ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 3, с. 380–390

УДК 519.63

КЛАССИЧЕСКОЕ И ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1)]

© 2019 г. М. Ш. Бурлуцкая

(394006 Воронеж, Университетская пл., 1, Воронежский гос. ун-т, Россия)

e-mail: bmsh2001@mail.ru

Поступила в редакцию 02.05.2018 г.

Исследуется смешанная задача для дифференциальной системы первого порядка с двумя независимыми переменными и непрерывным потенциалом, соответствующая спектральная задача для которой представляет собой систему Дирака. Используя специальное преобразование формального решения и уточненные асимптотики собственных функций, получаем классическое решение задачи. При этом не требуются завышенные условия на гладкость начальных данных. В случае произвольной суммируемой с квадратом начальной функции получено обобщенное решение. Библ. 17.

Ключевые слова: метод Фурье, смешанная задача, система Дирака.

DOI: 10.1134/S0044466919030050

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, +\infty), \tag{1}$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \quad u_1(1,t) = u_2(1,t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^{\mathrm{т}}$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^{\mathrm{т}}$ (т — знак транспонирования), $u_j(x,t)$ и $\varphi_j(x)$ — скалярные функции, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & -q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, $q_j \in C[0, 1]$, все функции комплекснозначные.

Несмотря на то что это простейшая система всего лишь второго порядка, она достаточно сложна в исследовании и вызывает интерес своими приложениями. Соответствующая спектральная задача представляет собой систему Дирака, спектральным свойствам которой в последние годы посвящено много работ. Существенные трудности возникают в случае негладкого потенциала $Q(x)$. Впервые системы Дирака с негладкой $Q(x)$ изучались в работах П.В. Джакова и Б.С. Митягина (см. [1], [2]). Близкие исследования для таких систем проводились в [3]–[6] (см. также библиографию в [5]). В работах [7]–[9] предложен сравнительно простой способ изучения системы Дирака с негладким потенциалом, базирующийся на операторах преобразования и позволяющий получить уточненные асимптотики решения спектральной задачи. В данной работе исследования проводятся, опираясь на результаты из [7], [8].

Будем предполагать выполненными следующие условия:

$$\begin{gathered} \varphi_j(x) - \text{абсолютно непрерывны}, \quad \varphi'_j \in L_2[0,1], \quad j = 1, 2, \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0), \quad \varphi_1(1) = \varphi_2(1). \end{gathered} \tag{4}$$

Задача будет исследоваться с помощью метода Фурье. Метод Фурье применялся и для более общих систем (см., например, [10]). Но рассматривались только случаи непрерывно дифферен-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 16-11-10125).

цируемой $Q(x)$, при этом традиционно метод Фурье применялся при завышенных требованиях гладкости начальных данных задачи. Здесь же для $Q(x)$ предполагается только непрерывность, а для $\varphi(x)$ требуется минимальное количество производных.

Классическим решением задачи будем называть вектор-функцию $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^{\text{т}}$, компоненты которой абсолютно непрерывны по x и t, и которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду, и условиям (2), (3).

В работе [11] классическое решение задачи (1)–(3) получено при условии $\varphi \in D_{L^2}$. Здесь доказано, что для существования классического решения достаточно требовать $\varphi \in D_L$. При этом используется техника, разработанная в [12], [13] для скалярных уравнений с инволюцией. Основной используемый здесь прием, идущий еще от идей А.Н. Крылова [14] об ускорении сходимости рядов (см. также [15]), связан с преобразованием формального решения, а именно, выделения из него ряда, который явно суммируется, и ряда, который имеет хорошую скорость сходимости, что обеспечивается построением уточненных асимптотик решения соответствующей спектральной задачи.

В случае произвольной функции $\varphi \in L_2^2[0, 1]$ получено обобщенное решение, понимаемое как предел классических решений задач (1)–(3) с начальными функциями $\varphi_h \in D_L$, аппроксимирующими $\varphi(x)$.

1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Метод Фурье для задачи (1)–(3) связан со спектральной задачей для оператора L:

$$(Ly)(x) = By'(x) + Q(x)y(x),$$

$$y_1(0) = y_2(0), \quad y_1(1) = y_2(1),$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^{\text{т}}$. Оператор L есть оператор Дирака с условиями Дирихле.

Приведем необходимые результаты из [7], [8].

Лемма 1. *Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые с асимптотикой*

$$\lambda_n = \pi n i + \beta_n, \quad (n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \ldots),$$

а для собственных функций $y_n(x) = (y_{n1}(x), y_{n2}(x))^{\text{т}}$ оператора L имеют место асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} y_{nj}(x) = e^{p_j \pi n i x}(1 + \beta_n x) + \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i \tau}d\tau + \int_0^x b(x,\tau)e^{-\pi n i \tau}d\tau + \\ + \beta_n \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i \tau}d\tau + \beta_n \int_0^x b(x,\tau)e^{-\pi n i \tau}d\tau + O(\beta_n^2), \end{aligned} \tag{5}$$

$j = 1, 2$, *где* $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, *и оценка* $O(\ldots)$ *равномерна по* $x \in [0, 1]$.

Здесь и в дальнейшем через β_n обозначаются различные числа такие, что $\sum |\beta_n|^2 < \infty$, и β_n не зависят от $\varphi(x)$. Через $b(x,t)$ обозначаются различные непрерывные функции из некоторого конечного набора.

Замечание 1. В [7], [8] приводятся точные выражения для β_n и $b(x,t)$, но нам они не требуются, а вид (5) функций y_{nj} более удобен в наших рассуждениях.

Сопряженный оператор L^* есть

$$(L^*z)(x) = -Bz'(x) + Q^*(x)z(x),$$

$$z_1(0) = z_2(0), \quad z_1(1) = z_2(1),$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^{\text{т}}$, $Q^*(x) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{q}_1(x) \\ -\bar{q}_2(x) & 0 \end{pmatrix}$.

Лемма 2. *Для собственных функций* $z_n(x) = (z_{n1}(x), z_{n2}(x))^{\mathrm{T}}$ *оператора* L^* *имеют место асимптотические формулы*:

$$z_{nj}(x) = e^{p_j\pi nix}(1 + \beta_n x) + \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni\tau}d\tau + \int_0^x b(x,\tau)e^{-\pi ni\tau}d\tau +$$
$$+ \beta_n\int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni\tau}d\tau + \beta_n\int_0^x b(x,\tau)e^{-\pi ni\tau}d\tau + O(\beta_n^2), \quad j = 1,2,$$

где $n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots,$ $p_1 = 1,$ $p_2 = -1,$ (β_n *и* $b(x,t)$ *другие, отличные от* (5)).

Лемма 3. *Множества собственных и присоединенных функций операторов* L *и* L^* *полны в* $L_2^2[0,1]$.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье можно записать в виде (см. [10])

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|n|\ge n_0}\int_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)(x)e^{\lambda t}d\lambda, \tag{6}$$

где $r > 0$ достаточно велико и фиксировано, $R_\lambda = (L - \lambda\mathbf{E})^{-1}$ – резольвента оператора L ($\mathbf{E}$ – единичный оператор, λ – спектральный параметр), $\gamma_n = \{\lambda\,|\,|\lambda - \pi ni| = \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, чтобы собственные значения λ_n попадали по одному внутрь γ_n. При этом

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}(R_\lambda\varphi)(x)e^{\lambda t}d\lambda = \frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)}y_n(x)e^{\lambda_n t},$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2^2[0,1]$ (это же обозначение сохраняется и для скалярного произведения в $L_2[0,1]$).

В соответствии с [12], [13] представим формальное решение в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t), \tag{7}$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|n|\ge n_0}\int_{\gamma_n}\right)\frac{R_\lambda^0 m}{\lambda - \mu_0}e^{\lambda t}d\lambda,$$
$$v(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|n|\ge n_0}\int_{\gamma_n}\right)\frac{\left[R_\lambda g - R_\lambda^0 m\right]}{\lambda - \mu_0}e^{\lambda t}d\lambda,$$

здесь R_λ^0 – резольвента оператора спектральной задачи, соответствующей (1)–(3) в случае $Q(x) \equiv 0$, $g = (L - \mu_0 E)\varphi$, μ_0 не является собственным значением, лежит вне γ_n и $|\mu_0| > r$ (для краткости аргумент x в интегралах опускаем). В отличие от [12], [13] здесь мы не требуем, чтобы m совпадало с g, и определим m позже.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В дальнейшем нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 4. *Для любой функции* $g \in L_2[0,1]$ *имеют место соотношения*

$$(g(x), e^{\pi nix}) = \beta_n, \tag{8}$$

$$\left(g(x), \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni\tau}d\tau\right) = \beta_n, \tag{9}$$

$$\left(\int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i\tau}d\tau, \int_0^x b(x,\tau)e^{\pm\pi n i\tau}d\tau\right) = \beta_n. \qquad (10)$$

Доказательство. Так как

$$\sum_{n_1}^{n_2}\left|(g, e^{\pi nix})\right|^2 = \sum_{n=2k\in[n_1,n_2]}\left|(g, e^{2\pi kix})\right|^2 + \sum_{n=2k+1\in[n_1,n_2]}\left|(ge^{-\pi ix}, e^{2\pi kix})\right|^2,$$

то справедлива оценка (8).

Далее, (9) следует из

$$\left(g(x), \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i\tau}d\tau\right) = \int_0^1 g(x)dx\int_0^x \overline{b(x,\tau)}e^{-\pi n i\tau}d\tau = \int_0^1 e^{-\pi n i\tau}d\tau\int_\tau^1 g(x)\overline{b(x,\tau)}dx = \beta_n.$$

При получении соотношения (10) для изменения порядка интегрирования удобно использовать функцию $\varepsilon(x,t)$: $\varepsilon(x,t) = 1$ при $x \ge t$, $\varepsilon(x,t) = 0$ при $x < t$. Имеем

$$\left(\int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i\tau}d\tau, \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i\tau}d\tau\right) = \int_0^1 dx\int_0^x b(x,\tau)d\tau\int_0^x \overline{b(x,\eta)}e^{\pi n i(\tau-\eta)}d\eta =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^x b(x,\tau)d\tau\int_{\tau-x}^{\tau}\overline{b(x,\tau-\xi)}e^{\pi n i\xi}d\xi = \int_0^1 dx\int_0^1 \varepsilon(x,\tau)b(x,\tau)d\tau\int_0^1 \varepsilon(\tau,\xi)\varepsilon(\xi,\tau-x)\overline{b(x,\tau-\xi)}e^{\pi n i\xi}d\xi =$$

$$= \int_0^1 e^{\pi n i\xi}d\xi\int_0^1 \varepsilon(x,\tau)b(x,\tau)d\tau\int_0^1 \varepsilon(\tau,\xi)\varepsilon(\xi,\tau-x)\overline{b(x,\tau-\xi)}dx = \int_0^1 \psi(\xi)e^{\pi n i\xi}d\xi = \beta_n.$$

Последнее справедливо в силу ограниченности внутреннего интеграла $\psi(\xi)$. Аналогично доказывается случай со знаком “–” в (10).

Лемма 5. *Ряды*

$$\sum_{n\ge n_0}\beta_n\int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i(\pm\tau+t)}d\tau$$

и такие же ряды при $n \le -n_0$ сходятся равномерно на множестве $Q_T = [0,1]\times[-T,T]$ при любом $T > 0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть ряд

$$\sum_{n\ge n_0}\beta_n\int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i(\tau+t)}d\tau.$$

При $(x,t)\in Q_T$ имеем

$$\left|\sum_{n_1}^{n_2}\beta_n\int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i(\tau+t)}d\tau\right| = \left|\int_t^{t+x} b(x,\xi-t)\sum_{n_1}^{n_2}\beta_n e^{\pi n i\xi}d\xi\right| \le c\int_{-T}^{T+1}\left|\sum_{n_1}^{n_2}\beta_n e^{\pi n i\xi}\right|d\xi \le c\int_{-N}^{N}\left|\sum_{n_1}^{n_2}\beta_n e^{\pi n i\xi}\right|d\xi =$$

$$= c\sum_{k=-N}^{N-1}\int_k^{k+1}\left|\sum_{n_1}^{n_2}\beta_n e^{\pi n i\xi}\right|d\xi = c\sum_{k=-N}^{N-1}\int_0^1\left|\sum_{n_1}^{n_2}\beta_n(-1)^{nk}e^{\pi n i\eta}\right|d\eta \le$$

$$\le c\sum_{k=-N}^{N-1}\left(\int_0^1\left|\sum_{n_1}^{n_2}\beta_n(-1)^{nk}e^{\pi n i\eta}\right|^2 d\eta\right)^{1/2} \le 2Nc\left(\sum_{n_1}^{n_2}\left|\beta_n\right|^2\right)^{1/2}.$$

Здесь N – натуральное число, $N \ge T+1$. Из сходимости ряда $\sum\left|\beta_n\right|^2$ следует равномерная сходимость исследуемого ряда.

Лемма 6. *Для любой функции* $g = (g_1, g_2)^{\mathrm{T}} \in L_2^2[0,1]$ *имеют место соотношения*

$$\frac{(g, z_n)}{(y_n, z_n)} y_{nj}(x) e^{\lambda_n t} = \Omega_{nj}(x,t) + \tilde{\Omega}_{nj}(x,t), \qquad j = 1, 2,$$

где $n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots$

$$\Omega_{nj}(x,t) = \left[(g_+, e^{\pi nix}) + (g_-, e^{-\pi nix})\right] e^{\pi ni(p_j x + t)}, \tag{11}$$

$$\tilde{\Omega}_{nj}(x,t) = \left[(g_+, e^{\pi nix}) + (g_-, e^{-\pi nix})\right]\left(\int_0^x b(x,\tau) e^{\pi ni\tau} d\tau + \int_0^x b(x,\tau) e^{-\pi ni\tau} d\tau\right) e^{\pi nit} + O(\beta_n^2), \tag{12}$$

$p_j = (-1)^j$, $g_\pm$ *— некоторые функции из конечного набора, оценка* $O(\ldots)$ *равномерна по* x *и* t *из* Q_T.

Доказательство. По леммам 1, 2 для $y_{nj}(x)$ имеем следующее представление:

$$y_{nj}(x) = e^{p_j \pi nix}(1 + \beta_n x) + \sum_{k=1}^{2} \int_0^x b(x,\tau) e^{(-1)^k \pi ni\tau} d\tau + \beta_n b_n(x) + O(\beta_n^2),$$

где $b_n(x)$ есть $\int_0^x b(x,\tau) e^{\pm \pi ni\tau} d\tau$ или комбинации таких слагаемых, и аналогичное представление для $z_{nj}(x)$.

Согласно лемме 4, для любой функции $g \in L_2[0,1]$ имеем $(g, b_n) = \beta_n$, $(b_n, b_n) = \beta_n$, $(g, e^{\pi nix}) = \beta_n$. Отсюда получаем $(y_n, z_n) = 2 + \beta_n$, а $(g, z_n) = \beta_n$. Тогда верно

$$\begin{gathered}\frac{(g, z_n)}{(y_n, z_n)} y_{nj}(x) e^{\lambda_n t} = \frac{1}{2}(g, z_n)\left[e^{p_j \pi nix} + \beta_n x e^{\pi nix} + \sum_{k=1}^{2} \int_0^x b(x,\tau) e^{(-1)^k \pi ni\tau} d\tau + \beta_n b_n(x)\right] \times \\ \times e^{\pi nit}\left\{1 + \beta_n t + O(\beta_n^2)\right\} = \frac{1}{2}(g, z_n) e^{p_j \pi nix} e^{\pi nit} + \\ + \frac{1}{2}(g, z_n)\left[\int_0^x b(x,\tau) e^{\pi ni\tau} d\tau + \int_0^x b(x,\tau) e^{-\pi ni\tau} d\tau\right] e^{\pi nit} + O(\beta_n^2).\end{gathered} \tag{13}$$

Далее,

$$\begin{gathered}(g, z_n) = (g_1, e^{\pi nix}) + (g_2, e^{-\pi nix}) + \beta_n(g_1 x, e^{\pi nix}) + \beta_n(g_2 x, e^{-\pi nix}) + \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left(g_j, \int_0^x b(x,\tau) e^{(-1)^k \pi ni\tau} d\tau\right) + \\ + \sum_{j=1}^{2} \beta_n\left(g_j, b_n(x)\right) + O(\beta_n^2) = (\tilde{g}_1, e^{\pi nix}) + (\tilde{g}_2, e^{-\pi nix}) + O(\beta_n^2),\end{gathered}$$

где

$$\tilde{g}_k = g_k + \sum_{p=1}^{2} \int_x^1 g_p(\tau) \overline{b(x,\tau)} d\tau$$

(функции $b(x,\tau)$ в каждой формуле разные). Отсюда и из (13) следует утверждение леммы.

Из (8), (12) и леммы 5 следует

Лемма 7. *Ряды* $\sum_{|n| \ge n_0} \tilde{\Omega}_{nj}(x,t)$ *равномерно сходятся в* Q_T.

4. РЕШЕНИЕ ЭТАЛОННОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе получим классическое решение эталонной задачи

$$\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} = B \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}, \qquad x \in [0,1], \qquad t \in (-\infty, +\infty), \tag{14}$$

$$u_{01}(0,t) = u_{02}(0,t), \qquad u_{01}(1,t) = u_{02}(1,t), \tag{15}$$

$$u_0(x,0) = \varphi_0(x). \tag{16}$$

Требования на $\varphi_0(x)$ те же, что и на $\varphi(x)$.

Для соответствующих оператора и сопряженного оператора

$$(L_0 y)(x) = By'(x), \quad (L_0^* y)(x) = -By'(x), \quad y(x) = (y_1(x), y_2(x))^{\mathrm{T}},$$
$$y_1(0) = y_2(0), \quad y_1(1) = y_2(1),$$

имеет место

Лемма 8. *Собственные значения оператора L_0 есть числа $\lambda_{0n} = \pi n i$, ($n \in \mathbb{Z}$), а собственные функции $y_{0n}(x) = (e^{\pi n i x}, e^{-\pi n i x})^{\mathrm{T}}$. Для сопряженного оператора L_0^* имеем $\lambda_{0n}^* = \overline{\lambda}_{0n} = -\pi n i$, ($n \in \mathbb{Z}$), $z_{0n}(x) = (e^{\pi n i x}, e^{-\pi n i x})^{\mathrm{T}}$. Системы $\{y_{0n}(x)\}$ и $\{z_{0n}(x)\}$ биортогональны, причем $(y_{0n}, z_{0n}) = 2$.*

Обозначим через D_L область определения операторов L и L_0, включающую функции $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющие условию (4).

Лемма 9. *Если $\varphi_0 \in D_L$, то $\varphi_0(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд*

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\varphi_{01}, e^{\pi n i x}\right) + \left(\varphi_{02}, e^{-\pi n i x}\right)\right]\left(e^{\pi n i x}, e^{-\pi n i x}\right)^{\mathrm{T}},$$

сумма которого есть $\Phi(x) = (\tilde{\varphi}_0(x), \tilde{\varphi}_0(-x))^{\mathrm{T}}$, где $\tilde{\varphi}_0(x)$ — скалярная абсолютно непрерывная 2-периодическая функция такая, что $\tilde{\varphi}_0(x) = \varphi_{01}(x)$ при $x \in [0, 1]$, и $\tilde{\varphi}_0(x) = \varphi_{02}(-x)$ при $x \in [-1, 0]$.

Доказательство. Раскладывая $\varphi_0(x)$ по системе $\{y_{0n}(x)\}$ имеем

$$\varphi_0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(\varphi_0, z_{n0})}{2} y_{0n}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\varphi_{01}, e^{\pi n i x}\right) + \left(\varphi_{02}, e^{-\pi n i x}\right)\right]e^{\pi n i x} \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\varphi_{01}, e^{\pi n i x}\right) + \left(\varphi_{02}, e^{-\pi n i x}\right)\right]e^{-\pi n i x} \end{pmatrix}.$$

Равномерная сходимость ряда следует из соотношения

$$(\varphi_0, z_{n0}) = \frac{1}{\lambda_{0n}}(L_0\varphi_0, z_{n0}) = O\left(n^{-1}\beta_n\right),$$

сходимости ряда $\sum \frac{1}{n}|\beta_n|$ и ограниченности $y_{0n}(x)$. Далее, так как $\left(\varphi_{01}, e^{\pi n i x}\right) + \left(\varphi_{02}, e^{-\pi n i x}\right) = \int_{-1}^{1}\tilde{\varphi}_0(x)e^{\pi n i x}dx$, то первая компонента представляет собой разложение функции $\tilde{\varphi}_0(x)$ по тригонометрической системе $\left\{e^{\pi n i x}/\sqrt{2}\right\}$, ортонормированной и полной на отрезке $[-1, 1]$, откуда следует сходимость ряда в первой компоненте к $\tilde{\varphi}_0(x)$ на $[-1, 1]$. Аналогично доказывается сходимость второй компоненты к $\tilde{\varphi}_0(-x)$ на $[-1, 1]$. В силу того, что $\varphi_0 \in D_L$, то из краевых условий имеем $\tilde{\varphi}_0(0-0) = \varphi_{02}(0) = \varphi_{01}(0) = \tilde{\varphi}_0(0+0)$, $\tilde{\varphi}_0(-1+0) = \varphi_{02}(1) = \varphi_{01}(1) = \tilde{\varphi}_0(1-0)$, т.е. непрерывность $\tilde{\varphi}_0(x)$, а из абсолютной непрерывности $\varphi_0(x)$ следует абсолютная непрерывность $\tilde{\varphi}_0(x)$ на всей оси.

Теорема 1. *Если $\varphi_0 \in D_L$, то $u_0(x,t) = (\tilde{\varphi}_0(x+t), \tilde{\varphi}_0(-x+t))^{\mathrm{T}}$, где $\tilde{\varphi}_0(x)$ из леммы 9, является классическим решением задачи* (14)–(16).

Доказательство. Для формального решения имеем

$$u_0(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(\varphi_0, z_{n0})}{2} y_{n0}(x)e^{\lambda_n^0 t} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}(\tilde{\varphi}_0(x), e^{\pi n i x})e^{\pi n i(x+t)} \\ \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}(\tilde{\varphi}_0(x), e^{\pi n i x})e^{-\pi n i(x-t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_0(x+t) \\ \tilde{\varphi}_0(-x+t) \end{pmatrix}.$$

Из леммы 9 в силу абсолютной непрерывности $\tilde{\varphi}_0(x)$ следует абсолютная непрерывность $u_0(x,t)$ по x и t. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $u_0(x,t)$ удовлетворяет уравнению (14).

Далее, $u_0(0,t) = (\tilde{\varphi}_0(t), \tilde{\varphi}_0(t))^{\text{т}}$, а в силу периодичности $\tilde{\varphi}_0(x)$, $u_0(1,t) = (\tilde{\varphi}_0(1+t), \tilde{\varphi}_0(-1+t))^{\text{т}} = (\tilde{\varphi}_0(1+t), \tilde{\varphi}_0(1+t))^{\text{т}}$, т.е. выполнены условия (15). Таким образом, при $x \in [0,1]$ имеем $u_0(x,0) = (\tilde{\varphi}_0(x), \tilde{\varphi}_0(-x))^{\text{т}} = (\varphi_{01}(x), \varphi_{02}(x))^{\text{т}}$, а значит, справедливо (16).

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Теперь исследуем компоненты в (7).

Лемма 10. *Ряды $u_0(x,t)$ и $v(x,t)$ из* (7) *сходятся абсолютно и равномерно в Q_T.*

Доказательство. В силу леммы 6, ограниченности $y_n(x)$, соотношений (8) и $(\lambda-\mu_0)^{-1} = O(n^{-1})$ получим, что каждое слагаемое

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{(R_\lambda g)(x)}{\lambda-\mu_0}e^{\lambda t}d\lambda = \frac{1}{\lambda_n-\mu_0}\frac{(g,z_n)}{(y_n,z_n)}y_n(x)e^{\lambda_n t} \tag{17}$$

имеет оценку $O\left(\frac{1}{n}\beta_n\right)$. Аналогичная оценка имеет место, если вместо $(R_\lambda g)$ взять $(R_\lambda^0 m)$. Отсюда следует утверждение леммы.

С учетом вида $z_n^0(x)$ и $y_n^0(x)$, справедлива

Лемма 11. *Если $m_1 = g_-$, $m_2 = g_+$, где g_-, g_+ из* (11), *то*

$$\begin{gathered}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}(R_\lambda^0 m)e^{\lambda t}d\lambda = \Omega_n(x,t) = (\Omega_{n1}(x,t), \Omega_{n2}(x,t))^{\text{т}},\\ -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\left(R_\lambda g - R_\lambda^0 m\right)e^{\lambda t}d\lambda = \tilde{\Omega}_n(x,t) = \left(\tilde{\Omega}_{n1}(x,t), \tilde{\Omega}_{n2}(x,t)\right)^{\text{т}},\end{gathered} \tag{18}$$

где $\Omega_{nj}(x,t)$, $\tilde{\Omega}_{nj}(x,t)$ из леммы 6.

Положим

$$J_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{\left[R_\lambda g - R_\lambda^0 m\right]}{\lambda-\mu_0}e^{\lambda t}d\lambda.$$

Лемма 12. *Ряд $\sum\frac{\partial}{\partial t}(J_n(x,t))$ равномерно сходится в Q_T.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(J_n(x,t)) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\lambda\frac{[R_\lambda g - R_\lambda^0 m]}{\lambda-\mu_0}e^{\lambda t}d\lambda = \\ = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\left[R_\lambda g - R_\lambda^0 m\right]e^{\lambda t}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu_0\frac{\left[R_\lambda g - R_\lambda^0 m\right]}{\lambda-\mu_0}e^{\lambda t}d\lambda.\end{gathered}$$

Равномерная сходимость ряда $\sum\int_{\gamma_n}\left[R_\lambda g - R_\lambda^0 m\right]e^{\lambda t}d\lambda$ следует из (18) и леммы 7, а равномерная сходимость ряда $\sum\int_{\gamma_n}\mu_0\frac{\left[R_\lambda g - R_\lambda^0 m\right]}{\lambda-\mu_0}e^{\lambda t}d\lambda$ доказана в лемме 10.

Лемма 13. *Имеет место соотношение*

$$B\frac{\partial J_n(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial J_n(x,t)}{\partial t} + \frac{Q(x)}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{R_\lambda g}{\lambda-\mu_0}e^{\lambda t}d\lambda. \tag{19}$$

Доказательство. Так как $g = (L-\lambda E)R_\lambda g$, то

$$B\frac{\partial}{\partial x}(R_\lambda g) = g(x) - Q(x)R_\lambda g + \lambda R_\lambda g.$$

Аналогично,

$$B\frac{\partial}{\partial x}(R^0_\lambda m) = m(x) + \lambda R^0_\lambda m.$$

Тогда

$$B\frac{\partial J_n(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{\lambda}{\lambda-\mu_0}\left[R_\lambda g - R^0_\lambda m\right]e^{\lambda t}d\lambda + \frac{Q(x)}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{R_\lambda g}{\lambda-\mu_0}e^{\lambda t}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{g(x)-m(x)}{\lambda-\mu_0}e^{\lambda t}d\lambda,$$

откуда следует (19).

В силу (19), (17) и леммы 12 справедлива

Лемма 14. *Ряд* $\sum B\frac{\partial}{\partial x}(J_n(x,t))$ *равномерно сходится в* Q_T.

Теорема 2. *Если* $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\varphi_2(x))^{\mathrm{T}}$ *удовлетворяет условиям* (4), *то* $u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t)$ *из* (7) *является классическим решением задачи* (1)–(3).

Доказательство. Положим $\varphi_0(x) = (R^0_\mu m)(x)$, где $m(x)$ из леммы 11. Тогда из тождества Гильберта

$$\frac{R^0_\lambda m}{\lambda-\mu_0} = \frac{\varphi_0}{\lambda-\mu_0} + R^0_\lambda\varphi_0,$$

а значит, в (7)

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|n|\ge n_0}\int_{\gamma_n}\right)(R^0_\lambda\varphi_0)(x)e^{\lambda t}d\lambda,$$

т.е. $u_0(x,t)$ является решением эталонной задачи (14)–(16) с $\varphi_0(x) = \left(R^0_\mu m\right)(x)$.

В силу лемм 12–14 ряд $v(x,t)$ можно почленно дифференцировать и

$$B\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + Q(x)v(x,t).$$

Таким образом, $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду.

Поскольку для компонент $R_\lambda\varphi = \left((R_\lambda\varphi)_1,(R_\lambda\varphi)_2\right)^{\mathrm{T}}$ выполнено $(R_\lambda\varphi)_1(0) = (R_\lambda\varphi)_2(0)$, $(R_\lambda\varphi)_1(1) = (R_\lambda\varphi)_2(1)$, то $u(x,t)$ удовлетворяет условию (2).

Далее, в силу теоремы о разложении по собственным функциям операторов L и L_0 (для функций из области определения D_L этих операторов) имеем

$$u(x,0) = u_0(x,0) + v(x,0) = \varphi_0(x) - \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|n|\ge n_0}\int_{\gamma_n}\right)\frac{[R_\lambda g - R^0_\lambda m]}{\lambda-\mu_0}d\lambda =$$

$$= \varphi_0(x) - \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|n|\ge n_0}\int_{\gamma_n}\right)[R_\lambda\varphi - R^0_\lambda\varphi_0]d\lambda = \varphi_0(x) + \varphi(x) - \varphi_0(x) = \varphi(x),$$

что доказывает справедливость (3).

Замечание 2. С учетом замечания 3 из [7] результаты могут быть обобщены на случай $q_j \in L_2[0, 1]$.

6. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Получим теперь обобщенное решение задачи (1)–(3) в предположении, что $\varphi \in L^2_2[0, 1]$. Здесь используется техника работ [16], [17].

Рассмотрим формальное решение (6). Вместо леммы 6 мы теперь используем утверждение, следующее из лемм 1 и 2 и неравенства $\sum\left|\left(\varphi, e^{2\pi n i x}\right)\right|^2 \le c\|\varphi\|^2$ (всюду далее $\|\cdot\|$ – норма в $L^2_2[0, 1]$).

Лемма 15. *Имеют место асимптотические формулы*

$$(\varphi, z_n) = \nu_n + \nu_n\beta_n,$$

$$\frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)} y_{nj}(x)e^{\lambda_n t} = \nu_n\left[e^{p_j\pi nix} + \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni\tau}d\tau + \int_0^x b(x,\tau)e^{-\pi ni\tau}d\tau\right]e^{\pi nit} + O(\nu_n\beta_n), \quad j = 1, 2,$$

где через ν_n *обозначаются числа, которые зависят от* $\varphi(x)$*, но при этом* $\sum|\nu_n|^2 < c\|\varphi\|^2$, $x \in [0, 1]$, $t \in [-T, T]$, $T > 0$, *– любое фиксированное число, и оценка* $O(\ldots)$ *равномерна по* x *и* t.

Лемма 16. *Ряды*

$$\sum_{n\geq n_0}\nu_n\int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni(\pm\tau+t)}d\tau$$

и такие же ряды при $n \leq -n_0$ *сходятся равномерно на множестве* $Q_T = [0, 1]\times[-T, T]$ *при любом* $T > 0$*, и для их сумм* $F_\pm(x,t)$ *имеют место оценки*

$$\max_{Q_T}|F_\pm(x,t)| \leq C_T\|\varphi\|, \tag{20}$$

где $C_T > 0$ *и зависит только от* T.

Доказательство. Сходимость рядов доказана в лемме 5. Далее, как и в лемме 5, для любых $(x,t) \in Q_T$ и любого натурального m получим

$$\left|\sum_{n_0}^m \nu_n\int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni(\tau+t)}d\tau\right| \leq 2Nc\left(\sum_{n_0}^m|\nu_n|^2\right)^{1/2} \leq C_T\|\varphi\|,$$

откуда следует (20).

Очевидно справедлива

Лемма 17. *Ряды* $\sum O(\nu_n\beta_n)$ *сходятся абсолютно и равномерно на множестве* Q_T*, причем* $\sum|O(\nu_n\beta_n)| \leq C_T\|\varphi\|$.

Теорема 3. *Если* $q_j \in C[0, 1]$ $(j = 1, 2)$ *и* $\varphi \in L_2^2[0, 1]$, *то ряд* $u(x,t)$ *формального решения сходится почти всюду по* $x \in [0, 1]$ *и* $t \in (-\infty, \infty)$. *При этом для любых* $(x,t) \in Q_T$ *справедлива оценка*

$$\|u(x,t)\|_{L_2^2[Q_T]} \leq c_T\|\varphi\|. \tag{21}$$

Далее, если $\varphi_h \in D_L$ *сходится к* $\varphi(x)$ *в* $L_2^2[0, 1]$ *при* $h \to 0$*, то* $u_h(x,t)$ *сходится к* $u(x,t)$ *по норме* $L_2^2[Q_T]$ *при любом* $T > 0$*, где* $u_h(x,t)$ *есть классическое решение задачи* (1)–(3) *с начальным условием* $u_h(x,0) = \varphi_h(x)$.

Доказательство. Для доказательства сходимости достаточно рассмотреть только ряд

$$\sum_{n\geq n_0}\frac{(\varphi, z_n)y_n(x)}{(y_n, z_n)}e^{\lambda_n t} \tag{22}$$

(случай $\sum_{n\leq -n_0}$ рассматривается аналогично).

По лемме 15 компоненты ряда (22) есть

$$\sum_{n\geq n_0}\nu_n\left[e^{\pm\pi nix} + \sum_{k=1}^2\int_0^x b(x,\tau)e^{(-1)^k\pi ni\tau}d\tau\right]e^{\pi nit} + \sum_{n\geq n_0}O(\nu_n\beta_n).$$

Рассмотрим ряд $\Sigma_0 = \sum_{n\geq n_0}\nu_n y_n^0(x)e^{\pi nit}$, $y_n^0(x) = (e^{\pi nix}, e^{-\pi nix})^{\text{т}}$. Имеем

$$\Sigma_0 = (\Sigma_{01}, \Sigma_{01})^{\text{т}}, \quad \Sigma_{01} = \sum_{n\geq n_0}\nu_n e^{n\pi i(x+t)}, \quad \Sigma_{02} = \sum_{n\geq n_0}\nu_n e^{-n\pi i(x-t)}.$$

Исследуем сходимость $\Sigma_{01} = \sum_{n\geq n_0} \nu_n e^{n\pi i\eta t}$, $\eta = x + t$. По теореме Карлесона (о сходимости почти всюду тригонометрических рядов Фурье) ряд Σ_{01} сходится почти при всех $\eta \in (-\infty, \infty)$. Докажем, что ряд Σ_{01} сходится почти при всех $x \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$.

Обозначим $Q_1 = \{(\eta, \xi) | \eta \in [-T, T+1], \xi \in [-T, T]\}$, и через e множество точек $\eta \in [-T, T+1]$, в которых ряд расходится, $\operatorname{mes} e = 0$. Тогда для множества $e_1 = \{(\eta, \xi) | \eta \in e, \xi \in [-T, T]\}$ $\operatorname{mes} e_1 = \iint_{Q_1} \chi(\eta, \xi) d\eta d\xi = 0$ (здесь $\chi(\eta, \xi)$ – характеристическая функция множества e_1). Преобразование $\eta = x + t$, $\xi = t$ переводит прямоугольник Q_1 в прямоугольник Q в плоскости переменных x, t, а множество e_1 в множество e_2. Так как $Q_T \subset Q$ и $\operatorname{mes} e_2 = 0$, то ряд Σ_{01} сходится почти всюду в Q_T. Значит, он сходится почти всюду при всех $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Аналогично получаем сходимость ряда Σ_{02}. Отсюда с учетом лемм 16, 17 получаем сходимость ряда (22).

Оценка (21) следует из лемм 16, 17 для компонент ряда (22), аналогично получаемых оценок для Σ_0, и в силу ограниченности резольвенты.

Таким образом, доказано, что ряд $u(x,t)$ сходится почти всюду и $\|u(x,t)\|_{L_2^2[Q_T]} \leq c_T \|\varphi\|$.

Далее, поскольку $u_h(x,t) - u(x,t)$ есть формальное решение смешанной задачи (1)–(3) при начальной функции $\varphi_h(x) - \varphi(x)$, то получаем, что $\lim\limits_{h\to 0} \|u_h(x,t) - u(x,t)\|_{L_2^2[Q_T]} = 0$, когда $\lim\limits_{h\to 0} \|\varphi_h(x) - \varphi(x)\| = 0$.

Замечание 3. Используя теорему Карлесона и теорему равносходимости из [6], теорему 3 можно усилить, показав, что $u(x,0) = \varphi(x)$ почти всюду на [0, 1]. В самом деле, преобразуя формальный ряд

$$u(x,0) = u_0(x,0) + u(x,0) - u_0(x,0),$$

где $u_0(x,0)$ – соответствующий формальный ряд задачи (1)–(3) с $Q(x) \equiv 0$, получаем по теореме равносходимости [6, Теорема 1], что частичные суммы ряда $u(x,0) - u_0(x,0)$ равномерно стремятся к нулю на отрезке [0, 1], а сумма ряда $u_0(x,0)$ по теореме Карлесона почти всюду равна $\varphi(x)$ (см. также доказательство леммы 9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джаков П.В., Митягин Б.С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака // Успехи матем. наук. 2006. Т. 61. № 4. С. 77–182.
2. *Djakov P., Mityagin B.* Bari-Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators // Math. Nachr. 2010. V. 283. № 3. P. 443–462.
3. *Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Серия матем. 2011. Т. 75. № 3. С. 3–28.
4. *Савчук А.М., Садовничая И.В.* Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 5. С. 573–584.
5. *Savchuk A.M., Shkalikov A.A.* Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. 2014. V. 96. № 5-6. С. 777–810.
6. *Садовничая И.В.* $L_\mu \to L_\nu$ равносходимость спектральных разложений для системы Дирака с L_κ потенциалом // Докл. АН. 2016. Т. 467. № 6. С. 641–644.
7. *Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Хромов А.П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака // Докл. АН. 2012. Т. 443. № 4. С. 414–417.
8. *Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Хромов А.П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака с недифференцируемым потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. Вып. 3. С. 22–30.
9. *Бурлуцкая М.Ш., Корнев В.В., Хромов А.П.* Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 9. С. 1621–1632.
10. *Вагабов А.И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского госуниверситета, 1994. 160 с.
11. *Бурлуцкая М.Ш.* Смешанная задача для системы дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. Вып. 2. С. 145–151.

12. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 12. С. 2233–2246.
13. *Хромов А.П., Бурлуцкая М.Ш.* Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. Вып. 2. С. 171–198.
14. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Л.: ГИТТЛ, 1950. 368 с.
15. *Чернятин В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во МГУ, 1991. 112 с.
16. *Хромов А.П.* Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 239–251.
17. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом в случае двухточечных граничных условий разных порядков // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 4. С. 505–515.