (1.4) *при* $\sigma < 1/2$. *Тогда для некоторой постоянной* C_6 *справедлива оценка*

$$\|u(x) - S_M(x,u)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \leq C_6 \begin{cases} N^{-4}\ln^4 N, & 0 \leq n \leq N/2 - 1, \\ 1/N^4, & N/2 \leq n \leq N - 1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 3 и замечанием 1 справедлива оценка (1.10). Остается доказать вторую оценку в (1.11). Будем считать функцию $u(x)$ продолженной левее точки $x = 0$ и правее точки $x = 1$ многочленами третьей степени ряда Тейлора с центрами в $x = 0$ и $x = 1$ соответственно. Обозначим через P_3 множество всех многочленов третьей степени. Тогда согласно [15, гл. 12], существует такая функция $gp_3(x) \in S(\Omega, 3, 1)$, что справедлива оценка

$$\|u(x) - gp_3(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \leq C \inf_{g \in P_3} \|u(x) - g(x)\|_{C[x_{n-2},x_{n+3}]}. \tag{1.12}$$

Зафиксируем произвольное $n \in [0, N-1]$. Обозначим через $P_n(x)$ многочлен Тейлора степени 3 функции $u(x)$ с центром разложения в точке x_{n+3}. Тогда

$$u(x) = P_n(x) + \frac{1}{3!}\int_{x_{n+3}}^{x} (x-s)^3 u^{(4)}(s)ds. \tag{1.13}$$

Из (1.2), (1.13) при $0 \leq n \leq N/2 - 3$ получаем

$$\|u(x) - P_n(x)\|_{C[x_{n-2},x_{n+3}]} \leq Ch^4\left(1 + \varepsilon^{-4} e^{-\frac{\alpha x_{n-2}}{\varepsilon}}\right) \leq C_7 h^4\left(1 + \varepsilon^{-4}\right).$$

Учитывая, что $h = O^*(\varepsilon \ln N/N)$, получаем

$$\|u(x) - P_n(x)\|_{C[x_{n-2},x_{n+3}]} \leq C_8 \frac{\ln^4 N}{N^4}, \qquad 0 \leq n \leq N/2 - 3. \tag{1.14}$$

Пусть $N/2 - 2 \leq n \leq N - 1$. Тогда при $x \in [x_{n-2}, x_{n+3}]$ имеем

$$\begin{gathered} |u(x) - P_n(x)| = \left|\int_{x_{n+3}}^{x} (x-s)^3 u^{(4)}(s)ds\right| \leq C\int_{x}^{x_{n+3}} (s-x)^3\left(1 + \varepsilon^{-4} e^{-\frac{\alpha s}{\varepsilon}}\right)ds \leq CH^4 + \\ + Ce^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\int_{x}^{x_{n+3}} (s-x)^3 \varepsilon^{-4} e^{-\frac{\alpha(s-x)}{\varepsilon}}ds = CH^4 + Ce^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}\int_{x}^{x_{n+3}}\left(\frac{s-x}{\varepsilon}\right)^3 e^{-\frac{\alpha(s-x)}{\varepsilon}}ds \leq \\ \leq CH^4 + C_1 e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \leq CH^4 + C_1 e^{-\frac{\alpha x_{N/2-4}}{\varepsilon}} CH^4 + C_1 e^{\frac{4\alpha h}{\varepsilon}} e^{-\frac{\alpha x_{N/2}}{\varepsilon}} \leq \frac{C_2}{N^4}. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Учитывая оценки (1.12), (1.15), для некоторой постоянной C_4 получаем

$$\|u(x) - gp_3(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \leq \|u(x) - P_n(x)\|_{C[x_{n-2},x_{n+3}]} \leq \frac{C_4}{N^4}, \qquad \frac{N}{2} \leq n < N - 1. \tag{1.16}$$

По аналогии с обоснованием (1.16) можно показать следующее:

$$\|u(x) - gp_3(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \le Ch^4\left(1 + \varepsilon^{-4}e^{-\frac{\alpha x_{n-2}}{\varepsilon}}\right), \quad 0 \le n \le N/2 - 3. \tag{1.17}$$

Обоснуем вспомогательную оценку. Пусть $Q(x)$ – многочлен третьей степени на интервале $[x_n, x_{n+1}]$. Докажем, что

$$h_{n+1}\|Q'(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \le C\|Q(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]}, \tag{1.18}$$

где C не зависит от Q.

Имеем

$$\|Q'(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} = \frac{1}{h_{n+1}}\left\|Q_t'(x_n + th_{n+1})\right\|_{C[0,1]}.$$

Далее, с учетом эквивалентности норм в пространстве многочленов третьей степени на отрезке [0, 1] для некоторой C, не зависящей от $Q(x)$, имеем

$$\left\|Q_t'(x_n + th_{n+1})\right\|_{C[0,1]} \le \|Q(x_n + th_{n+1})\|_{C^1[0,1]} \le C\|Q(x_n + th_{n+1})\|_{C[0,1]} = C\|Q(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]}.$$

Это доказывает (1.18).

Из (1.15), (1.16) следует, что для некоторой постоянной C_9 верно

$$\|P_{N-1}(x) - gp_3(x)\|_{C[x_{N-1},x_N]} \le \frac{C_9}{N^4}. \tag{1.19}$$

Так как $P_{N-1}(x) - gp_3(x)$ – многочлен третьей степени на интервале $[x_{N-1}, x_N]$, то в соответствии с (1.18) имеем

$$\left\|h_N(P_{N-1}'(x) - gp_3'(x))\right\|_{C[x_{N-1},x_N]} \le C_{10}N^{-4}.$$

Учитывая, что

$$\left\|h_N\left(P_{N-1}'(x) - u'(x)\right)\right\|_{C[x_{N-1},x_N]} \le CN^{-4},$$

получаем

$$\left\|h_N\left(u'(x) - gp_3'(x)\right)\right\|_{C[x_{N-1},x_N]} \le CN^{-4}. \tag{1.20}$$

Теперь оценим $\mathrm{err}(x) = S_M(x,u) - gp_3(x)$. Выразим $\mathrm{err}(x)$ через базисные сплайны третьей степени:

$$\mathrm{err}(x) = \sum_{n=-3}^{N-1}\beta_n N_{n,3}(x), \tag{1.21}$$

где в соответствии с [6] вектор коэффициентов $\beta = \{\beta_{-2}, \cdots, \beta_{N-2}\}$ является решением системы

$$A\beta = \mathrm{ERR}, \tag{1.22}$$

и

$$\beta_{-3} = \beta_{-1} - 2h\cdot\mathrm{err}'(0), \quad \beta_{N-1} = \beta_{N-3} + 2H\cdot\mathrm{err}'(1), \tag{1.23}$$

где

$$\mathrm{err}'(0) = u'(0) - gp_3'(0), \quad \mathrm{err}'(1) = u'(1) - gp_3'(1), \tag{1.24}$$

$$\mathrm{ERR} = \{\mathrm{ERR}_n\}, \quad \mathrm{ERR}_n = 6\left(u(x_{n+2}) - gp_3(x_{n+2})\right), \quad -2 \le n \le N-2. \tag{1.25}$$

При этом в силу (1.16)–(1.20), (1.23)–(1.25) будут справедливы оценки

$$\left|\mathrm{ERR}_n\right| \le C\left(h^4 + e^{-8n\frac{\ln N}{N}}\right) \le \frac{C_1}{N^{\frac{8n}{N}}}, \quad n = -2, -1, \ldots, N/2 - 3, \tag{1.26}$$

$$\left|\mathrm{ERR}_n\right| \le \frac{C}{N^4}, \quad N/2 - 2 \le n \le N - 2, \tag{1.27}$$

$$\left|\beta_{N-1}\right| \le \left|\beta_{N-3}\right| + \frac{C}{N^4}. \tag{1.28}$$

Заметим, что, согласно [6], для элементов матрицы $A = \{a_{ij}\}$ СЛАУ (1.22) при $|i - j| > 2$ справедливы равенства $a_{ij} = 0$, т.е. это ленточная пятидиагональная матрица. При этом, согласно замечанию 1, матрица A имеет строгое диагональное преобладание с показателем преобладания, не зависящим от ε, N. Поэтому, согласно [16], матрица A обратима, а для элементов обратной матрицы $A^{-1} = \{a_{ij,-1}\}$ справедливы оценки

$$\left|a_{ij,-1}\right| \le Ce^{-\eta|i-j|}, \tag{1.29}$$

где $\eta > 0$ не зависит от ε, N.

Поэтому из (1.26), (1.27), (1.29) при $N/2 - 3 \le n \le N - 2$ находим

$$\begin{gathered}\left|\beta_n\right| = \left|\sum_{j=-2}^{N-2} a_{nj,-1}\mathrm{ERR}_j\right| \le C\sum_{j=-2}^{N-2} e^{-\eta|n-j|}\left|\mathrm{ERR}_j\right| \le C_1\sum_{j=-2}^{N/2-3} e^{-\eta(n-j)}\frac{1}{N^{\frac{8(j-2)}{N}}} + \\ + C_1\sum_{j=N/2-2}^{N-2} e^{-\eta|j-n|}\frac{1}{N^4} = C_1\left(\Sigma_1 + \Sigma_2\right).\end{gathered} \tag{1.30}$$

Для второй суммы, очевидно, имеем

$$\Sigma_2 \le \frac{C_2}{N^4}. \tag{1.31}$$

Оценим первую сумму. При $n \ge N/2 - 3$ имеем

$$\begin{gathered}\Sigma_1 \le \sum_{j=-2}^{N/2-3} e^{-\eta(N/2-3-j)}\frac{1}{N^{\frac{8(j-2)}{N}}} = \frac{e^{3\eta}}{N^4}\sum_{j=-2}^{N/2-3} e^{-\eta(N/2-j)}\frac{1}{N^{\frac{8(j-2-N/2)}{N}}} = \\ = \frac{e^{3\eta}N^{\frac{16}{N}}}{N^4}\sum_{j=-2}^{N/2-3} e^{-\eta(N/2-j)}\frac{1}{N^{\frac{8(j-N/2)}{N}}} \le \frac{C}{N^4}\sum_{j=-2}^{N/2} e^{-\eta(N/2-j)}\left(N^{\frac{8}{N}}\right)^{(N/2-j)}.\end{gathered} \tag{1.32}$$

Поскольку $\lim\limits_{N\to\infty} N^{\frac{8}{N}} = 1$, то, начиная с некоторого $N = N_0$, будет выполняться неравенство $N^{\frac{8}{N}} \le e^{\eta/2}$. Поэтому для $N \ge N_0$ в силу (1.32) будем иметь

$$\Sigma_1 \le \frac{C}{N^4}\sum_{j=-2}^{N/2} e^{-\frac{\eta}{2}(N/2-j)} \le \frac{C_3}{N^4}. \tag{1.33}$$

Из (1.28), (1.30), (1.31), (1.33) получаем оценки

$$\left|\beta_n\right| \le \frac{C}{N^4}, \quad N/2 - 3 \le n \le N - 1,$$

из которых в силу (1.21) и того, что $\operatorname{supp} N_{n,3} = (x_n, x_{n+4})$, получаем оценки (1.11) для $\frac{N}{2} \le n \le N - 1$. Теорема доказана.

Замечание 2. Совершенно аналогично доказательству теоремы 4, легко показать, что в случае $\varepsilon \ge C_2/N$ оценка (1.8) может быть улучшена до оценки

$$\|u(x) - S(x,u)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \le C \begin{cases} N^{-4}\ln^4 N, & 0 \le n \le N/2-1, \\ 1/N^4, & N/2 \le n \le N-1. \end{cases} \tag{1.34}$$

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Известно, что в регулярном случае, когда функция $u(x)$ имеет равномерно ограниченные производные, справедлива оценка $\left|u^{(j)}(x) - S^{(j)}(x,u)\right| \le Ch^{4-j}$, $j = 0, 1, 2$, где h – шаг равномерной сетки (см. [5]). Оценим погрешность, возникающую при вычислении производных функции с большими градиентами вида (1.1) на основе дифференцирования кубического сплайна. На сетке Шишкина [3] оценим погрешность вычисления производных на основе дифференцирования сплайнов $S_M(x,u)$ и $S(x,u)$.

2.1. Приближение производных на основе сплайна $S_M(x,u)$

Теорема 5. *Пусть для функции $u(x)$ справедливо представление* (1.1), (1.2). *Тогда для некоторой постоянной C справедливы следующие оценки погрешности*:

$$\varepsilon\left|u'(x) - S'_M(x,u)\right| \le C\frac{\ln^3 N}{N^3}, \quad x \le \sigma, \tag{2.1}$$

$$\left|u'(x) - S'_M(x,u)\right| \le C\left[\frac{1}{N^3} + \frac{1}{\varepsilon N^4}e^{-\alpha(x-\sigma)/\varepsilon}\right], \quad x > \sigma, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon^2\left|u''(x) - S''_M(x,u)\right| \le C\frac{\ln^2 N}{N^2}, \quad x \le \sigma, \tag{2.3}$$

$$\left\|u''(x) - S''_M(x,u)\right\| \le C\left[\frac{1}{N^2} + \frac{1}{\varepsilon^2 N^4}e^{-\alpha(x-\sigma)/\varepsilon}\right], \quad x > \sigma, \tag{2.4}$$

где σ соответствует (1.5), *сплайн $S_M(x,u)$ определен перед теоремой* 3.

Доказательство. Пусть $P_n(x)$ – многочлен третьей степени, заданный согласно (1.13). Оценим $\left\|u'(x) - P'_n(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}$. Дифференцируя равенство (1.13), получаем

$$u'(x) = P'_n(x) + \frac{1}{2!}\int\limits_{x_{n+3}}^{x}(x-s)^2 u^{(4)}(s)ds. \tag{2.5}$$

Из (2.5) для некоторой постоянной C_1 получаем

$$\left\|u'(x) - P'_n(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \le C_1\frac{\ln^3 N}{\varepsilon N^3}, \quad 0 \le n \le N/2-3, \tag{2.6}$$

$$\left\|u'(x) - P'_n(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \le C_1\left[\frac{1}{N^3} + \frac{1}{\varepsilon N^4}e^{-\alpha(x_n-\sigma)/\varepsilon}\right], \quad N/2-2 \le n \le N-1. \tag{2.7}$$

Аналогично, учитывая соотношение

$$u''(x) = P''_n(x) + \int\limits_{x_{n+3}}^{x}(x-s)u^{(4)}(s)ds, \tag{2.8}$$

получаем

$$\left|u''(x) - P''_n(x)\right| \le C_2\frac{\ln^2 N}{\varepsilon^2 N^2}, \quad x < \sigma, \tag{2.9}$$

$$\left|u''(x)-P_n''(x)\right|\le C_2\left[\frac{1}{N^2}+\frac{1}{\varepsilon^2N^4}e^{-\alpha(x-\sigma)/\varepsilon}\right],\quad x\ge\sigma. \tag{2.10}$$

Теперь оценим $S_M(x,u)-P_n(x)$. Учитывая оценки (1.11), (1.14), (1.15), получаем, что для некоторой постоянной C_3 верно

$$\|S_M(x,u)-P_n(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le C_3\begin{cases}N^{-4}\ln^4 N, & 0\le n\le N/2-1,\\ \dfrac{1}{N^4}, & \dfrac{N}{2}\le n\le N-1.\end{cases} \tag{2.11}$$

На интервале $[x_n,x_{n+1}]$ разность $S_M(x,u)-P_n(x)$ является многочленом третьей степени. В соответствии с оценкой (1.18) для некоторой постоянной C_4 имеем

$$h_{n+1}\left\|S_M'(x,u)-P_n'(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le C_4\|S_M(x,u)-P_n(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]}. \tag{2.12}$$

В соответствии с (2.11), (2.12)

$$\left\|S_M'(x,u)-P_n'(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le\frac{C\ln^3 N}{\varepsilon N^3},\quad n<\frac{N}{2}, \tag{2.13}$$

$$\left\|S_M'(x,u)-P_n'(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le\frac{C}{N^3},\quad n\ge\frac{N}{2}. \tag{2.14}$$

Аналогично можно показать, что

$$\left\|S_M''(x,u)-P_n''(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le\frac{C\ln^2 N}{\varepsilon^2N^2},\quad n<\frac{N}{2}, \tag{2.15}$$

$$\left\|S_M''(x,u)-P_n''(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le\frac{C}{N^2},\quad n\ge\frac{N}{2}. \tag{2.16}$$

Из оценок (2.6), (2.7), (2.9), (2.10), (2.13)–(2.16) следуют требуемые оценки (2.1)–(2.4). Теорема доказана.

Следствие. Из оценок (2.1)–(2.4) следуют ε-равномерные оценки относительной погрешности в пограничном слое и абсолютной погрешности вне пограничного слоя для первой и второй производных в зависимости от значения εN :

$$\varepsilon\left|u'(x)-S_M'(x,u)\right|\le C\frac{\ln^3 N}{N^3},\quad x\le\sigma,\quad \varepsilon N\ge 1,$$

$$\left|u'(x)-S_M'(x,u)\right|\le\frac{C}{N^3},\quad x\ge\sigma,\quad \varepsilon N\ge 1,$$

$$\varepsilon\left|u'(x)-S_M'(x,u)\right|\le C\frac{\ln^3 N}{N^3},\quad x\le\sigma^*,\quad \varepsilon N\le 1,$$

$$\left|u'(x)-S_M'(x,u)\right|\le\frac{C}{N^3},\quad x\ge\sigma^*=\sigma-\frac{\varepsilon}{\alpha}\ln(\varepsilon N),\quad \varepsilon N\le 1,$$

$$\varepsilon^2\left|u''(x)-S_M''(x,u)\right|\le C\frac{\ln^2 N}{N^2},\quad x\le\sigma,\quad \varepsilon N\ge 1,$$

$$\left|u''(x)-S_M''(x,u)\right|\le\frac{C}{N^2},\quad x>\sigma,\quad \varepsilon N\ge 1,$$

$$\varepsilon^2\left|u''(x)-S_M''(x,u)\right|\le C\frac{\ln^2 N}{N^2},\quad x\le\sigma^{**},\quad \varepsilon N\le 1,$$

$$\left|u''(x)-S_M''(x,u)\right|\le\frac{C}{N^2},\quad x>\sigma^{**}=\sigma-\frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln(\varepsilon N),\quad \varepsilon N\le 1.$$

2.2. Приближение производных на основе сплайна $S(x,u)$

Теорема 6. *Пусть для функции* $u(x)$ *справедливо представление* (1.1), (1.2). *Тогда для некоторой постоянной* C *справедливы следующие оценки погрешности*:

$$\varepsilon\left|u'(x)-S'(x,u)\right|\le C\frac{\ln^3 N}{N^3},\quad x\le\sigma, \tag{2.17}$$

$$\left|u'(x)-S'(x,u)\right|\le C\left[\frac{1}{N^3}+\frac{1}{\varepsilon N^4}e^{-\alpha(x-\sigma)/\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon N^4}e^{-\beta(n-N/2)}\right],\quad x>\sigma, \tag{2.18}$$

$$\varepsilon^2\left|u''(x)-S''(x,u)\right|\le C\frac{\ln^2 N}{N^2},\quad x\le\sigma, \tag{2.19}$$

$$\left|u''(x)-S''(x,u)\right|\le C\left[\frac{1}{N^2}+\frac{1}{\varepsilon^2 N^4}e^{-\alpha(x-\sigma)/\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon N^3}e^{-\beta(n-N/2)}\right],\quad x>\sigma, \tag{2.20}$$

где α, β *соответствуют* (1.2), (1.9).

Доказательство. Используя теорему 1, оценки (1.9), (1.14), (1.15) и замечание 2, получаем

$$\left\|S(x,u)-P_n(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le C_1\frac{\ln^4 N}{N^4},\quad 0\le n<N/2, \tag{2.21}$$

$$\left\|S(x,u)-P_n(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le C\left[\frac{1}{N^4}+\frac{1}{\varepsilon N^5}e^{-\beta\left(n-\frac{N}{2}\right)}\right],\quad n\ge N/2. \tag{2.22}$$

Учитывая соотношение, аналогичное (2.12),

$$h_{n+1}\left\|S'(x,u)-P_n'(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le C\left\|S(x,u)-P_n(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]},$$

получаем

$$\left\|S'(x,u)-P_n'(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le C\frac{\ln^3 N}{\varepsilon N^3},\quad 0\le n<N/2, \tag{2.23}$$

$$\left\|S'(x,u)-P_n'(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le C\left[\frac{1}{N^3}+\frac{1}{\varepsilon N^4}e^{-\beta\left(n-\frac{N}{2}\right)}\right],\quad n\ge N/2. \tag{2.24}$$

Аналогично можно получить

$$\left\|S''(x,u)-P_n''(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le C\frac{\ln^2 N}{\varepsilon^2 N^2},\quad 0\le n<N/2, \tag{2.25}$$

$$\left\|S''(x,u)-P_n''(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le C\left[\frac{1}{N^2}+\frac{1}{\varepsilon N^3}e^{-\beta\left(n-\frac{N}{2}\right)}\right],\quad n\ge N/2. \tag{2.26}$$

Учитывая соотношения (2.6), (2.7), (2.9), (2.10), (2.23)–(2.26), получаем оценки (2.17)–(2.20). Теорема доказана.

По аналогии со случаем сплайна $S_M(x,u)$, для производных сплайна $S(x,u)$ могут быть выписаны оценки абсолютной погрешности вне погранслойной области, равномерные по параметру ε.

Замечание 3. Рассмотрим случай $\sigma=1/2$ в (1.5), когда

$$\varepsilon\ge\frac{\alpha}{8\ln N} \tag{2.27}$$

и сетка Ω является равномерной. Для кубического сплайна справедлива оценка погрешности

$$\left|S(x,u)-u(x)\right|\le C\max\left|u^{(4)}(s)\right|h^4,\quad x\in[0,1].$$

Учитывая условие (2.27), получаем

$$\left|S(x,u)-u(x)\right|\le\frac{C}{N^4}\min\left\{\frac{1}{\varepsilon^4},\ln^4 N\right\},\quad x\in[0,1].$$

Таблица 1. Погрешности и вычисленные порядки точности при вычислении первой производной на основе кубического сплайна на равномерной сетке

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	1.11×10^{-4}	1.38×10^{-5} 3.00	1.73×10^{-6} 3.00	2.16×10^{-7} 3.00	2.70×10^{-8} 3.00	3.38×10^{-9} 3.00
10^{-1}	1.07×10^{-2}	1.65×10^{-3} 2.70	2.26×10^{-4} 2.87	2.94×10^{-5} 2.94	3.75×10^{-6} 2.97	4.73×10^{-7} 2.99
10^{-2}	4.21×10^{-1}	2.26×10^{-1} 0.90	8.24×10^{-2} 1.45	1.86×10^{-2} 2.15	3.07×10^{-3} 2.60	4.32×10^{-4} 2.83
10^{-3}	6.79×10^{-1}	6.80×10^{-1} 0.03	6.45×10^{-1} 0.08	4.92×10^{-1} 0.39	2.79×10^{-1} 0.82	1.21×10^{-1} 1.21
10^{-4}	6.76×10^{-1}	6.76×10^{-1} 0.00	6.77×10^{-1} 0.00	6.77×10^{-1} 0.00	6.80×10^{-1} 0.00	6.66×10^{-1} 0.00

Далее имеем

$$\left\|S'(x,u)-u'(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le\left\|S'(x,u)-P_n'(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}+\left\|u'(x)-P_n'(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}.$$

Учитывая (2.5), получаем

$$\left\|u'(x)-P_n'(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le\frac{C}{N^3}\min\left\{\frac{1}{\varepsilon^4},\ln^4N\right\}.$$

Учитывая оценку (1.18), имеем

$$\left\|S'(x,u)-u'(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le\frac{C}{h}\left\|S(x,u)-P_n(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}+\frac{C}{N^3}\min\left\{\frac{1}{\varepsilon^4},\ln^4N\right\}.$$

Итак, для некоторой постоянной C_1 верно следующее:

$$\left\|S'(x,u)-u'(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le\frac{C_1}{N^3}\min\left\{\frac{1}{\varepsilon^4},\ln^4N\right\}.$$

Аналогично,

$$\left\|S''(x,u)-u''(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le\frac{C_2}{N^2}\min\left\{\frac{1}{\varepsilon^4},\ln^4N\right\},$$

где $n=0,1\ldots,N-1$.

Аналогичные оценки погрешности при условии (2.27) имеют место в случае сплайна $S_M(x,u)$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Зададим функцию вида (1.1)

$$u(x)=\cos\frac{\pi x}{2}+e^{-\frac{x}{\varepsilon}},\quad x\in[0,1].$$

Пусть $\tilde{x}_j$ – узлы сетки, полученной из исходной сетки Ω делением каждого сеточного интервала на 10 равных частей. Зададим относительную погрешность вычисления k-й производной при заданных ε и N на основе сплайна $S(x,u)$:

$$\Delta_k(\varepsilon,N)=\varepsilon^k\max_j\left|S^{(k)}(\tilde{x}_j,u)-u^{(k)}(\tilde{x}_j)\right|$$

Таблица 2. Погрешности и порядки точности вычисления первой производной на основе кубического сплайна на сетке Шишкина

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	1.11×10^{-4}	1.38×10^{-5} 3.00	1.72×10^{-6} 3.00	2.16×10^{-7} 3.00	2.70×10^{-8} 3.00	3.38×10^{-9} 3.00
10^{-1}	1.07×10^{-2}	1.65×10^{-3} 2.69	2.26×10^{-4} 2.87	2.94×10^{-5} 2.94	3.75×10^{-6} 2.97	4.73×10^{-7} 2.99
10^{-2}	3.61×10^{-2}	1.39×10^{-2} 1.38	4.07×10^{-3} 1.77	9.81×10^{-4} 2.05	2.07×10^{-4} 2.24	4.00×10^{-5} 2.37
10^{-7}	3.61×10^{-2}	1.39×10^{-2} 1.38	4.07×10^{-3} 1.77	9.81×10^{-4} 2.05	2.07×10^{-4} 2.24	4.00×10^{-5} 2.37
$M_{N,1}$		1.76	2.03	2.21	2.33	2.42

Таблица 3. Погрешности и порядки точности вычисления второй производной на основе кубического сплайна на сетке Шишкина

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	9.20×10^{-3}	2.30×10^{-3} 2.00	5.76×10^{-4} 2.00	1.44×10^{-4} 2.00	3.60×10^{-5} 2.00	9.01×10^{-6} 2.00
10^{-1}	9.15×10^{-2}	2.76×10^{-2} 1.73	7.54×10^{-3} 1.88	1.96×10^{-3} 1.94	5.00×10^{-4} 1.97	1.26×10^{-4} 1.99
10^{-2}	1.94×10^{-1}	1.07×10^{-1} 0.85	4.94×10^{-2} 1.12	1.97×10^{-2} 1.33	7.11×10^{-3} 1.47	2.40×10^{-3} 1.57
10^{-6}	1.94×10^{-1}	1.07×10^{-1} 0.85	4.94×10^{-2} 1.12	1.97×10^{-2} 1.33	7.11×10^{-3} 1.47	2.40×10^{-3} 1.57
$M_{N,2}$		1.17	1.36	1.47	1.56	1.62

и порядки точности, вычисленный $CR_k(\varepsilon, N)$ и теоретический $M_{N,k}$ с учетом оценок (2.17), (2.19):

$$CR_k(\varepsilon, N) = \log_2 \frac{\Delta_k(\varepsilon, N/2)}{\Delta_k(\varepsilon, N)}, \quad M_{N,k} = \log_2\left(\frac{\ln^{4-k}(N/2)}{(N/2)^{4-k}} \Big/ \frac{\ln^{4-k} N}{N^{4-k}}\right).$$

В табл. 1 приведены погрешность $\Delta_1(\varepsilon, N)$ и порядок точности $CR_1(\varepsilon, N)$ при вычислении первой производной на основе кубического сплайна $S(x, u)$ на равномерной сетке. При $\varepsilon \ll h$ точность не повышается с увеличением N, что говорит о неприемлемости применения равномерной сетки при наличии пограничного слоя.

В табл. 2 приведены $\Delta_1(\varepsilon, N)$ и $CR_1(\varepsilon, N)$ при вычислении первой производной на основе кубического сплайна $S(x, u)$ на сетке Шишкина. В последней строке таблицы приведены теоретические порядки точности. С увеличением N вычисленный порядок точности становится ближе к теоретическому. Результаты вычислений согласуются с оценкой (2.17). Взята эта оценка, потому что погрешность в пограничном слое выше, чем вне пограничного слоя согласно оценкам (2.17), (2.18).

Таблица 4. Погрешности и порядки точности вычисления первой производной на основе модифицированного сплайна на сетке Шишкина

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	1.12×10^{-4}	1.38×10^{-5} 3.02	1.72×10^{-6} 3.00	2.16×10^{-7} 3.00	2.70×10^{-8} 3.00	3.38×10^{-9} 3.00
10^{-1}	1.07×10^{-2}	1.65×10^{-3} 2.70	2.26×10^{-4} 2.87	2.94×10^{-5} 2.94	3.75×10^{-6} 2.97	4.73×10^{-7} 2.99
10^{-2}	3.61×10^{-2}	1.39×10^{-2} 1.38	4.07×10^{-3} 1.77	9.81×10^{-4} 2.05	2.07×10^{-4} 2.24	4.00×10^{-5} 2.37
10^{-3}	3.61×10^{-2}	1.39×10^{-2} 1.38	4.07×10^{-3} 177	9.81×10^{-4} 2.05	2.07×10^{-4} 2.24	4.00×10^{-5} 2.37
10^{-7}	3.61×10^{-2}	1.39×10^{-2} 1.38	4.07×10^{-3} 1.77	9.81×10^{-4} 2.05	2.07×10^{-4} 2.24	4.00×10^{-5} 2.37

В табл. 3 аналогичным образом приведены погрешности и порядки точности вычисления второй производной на основе кубического сплайна $S(x,u)$ на сетке Шишкина. Результаты вычислений согласуются с оценкой (2.19).

В табл. 4 приведены $\Delta_1(\varepsilon, N)$ и $CR_1(\varepsilon, N)$ при вычислении первой производной на основе модифицированного сплайна $S_M(x,u)$ на сетке Шишкина. Результаты вычислений согласуются с оценкой (2.1).

Таким образом, на основе модификации кубического сплайна достигается ε-равномерная точность (см. [6]). Но кубический сплайн $S(x,u)$ и модифицированный сплайн $S_M(x,u)$ дают погрешность одного порядка при вычислении производных. Это подтверждается полученными оценками и вычислительными экспериментами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована возможность применения кубических сплайнов для вычисления производных функций с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое. Доказано и экспериментально подтверждено, что применение кубического сплайна и его модификации, разработанной в [6], на сетке Шишкина приводит к ε-равномерным погрешностям вычисления производных, причем одного порядка. Показано, что применение кубических сплайнов на равномерной сетке для вычисления производных таких функций неприемлемо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237–248.
2. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841–890.
3. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
4. *Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L.* The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, 1967.
5. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
6. *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В.* Об интерполяции кубическими сплайнами функций с большими градиентами в пограничном слое // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 1. С. 9–28.
7. *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В.* Об интерполяции параболическим сплайном функций с большими градиентами в пограничном слое // Сиб. матем. журнал. 2017. Т. 58. № 4. С. 745–760.

8. *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В.* О равномерной сходимости параболической сплайн-интерполяции на классе функций с большими градиентами в пограничном слое // Сибирский ж. вычисл. матем. 2017. Т. 20. № 2. С. 131–144.
9. *Волков Ю.С.* Интерполяция сплайнами четной степени по Субботину и по Марсдену // Украинский матем. ж. 2014. Т. 66. № 7. С. 891–908.
10. *Kopteva N.V., Stynes M.* Approximation of derivatives in a convection-diffusion two-point boundary value problem // Appl. Numer. Math. 2001. V. 39. № 1. С. 47–60.
11. *Задорин А.И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сибирский ж. вычисл. матем. 2007. Т. 10. № 3. С. 267–275.
12. *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems: error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Singapore: World Sci. Publish. 2012.
13. *Linss T.* The necessity of Shishkin decompositions // Applied Math. Letters. 2001. V. 14. P. 891–896.
14. *Задорин А.И.* Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона–Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках // Сибирский ж. вычисл. матем. 2015. Т. 18. № 3. С. 289–303.
15. *Бор К.Де.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.
16. *Demko S.* Inverses of band matrices and local convergence of spline projections // SIAM J. Numer. Anal. 1977. V. 14. № 4. P. 616–619.