

УДК 519.635

КОМПАКТНАЯ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ¹⁾

© 2019 г. Б. Н. Четверушкин^{1,*}, А. В. Савельев^{2,**}, В. И. Савельев^{2,***}

¹⁾ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН, Россия;

²⁾ 236041 Калининград, ул. Александра Невского, 14, БФУ, Россия)

*e-mail: office@keldysh.ru

**e-mail: andrey.saveliev@desy.de

***e-mail: valeri.saveliev@desy.de

Поступила в редакцию 18.07.2018 г.

Рассматривается упрощенная квазигазодинамическая система. Обсуждаются возможности ее использования для моделирования на вычислительных системах высокой производительности. Приводятся некоторые результаты численных расчетов. Библ. 16. Фиг. 4.

Ключевые слова: магнитогазодинамика, явные кинетические схемы, высокопроизводительные вычисления.

DOI: 10.1134/S0044466919030062

1. ВВЕДЕНИЕ

Квазигазодинамическая система уравнений (КГД) [1] обладает целым рядом достоинств, позволяющим успешно ее использовать для моделирования сложных газо- и гидродинамических течений. В первую очередь эти возможности раскрываются при расчетах на современных системах высокой и сверхвысокой производительности. Недостатком КГД системы является ее громоздкость, особенно наглядно выраженная в ее магнитогазодинамическом варианте (см. [2], [3]). Эта громоздкость выражается в большом количестве диссипативных членов, учет которых, впрочем, не вызывает сколько-нибудь принципиальных трудностей и связан лишь с большим объемом рутинной программистской работы.

В работе [4] предложен вариант упрощенной КГД системы. Его вывод опирается на две принципиальные особенности КГД системы – ее гиперболический характер и наличие диссипативного члена в правой части уравнения неразрывности. (Следует напомнить, что несмотря на эти особенности КГД система отличается от уравнений Навье–Стокса на члены второго порядка малости по числу Кнудсена [1].)

Для компактного варианта КГД и ее магнитогазодинамического аналога построение вычислительных алгоритмов может быть основано в значительной мере на копировании известных алгоритмов решения уравнений Навье–Стокса и диссипативных МГД уравнений. При этом естественно сохраняются преимущества, связанные с решением оригинальной КГД системы.

В данной работе обсуждаются алгоритмы решения компактной КГД системы и приводятся результаты расчета 3D течения вязкого теплопроводного газа на пространственной сетке, состоящей из 10^7 узлов.

2. КОМПАКТНЫЕ КГД И МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ КГД СИСТЕМЫ

Как уже отмечалось, характерной особенностью КГД системы является наличие диссипативного члена в уравнении неразрывности. Его появление напрямую связано с характерной особенностью КГД системы – гарантированным сглаживанием решения на расстоянии длины свободного пробега l [5], [6].

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 17-71-10040).

Следует отметить, что уравнения Эйлера связаны с представлением функции распределения f в виде локально-максвелловской f_0

$$f = f_0 = \frac{\rho(\mathbf{x})}{(2\pi RT(\mathbf{x}))^{3/2}} e^{-\frac{(\xi_i - u_i(\mathbf{x}))^2}{2RT}}, \quad (2.1)$$

где ρ – плотность, \mathbf{u}_i – макроскопическая скорость, T – температура.

В свою очередь уравнения Навье–Стокса связаны с представлением функции распределения в виде двух членов разложения Чепмена–Энскога (см. [7]–[9])

$$f = f_0(1 + \phi(\xi)), \quad (2.2)$$

где $\phi(\xi)$ – малая добавка порядка $O(Kn)$, зависящая от числа Кнудсена.

Возможность представления вязких и теплопроводных членов с помощью только двух членов разложения, в отличие от громоздкого разложения Гильберта, связана с явным учетом физического факта, что вблизи равновесия функция распределения зависит от пространственных переменных и времени только посредством пяти газодинамических параметров ρ , \mathbf{u} и T . В КГД системе дополнительно к зависимости от ρ , \mathbf{u} и T учитывается, что функция распределения f_0 слабо меняется на расстояниях длины свободного пробега l (см. [1], [5]).

Диссипативный член в правой части уравнения неразрывности КГД может быть представлен в дивергентном виде:

$$\tau \frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = \text{div}(\rho \mathbf{w}), \quad (2.3)$$

где

$$w_i = \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k + \delta_{ik} p), \quad (2.4)$$

здесь p – давление.

В свою очередь \mathbf{w} имеет смысл дополнительной скорости, появление которой связано со сглаживанием решения на расстоянии l .

Для вывода компактной КГД системы воспользуемся тем феноменологическим приемом, который использовался при выводе уравнений механики сплошной среды. Следуя, например, [10] записываем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \text{div} \mathbf{S}_Q = 0, \quad (2.5)$$

где \mathbf{Q} – интересующий газодинамический параметр, \mathbf{S}_Q – поток, приводящий к изменению этого параметра.

При формировании \mathbf{S}_Q наряду с используемыми для вывода уравнений газовой динамики макроскопической скорости \mathbf{v} , тензора молекулярной вязкости P_{NS} и вектора теплового потока \mathbf{q} , учтем дополнительный импульс, связанный со скоростью \mathbf{w} (2.4). Вместо $\partial \mathbf{Q} / \partial t$ в (2.5) изменение по времени Q выразим в виде $\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}$. Появление второй производной по времени, присутствующее в КГД, связано с тем, что промежуток времени, на котором исследуется изменение параметра Q , не может быть меньше (по порядку величины) характерного времени между столкновениями молекул, т.е. времени установления нового состояния равновесия.

С учетом этих факторов, выпишем компактный вариант КГД системы,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \text{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w})] = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho \mathbf{u}}{\partial t^2} + \text{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times \mathbf{u}] + \nabla p = \text{div} P_{NS}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \operatorname{div}[(E + p)(\mathbf{u} - \mathbf{w})] = \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div}(P_{NS}\mathbf{u}). \quad (2.8)$$

В качестве дополнительного обозначения в (2.6)–(2.8) используется E – полная энергия, $E = \rho u^2/2 + \rho \varepsilon$, где ε – внутренняя энергия.

Система (2.6)–(2.8) отличается от оригинальной КГД системы (см. [1], [4]), которая может быть предоставлена в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w})] = 0, \quad (2.9)$$

$$w_i = \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k + \delta_{ik} p), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho \mathbf{u}}{\partial t^2} + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times \mathbf{u}] + \nabla p = \operatorname{div} P, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \operatorname{div}[(E + p)(\mathbf{u} - \mathbf{w})] = \operatorname{div} \mathbf{q}^* + \operatorname{div}(P\mathbf{u}), \quad (2.12)$$

где тензор P и вектор \mathbf{q}^* определяются следующими выражениями (см. [11]):

$$P = P_{NS} + \rho \mathbf{u} \times \left[\mathbf{w} - \frac{\tau}{\rho} \mathbf{u} \nabla (\rho \mathbf{u}) \right] + \tau [\mathbf{u} \nabla p + \tau p \operatorname{div} \mathbf{u}], \quad (2.13)$$

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{q} + \tau \left[\rho \left(\mathbf{u} \nabla \varepsilon - \frac{p}{\rho^2} \mathbf{u} \nabla \rho \right) \right] \mathbf{u}. \quad (2.14)$$

Аналогично системе (2.4), (2.6)–(2.8) компактный магнитогазодинамический вариант КГД примет вид

$$w_k = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \delta_{ik} + \rho u_i u_k - B_i B_k \right], \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w})] = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho \mathbf{u}}{\partial t^2} + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + B_k B_p] + \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \operatorname{div} P_{NS}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \operatorname{div} \left[\left(E + p + \frac{B^2}{8\pi} \right) (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \right] = \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div}(P_{NS}\mathbf{u}), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\tau_m}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \operatorname{rot}[(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times \mathbf{B}] + v_m \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (2.19)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.20)$$

В системе (2.15)–(2.20) в дополнение к ранее введенным обозначениям используются следующие: \mathbf{B} – вектор напряженности магнитного поля, v_m – магнитная вязкость

$$v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \quad (2.21)$$

здесь σ – проводимость, c – скорость света, τ_m – магнитное время

$$\tau_m = \frac{2\rho v_m}{p + \frac{B^2}{8\pi}}. \quad (2.22)$$

Выражение (22) для τ_m получено из следующих соображений. При получении квазигазодинамической МГД в правой части уравнения магнитной индукции появляется ряд дис-

сипативных членов (см. [3], [12]). Однако их анализ показывает, что вклад первого члена $\tau_m \left(p + B^2 / (8\pi) \right) (\partial B_i / \partial x_k - \partial B_k / \partial x_i) / (2\rho)$ основной. В свою очередь этот член по своей форме совпадает с $v_m \operatorname{rot} \mathbf{B}$. Обратим также внимание на то, что из (2.22) следует выражение для магнитной вязкости v_m :

$$v_m = \frac{\tau_m \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right)}{2\rho}, \quad (2.23)$$

которое по своей структуре совпадает с классическим выражением для молекулярной вязкости μ ,

$$\mu = \frac{\tau p}{2\rho}. \quad (2.24)$$

Обсудим вопросы, связанные с построением вычислительных алгоритмов для компактной квазигазодинамической системы (2.4), (2.6)–(2.8) и ее магнитогазодинамического аналога (2.15)–(2.20).

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Обратим внимание на структуру компактной квазигазодинамической системы (2.4), (2.6)–(2.8). Ее отличие от уравнений Навье–Стокса заключается в появлении вторых производных по времени, умноженных на время τ , и добавкой \mathbf{w} к газодинамической скорости \mathbf{u} . Для решения этой системы предлагается использовать трехслойную явную схему, в которой неизвестные газодинамические параметры на новом $j + 1$ слое по времени определяются по известным данным с j и $j - 1$ слоя по времени. При этом пространственные производные аппроксимируются на центральном j слое. Опишем более подробно эту схему.

Рассмотрение этой схемы проведем на примере гиперболического уравнения теплопроводности (см. [13]),

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau^* \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial k} \frac{\partial T}{\partial x} + F(t, \mathbf{x}). \quad (3.1)$$

Здесь $F(t, \mathbf{x})$ – заданный источник тепла, τ^* – коэффициент, имеющий размерность времени.

Уравнение (3.1) может быть получено как частный случай уравнения энергии (2.12) в отсутствие газодинамического движения. Однако в качестве коэффициента перед второй производной по времени здесь выбирается не время между столкновениями молекул τ . Вместо него используется время τ^* , значение которого выбирается из следующих соображений. С одной стороны, его использование должно повышать устойчивость явной схемы, а с другой, член $\tau^* \partial^2 T / \partial t^2$ не должен вносить сколько-нибудь заметных изменений в решение классического уравнения теплопроводности. По сути дела должно выполняться условие

$$\left[\tau^* \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right] \ll \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]. \quad (3.2)$$

В качестве такого значения τ^* можно выбрать величину (см. [14], [15])

$$\tau^* = \frac{h^*}{v^*}, \quad (3.3)$$

где h^* – характерный размер пространственной ячейки, v^* – характерное значение скорости.

Как показывает анализ трехслойной явной схемы для решения уравнения (3.1) с τ^* , определяемым с помощью выражения (3.3), она будет удовлетворять условию устойчивости (см. [14])

$$\Delta t \lesssim (h^*)^{3/2}. \quad (3.4)$$

Это условие тоже достаточно жесткое, но все-таки более приемлемо, чем обычное условие устойчивости явной схемы для параболических уравнений

$$\Delta t \lesssim h^2. \quad (3.5)$$

Особенно ярко преимущества трехслойной явной схемы с τ^* , определяемым выражением (3.3), проявляются на подробных пространственных сетках (см. [15]).

Рассмотрим, следуя [16], еще один вариант расчета уравнения (3.1) для простоты, полагая источник равным нулю. Перепишем (3.1) в виде

$$\tau^* \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \Phi_Q, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \Phi, \quad \tau^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi_Q - \Phi. \quad (3.7)$$

В начале определим пространственные потоки Φ_Q . Затем из второго уравнения (3.7) получим

$$\Phi^{j+1} = \Phi^j D + \Phi_Q(1 - D), \quad (3.8)$$

где

$$D = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau^*}\right), \quad (3.9)$$

используя (3.8), окончательно получаем

$$T^{j+1} = T^j + \Delta t \nabla \Phi^{j+1}. \quad (3.10)$$

Эта схема, сочетая в себе консервативный для вычисления Φ_Q подход и расчет по характеристикам, позволяет в практических вычислениях получить более мягкое ограничение для устойчивости, чем для трехслойной схемы. Однако асимптотически при τ^* , определяемое выражением (3.3), выполняется условие устойчивости (3.4).

Обратим внимание на то, что пространственные производные, входящие в систему (2.8)–(2.12) и ее магнитогазодинамического аналога (2.16)–(2.19), могут быть представлены в дивергентном виде, удобном для применения вычислительной процедуры, аналогичной (3.8)–(3.10).

Вернемся к трехслойной явной системе и обсудим аппроксимацию пространственных производных на среднем слое $t = t^j$. Структура уравнений (2.9)–(2.12) позволяет использовать уже разработанные методы решения уравнений Навье–Стокса. В самом деле величина \mathbf{w} (2.10) выступает в качестве дополнения к газодинамической скорости \mathbf{u} . В свою очередь величина дополнительной скорости (2.10) определяется через пространственные производные произведения Навье–Стокса. Следовательно, для нахождения \mathbf{w} можно использовать ранее разработанные алгоритмы решения уравнений газовой динамики.

Аналогичные рассуждения об аппроксимации пространственных производных можно применить и для решения магнитогазодинамической системы (2.16)–(2.20).

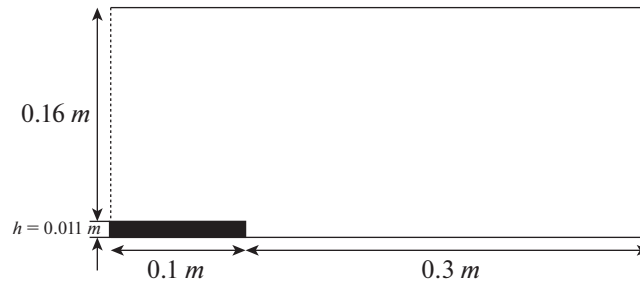
4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Составление тестовых расчетов с помощью компактной КГД системы, ее полного варианта и классических уравнений Навье–Стокса было проведено в [4]. Там же сравнивались аналогичные результаты для компактной магнитогазодинамической системы, расчетов, полученных с помощью полной квазигазодинамической МГД системы и расчетов с помощью классических МГД уравнений. В данной работе в качестве основы для решения использовалась компактная КГД система. Для ее решения использовалась простейшая трехслойная явная схема с τ^* определяемым выражением (3.3). Эта схема хорошо адаптируется на архитектуру многопроцессорных, включая гибридные, вычислительных систем.

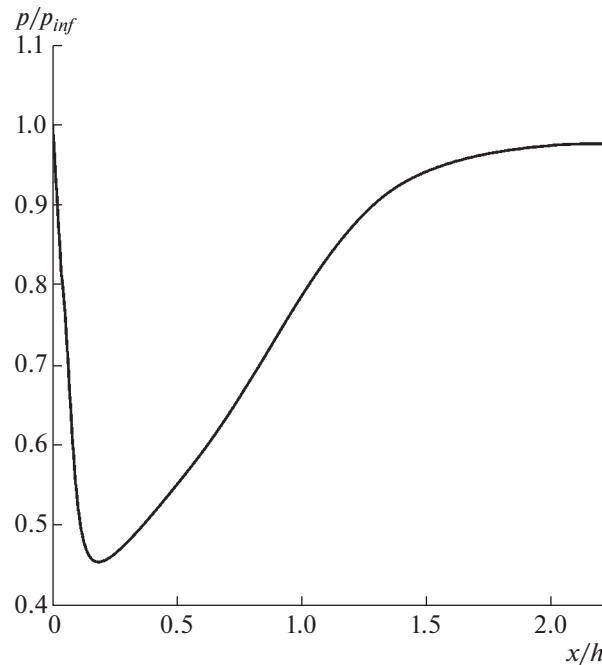
Приведем результаты расчетов сложной картины 3D течения вязкого газа на относительно небольших по размерности (10^6 – 10^7 узлов) пространственных сетках. В качестве примера рассматривалось дозвуковое и сверхзвуковое течение вязкого газа вблизи обратной ступеньки.

Схема расчетной области указана на фиг. 1. Специфической особенностью рассматриваемой конструкции является то, что ступенька имеет ограниченный размер $\Delta = 0.5h$ вдоль оси z .

Приведем исходные параметры рассматриваемых двух вариантов задачи. В первом варианте скорость набегающего потока в числах Маха ($M = 1.25$) использовалась пространственная сетка ($200 \times 75 \times 100$). Соответственно число Рейнольдса, рассчитанное по высоте ступеньки h , равнялось $Re_h = 0.98 \times 10^5$.



Фиг. 1. Схема расчетной области x – y -плоскость.



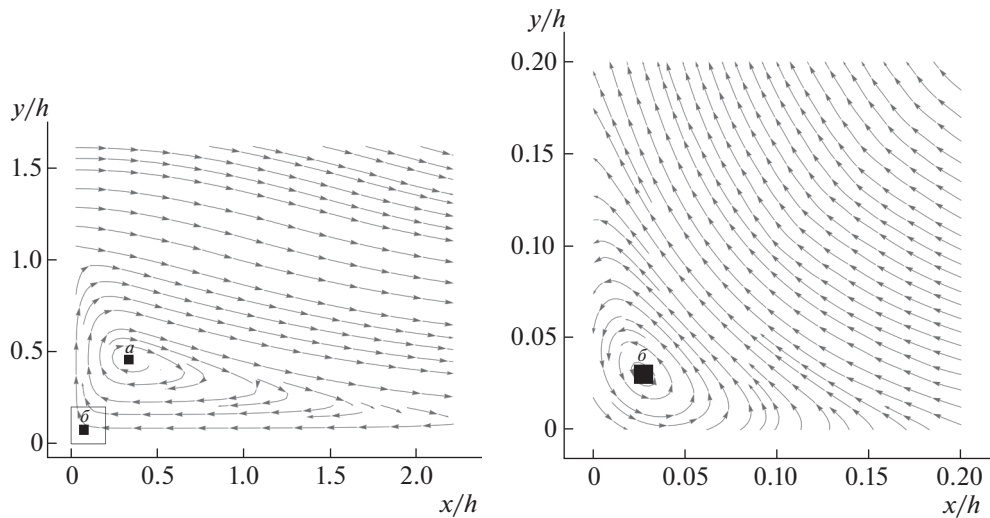
Фиг. 2. Профиль осредненного давления ($M = 1.25$) за обратной ступенькой.

Во втором варианте ($M = 0.75$, $Re_h = 0.59 \times 10^5$) использовалась более подробная пространственная сетка ($600 \times 225 \times 100$). В обоих вариантах давление набегающего потока и его температура были одинаковы ($p = 1.5 \times 10^4$ Па и температура $T = 170$ К).

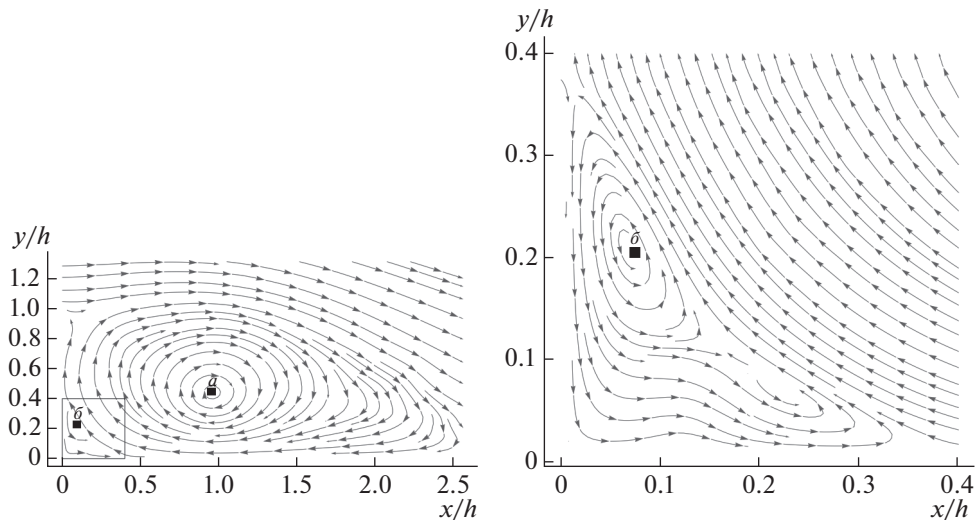
Течения с такими высокими числами Рейнольдса характеризуются наличием интенсивной турбулентности. Для ее адекватного описания в прямом расчете, использующем дополнительные модели турбулентности, требуются более подробные пространственные сетки, состоящие из 10^9 – 10^{10} расчетных узлов. Их реализация вызывает потребность многократного увеличения используемых вычислительных ресурсов. Однако и данные расчеты на умеренных пространственных сетках с помощью рассматриваемой модели показывают ее возможности для моделирования сложных газодинамических течений.

На фиг. 2 показан профиль осредненного по времени давления за обратной ступенькой. Сразу же за ступенькой наблюдается характерный для этого типа течения провал давления.

На фиг. 3 изображена картина поля скоростей. Обратим внимание на четкое разрешение основного вихря (маркер a на фиг. 3) и образование (маркер b на фиг. 3), которое можно интерпретировать как изображение более мелкого вихря.



Фиг. 3. Поле скоростей за обратной ступенькой ($M = 1.25$). Справа показана вырезка из левого рисунка, обозначенная рамкой.



Фиг. 4. Поле скоростей за обратной ступенькой для варианта $M = 0.75$. Справа показана вырезка из левого рисунка, обозначенная рамкой.

Продемонстрируем это также на примере расчета на более подробной пространственной сетке, состоящей из 1.35×10^7 пространственных узлов и с меньшей скоростью входного потока ($M = 0.75$) и соответственно числа Рейнольдса, что приводит к эффекту еще большего увеличения расчетной сетки по сравнению с первым вариантом.

На фиг. 4 четко видны крупный вихрь (маркер *a*, фиг. 4) и более мелкий (маркер *b*, фиг. 4), т.е. на основе данной модели использование подробных сеток позволяет разрешать более тонкую структуру течения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Компактная квазигидродинамическая система является удобной и относительно простой моделью для расчета сложных газодинамических течений. Она так же как и исходная КГД модель допускает использование алгоритмов хорошо адаптируемых к архитектуре систем сверхвысокой производительности, ресурсы которых станут доступными в ближайшем будущем. Использо-

ние все более подробных пространственных сеток позволит описать детальную картину сложных газодинамических течений. Это позволяет надеяться, что компактная КГД система и построенные на ее основе вычислительные алгоритмы станут востребованным инструментарием для моделирования задач гидро и газовой динамики на вычислительных системах следующего десятилетия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
2. *Четверушкин Б.Н., Д'Асцензо Н., Савельев В.И.* Кинетически согласованные уравнения магнитной газодинамики и их использование в высокопроизводительных вычислениях // Докл. АН. 2014. Т. 457. С. 526–529.
3. *Четверушкин Б.Н., Савельев В.И.* Кинетические модели и высокопроизводительные вычисления: Препринт № 079. М.: ИПМ, 2015.
4. *Четверушкин Б.Н., Савельев А.В., Савельев В.И.* Квазигазодинамическая модель для описания магнитогазодинамических явлений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8.
5. *Четверушкин Б.Н.* Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во МГУ, 1999.
6. *Шеретов Ю.В.* Применение функционального анализа в теории приближений. Квазигазодинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды. Тверь: Изд-во ТГУ, 1997.
7. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
8. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973.
9. *Веденяпин В.В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
10. *Зельдович Я.Б.* Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений. М.: Наука, 1966.
11. *Elizarova T.G.* Quasi-Gas Dynamic Equations. Heidelberg: Springer, 2009.
12. *Chetverushkin B., D'Ascenzo N., Ishanov S., Saveliev V.* Hyperbolic type explicit kinetic scheme of magneto gas dynamics for high performance computing systems // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. 2015. V. 30. P. 27–36.
13. *Голант Б.Е., Жилинский А.П., Сахаров У.Е.* Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977.
14. *Четверушкин Б.Н., Гулин А.В.* Явные схемы и моделирование на вычислительных системах сверхвысокой производительности // Докл. АН. 2012. Т. 446. С. 501.
15. *Четверушкин Б.Н., Д'Асцензо Н., Савельев В.И.* Об одном алгоритме решения параболических и эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 8. С. 1320–1328.
16. *Давыдов А.А., Четверушкин Б.Н., Шильников Е.В.* Моделирование течений несжимаемой жидкости и слабосжимаемого газа на многоядерных гибридных вычислительных системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 12. С. 2275–2284.